مجله ریاضیات کاربردی واحد لاهیجان، سال هفتم، شماره ۱(پیاپی ۲۴)، بهار ۸۹، ص ص ۱۲-۱

تعیین بازه اطمینان برای عدد غیر ارشمیدسی ε در مدل FDH

سهند دانشور [1]، صابر ساعتی [2*]، بهنام امینی دهخوارقانی [1]

[1] گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد تبریز

[2] گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد تهران شمال

چکیده

در این مقاله، با استفاده از فرم خطی متناظر با مدل FDH، دوآل آن تعیین شده و نقش عدد غیر ارشمیدسی ε در مدل FDH بررسی می‌گردد. سپس طی روندی، با حل n مساله برنامه‌ریزی خطی، یک بازه اطمینان برای ε به‌دست می‌آوریم.

کلمات کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها، مدل FDH، عدد غیرارشمیدسی ε.

۱ مقدمه

مدل FDH (Free Disposal Hull)، شکل دیگری از مدل های تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) می باشد که توسط Deprins در سال ۱۹۸۴ معرفی گردید [۴] و مشخصه عمده آن، عدم برقراری اصل تحدب در مجموعه امکان تولید می باشد. همچنین این مدل به‌عنوان مدلی با بازده به مقیاس متغیر (VRS)، در میان مدل های DEA شناخته شده و توسط یک مساله برنامه‌ریزی صحیح مختلط (MILP) نمایش داده می‌شود. گام نخست در جهت شناخت ویژگی‌های مدل FDH توسط Karstens و Vanden [۶] ارایه گردید که در آن شکل خاصی از بازده به مقیاس در مدل FDH به‌کار برده شده بود. بعدها Briec [۲] توانست پیرامون این موضوع مطالعات دقیق‌تری را انجام دهد.

دو روش محاسباتی برای حل مدل های FDH به کار برده می‌شود. روش نخست بر پایه الگوریتم پیشنهادی Tulkens [۱۰] می باشد و روش دوم استفاده از یک مساله برنامه‌ریزی ریاضی است که توسط Karstens و Vanden [۶] ارایه شده است. اخیراً Podinovski [۸] و Agrell [۱] با استفاده از یک مساله برنامه‌ریزی خطی که هم ارز با مدل MILP می باشد، روشی را برای حل مدل FDH ارایه کرده‌اند که با استفاده از این مساله برنامه‌ریزی خطی، به راحتی می‌توان دوآل مدل FDH را به‌دست آورد.

* عهده دار مکاتبات

آدرس الکترونیکی: ssaatim@yahoo.com

در بسیاری از مدل های DEA از جمله مدل CCR و BCC برای رفع مشکل صفر بودن وزن‌ها از عدد غیر ارشمیدسی ε استفاده می‌شود. به طوری که این عدد به‌عنوان یک کران پائین برای وزن‌های ورودی و خروجی مانع از صفر شدن آن ها می‌گردد. در این مقاله، برای فرم εدار مدل FDH_{BCC} نشان می‌دهیم که عدد غیر ارشمیدسی ε همین نقش را ایفا می‌کند. به علاوه با استفاده از مدل Mehrabian و همکاران [۷] و با حل n مساله برنامه‌ریزی خطی، بازه اطمینانی را برای عدد غیرارشمیدسی ε به‌دست می‌آوریم.

در این مقاله ابتدا مدل FDH_{BCC} و فرم εدار این مدل معرفی می‌شوند. سپس با توجه به اینکه مدل‌های مذکور مسایل برنامه‌ریزی صحیح مختلط می باشند، فرم خطی متناظر با این مدل‌ها تعیین می‌گردند و این فرم خطی جهت یافتن دوآل مدل FDH_{BCC} مورد استفاده قرار می‌گیرد. همچنین نقش عدد غیر ارشمیدسی ε در مدل FDH مورد بررسی قرار می‌گیرد و در خاتمه نحوه تعیین بازه اطمینان برای عدد غیر ارشمیدسی εدر مدل FDH_{BCC} توضیح داده می‌شود.

۲ مدل FDH_{BCC} و فرم εدار آن

فرض کنید که n واحد تصمیم‌گیری (DMU) داریم که در آن هر DMU_j $(j=1,...,n)$، با مصرف بردار ورودی $X_j=\left(x_{1j},...,x_{mj}\right)$ $(i=1,...,m,\ x_{ij}>0)$، بردار خروجی $Y_j=\left(y_{1j},...,y_{sj}\right)$ $(r=1,...,s,\ y_{rj}>0)$ را تولید می‌کند که در آن $0<X_j\in R^m$ و $0<Y_j\in R^s$. بنابراین، ماتریس داده‌های ورودی و ماتریس داده‌های خروجی را می‌توان به شکل $X=\left[X_1,...,X_j,...,X_n\right]$ و $Y=\left[Y_1,...,Y_j,...,Y_n\right]$ تشکیل داد. که X یک ماتریس m×n و Y یک ماتریس s×n می باشد. فرض کنید که هدف ارزیابی عملکرد DMU_k ; $k=1$، ...، n باشد. می‌دانیم که با افزودن محدودیت $\lambda_j\in\{0,1\}$، $j=1$، ...، n به مجموعه امکان تولید مدل BCC، می‌توان PPS مربوط به مدل FDH_{BCC} را به شکل زیر به‌دست آورد:

$$PPS_{FDH_{BCC}}=\left\{(X,Y)\,\middle|\,\lambda X\le X_k,\ \lambda Y\ge Y_k,\ \mathbf{1}\lambda=1,\ \lambda_j\in\{0,1\};\ j=1,...,n\right\}$$

بنابراین، با مفروضات فوق مدل های FDH_{BCC} و فرم εدار آن به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{array}{lll}
\text{Min} & \theta & \\
\text{s.t.} & X\lambda+S^-=\theta X_k, & \\
& Y\lambda-S^+=Y_k, & \\
& \mathbf{1}\lambda=1, & \\
& \lambda_j\in\{0,1\}, \qquad j=1,...,n, & (۱)\\
& S^-\ge\mathbf{0},\ S^-\in R^m, & \\
& S^+\ge\mathbf{0},\ S^+\in R^s. &
\end{array}$$

و

$$\begin{aligned}
\text{Min}\quad & \theta\text{-}\varepsilon(\mathbf{1}S^{-}+\mathbf{1}S^{+}) \\
\text{s.t.}\quad & X\lambda+S^{-}=\theta X_k, \\
& Y\lambda-S^{+}=Y_k, \\
& \mathbf{1}\lambda=1, \\
& \lambda_j\in\{0,1\}, \qquad j=1,\dots,n, \\
& S^{-}\geq\mathbf{0}, \qquad S^{-}\in R^{m}, \\
& S^{+}\geq\mathbf{0}, \qquad S^{+}\in R^{s}.
\end{aligned} \tag{۲}$$

از آنجایی که مدل های فوق مسایل برنامه‌ریزی صحیح مختلط می‌باشند پس برای حل این مدل‌ها کافی است که فرم خطی متناظر با آن ها را به دست آوریم. براساس پیشنهاد Agrell [۱] فرم خطی این مدل‌ها به صورت زیر می‌باشند:

$$\begin{aligned}
\text{Min}\quad & \sum_{j=1}^{n}\theta_j \\
\text{s.t.}\quad & X_j\lambda_j+S_j^{-}=\theta_j X_k, \qquad j=1,\dots,n, \\
& (Y_j-Y_k)\lambda_j-S_j^{+}=0, \qquad j=1,\dots,n, \\
& \mathbf{1}\lambda=1, \\
& \lambda_j\geq 0, \qquad j=1,\dots,n, \\
& S_j^{-},S_j^{+}\geq\mathbf{0}, \qquad j=1,\dots,n.
\end{aligned} \tag{۳}$$

و

$$\begin{aligned}
\text{Min}\quad & \sum_{j=1}^{n}\theta_j-\varepsilon\sum_{j=1}^{n}(\mathbf{1}S_j^{-}+\ \mathbf{1}S_j^{+}) \\
\text{s.t}\quad & X_j\lambda_j+S_j^{-}=\theta_j X_k, \qquad j=1,\dots,n, \\
& (Y_j-Y_k)\lambda_j-S_j^{+}=0, \qquad j=1,\dots,n, \\
& \mathbf{1}\lambda=1, \\
& \lambda_j\geq 0, \qquad j=1,\dots,n, \\
& S_j^{-},S_j^{+}\geq\mathbf{0}, \qquad j=1,\dots,n.
\end{aligned} \tag{۴}$$

که در این مدل ها S_j^{-} و S_j^{+} به صورت زیر معرفی می شوند:

$$S_j^{-}=(s_{1j}^{-},\dots,s_{mj}^{-}),\ S_j^{+}=(s_{1j}^{+},\dots,s_{sj}^{+}) \tag{۵}$$

برای تعیین دوآل مدل های FDH_{BCC} و فرم εدار آن کافی است که دوآل فرم خطی متناظر با این مدل‌ها را به‌دست آوریم که به شکل زیر می‌باشند:

$$
\begin{aligned}
\text{Max} \quad & z \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^{m} v_{ij} x_{ik} = 1, && j = 1,\dots,n, \\
& \sum_{r=1}^{s} (y_{rj} - y_{rk}) u_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_{ij} x_{ij} + z \le 0, && j = 1,\dots,n, \\
& v_{ij} \ge 0, \quad \forall i,j, \\
& u_{rj} \ge 0, \quad \forall r,j.
\end{aligned} \tag{۶}
$$

و

$$
\begin{aligned}
\text{Max} \quad & z \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^{m} x_{ik} v_{ij} = 1, && j = 1,\dots,n, \\
& \sum_{r=1}^{s} (y_{rj} - y_{rk}) u_{rj} - \sum_{i=1}^{m} x_{ij} v_{ij} + z \le 0, && j = 1,\dots,n, \\
& v_{ij} \ge \varepsilon, \quad \forall i,j, \\
& u_{rj} \ge \varepsilon, \quad \forall r,j.
\end{aligned} \tag{۷}
$$

واضح است که مسایل برنامه‌ریزی خطی فوق شدنی بوده و همواره $z^* \le 1$. در حقیقت:

$$
z^* = \underset{1 \le j \le n}{\text{Min}} \left\{ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} v_{ij} - \sum_{r=1}^{s} (y_{rj} - y_{rk}) u_{rj} \right\} \tag{۸}
$$

۳ نقش عدد غیر ارشمیدسی ε

دراین فصل برای توجیه نقش عدد غیر ارشمیدسی ε و تفاوت میان مدل های FDH_{BCC} و فرم εدار آن، مثال زیر را در نظر می گیریم.

مثال ۱ سه واحد تصمیم گیری با دو ورودی و یک خروجی که اطلاعات مربوط به آن ها در جدول زیر آمده است را در نظر بگیرید:

DMU	A	B	C
I_1	2	2	3
I_2	3	5	5
O	4	4	6

جدول ۱: داده واحدهای تصمیم گیرنده

برای ارزیابی عملکرد واحدهای تصمیم‌گیری A و B دوآل مدل FDH_{BCC} را به کار می‌بریم. در این صورت جواب بهینه به دست آمده عبارت است از:

DMU	v_1^*	v_2^*	u^*	z^*
A	0	0.3333	0	1
B	0.5	0	0	1

جدول ۲: جواب بهینه به دست آمده از جدول ۱

با توجه به جواب بهینه به‌دست آمده نتیجه می‌شود که واحدهای تصمیم‌گیری A و B هر دو کارا هستند ($z^*=1$). ولی DMU_A غالب بر DMU_B می باشد. زیرا با ورودی‌های کمتر، همان خروجی y=4 را تولید کرده است. پس می‌توان نتیجه گرفت که DMU_A کارا و DMU_B ناکاراست. در حالی که در ارزیابی این دو واحد تصمیم‌گیری با دوآل مدل FDH_{BCC} نتیجه شد که هر دو واحد تصمیم‌گیری کارا هستند. پس مشکل چیست؟

این مشکل ناشی از $u^*=0$ است. یعنی خروجی واحدهای تصمیم‌گیری A و B در ارزیابی آن ها دخیل نبوده‌اند. یا به عبارت بهتر خروجی این دو واحد در کارآیی تأثیر نداشته‌اند. بنابراین، دوآل مدل FDH_{BCC}، هر دو DMU را کارا نشان می‌دهد. برای برطرف کردن این مشکل می‌توان عدد غیر ارشمیدسی $\varepsilon>0$ را به کار برد. در این صورت در دوآل مدل FDH_{BCC}محدودیت‌های نامنفی وزن‌ها با محدودیت‌های $v_i \geq \varepsilon$ $(i=1,...,m)$ و $u_r \geq \varepsilon$ $(r=1,...,s)$ جایگزین می‌شوند.

در واقع عدد غیر ارشمیدسی $\varepsilon>0$ به‌عنوان کران پائینی برای وزن‌های v_i و u_r به منظور تشخیص دادن واحدهای تصمیم‌گیری کارای قوی و ضعیف به کار برده می‌شود و آن ها را از صفر شدن دور نگه می‌دارد و وجود عدد غیر ارشمیدسی $\varepsilon>0$ باعث آشوب ابرصفحه‌های مرز ضعیف PPS می‌شود. همچنین عدد غیر ارشمیدسی $\varepsilon>0$، مقدار کارآیی DMU هایی را که با مرز ضعیف مقایسه شده‌اند را تغییر می‌دهد.

٤ نحوه تعیین بازه اطمینان ε

اکنون بر اساس روند پیشنهادی Mehrabian و همکاران [۷] می‌خواهیم بازه اطمینان عدد غیر ارشمیدسی ε را تعیین کنیم. بازه اطمینان برای عدد غیر ارشمیدسی ε، بازه‌ای است که برای هر مقدار ε از این بازه، مدل های اساسی DEA، در قسمت دوآل شدنی و در قسمت پرایمال کراندار می‌باشند. بدین منظور ابتدا مساله برنامه‌ریزی خطی زیر را برای ارزیابی عملکرد DMU_k که در آن $k \in \{1,...,n\}$ در نظر می گیریم:

$$
\begin{aligned}
\text{Max} \quad & \varepsilon_j \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ik} = 1, \\
& \sum_{r=1}^{s} u_r (y_{rj} - y_{rk}) - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} + z \leq 0, \qquad j=1,...,n, \\
& u_r \geq \varepsilon_j, \qquad \forall\, r,j, \\
& v_i \geq \varepsilon_j, \qquad \forall\, i,j.
\end{aligned} \tag{۹}
$$

قضیه ۱ مدل (۹) شدنی بوده و دارای جواب بهینه متناهی مثبت می باشد.

اثبات $(\varepsilon, u, v, z) = (0, \mathbf{0}, \frac{1}{x_{pk}} \mathbf{e}_p, 1)$ یک جواب شدنی برای مدل (۹) می باشد که در آن $x_{pk} = Max_{1 \le i \le m} x_{ik}$.

اکنون نشان می‌دهیم که مدل فوق دارای جواب بهینه متناهی است.

۱) می‌دانیم که $X_k > 0, v \ge \mathbf{1}\varepsilon$ پس داریم:

$$vX_k \ge \mathbf{1}\varepsilon X_k$$

اما از طرفی می‌دانیم که $v^t X_k = 1$ پس نتیجه می‌شود که:

$$1 = v^t X_k \ge \mathbf{1}\varepsilon X_k \Rightarrow \mathbf{1}\varepsilon X_k \le 1 \Rightarrow \varepsilon \le \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} x_{ik}} \tag{۱۰}$$

می توان کران بالایی برای ε برحسب خروجی‌ها نیز به دست آورد.

۲) می‌دانیم که $Y_k > 0, u \ge \mathbf{1}\varepsilon$ پس داریم:

$$uY_k \ge \mathbf{1}\varepsilon Y_k \tag{۱۱}$$

از طرفی با توجه به قید $u^t(Y_j - Y_k) - v^t X_j + z \le 0$ داریم:

$$u^t Y_j - v^t X_j + (z - u^t Y_k) \le 0$$

با فرض $u_0 = z - u^t Y_k$ خواهیم داشت:

$$u^t Y_j - v^t X_j + u_0 \le 0$$

اکنون با قرار دادن اندیس j=k در رابطه اخیر داریم:

$$u^t Y_k - v^t X_k + u_0 \le 0$$

$$v^t X_k = 1 \Rightarrow u^t Y_k + u_0 - 1 \le 0 \Rightarrow u^t Y_k \le 1 - u_0$$

اکنون با توجه به روابط (۱۱) و (۱۲) داریم:

$$1 - u_0 \ge u^t Y_k \ge \mathbf{1}\varepsilon Y_k \quad \Rightarrow 1 - u_0 \ge \mathbf{1}\varepsilon Y_k \Rightarrow \varepsilon \le \frac{1 - u_0}{\sum_{r=1}^{s} y_{rk}} \tag{۱۳}$$

با توجه به روابط (۱۰) و (۱۳) بدیهی است که مقدار بهینه مساله داده شده متناهی است.

حال نشان می‌دهیم که مقدار جواب بهینه مدل داده شده همواره مثبت است.

دوآل مدل (۹) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$
\begin{aligned}
\text{Min}\quad & 0\lambda_j + 1\beta \\
\text{s.t.}\quad & \sum_{j=1}^{n}\lambda_j(Y_j - Y_k) - W = \mathbf{0}, \\
& -\sum_{j=1}^{n}\lambda_j X_j + \beta X_k - Z' = \mathbf{0}, \\
& \mathbf{1}W + \mathbf{1}Z' = 1, \\
& \sum_{j=1}^{n}\lambda_j = 0, \\
& W, Z' \ge \mathbf{0}, \\
& \lambda_j \ge 0.
\end{aligned}
\qquad (۱۴)
$$

با توجه به محدودیت‌های $\mathbf{1}\lambda = 0$ و $\lambda \ge \mathbf{0}$ مدل اخیر را می‌توان به شکل زیر ساده کرد:

$$
\begin{aligned}
\text{Min}\quad & \beta \\
\text{s.t.}\quad & \beta X_k - Z' = \mathbf{0}, \\
& \mathbf{1}Z' = 1, \\
& Z' \ge \mathbf{0}.
\end{aligned}
\qquad (۱۵)
$$

فرض می‌کنیم که مقدار جواب بهینه مدل (۹) برابر صفر باشد. پس طبق قضیه قوی دوآلیتی $\text{Min}\beta = \beta^* = 0$. که این با توجه به محدودیت های $\beta X_k - Z' = \mathbf{0}$ و $\mathbf{1}Z' = 1$ امکان پذیر نیست. از این رو (۱۴) دارای جواب بهینه مثبت است پس (۹) نیز دارای جواب مثبت است. یعنی (۹) دارای یک جواب بهینه متناهی همانند ε_k^* است که در آن $0 < \varepsilon_k^* < +\infty$.

تعریف ۱ بازه اطمینان به منظور شدنی بودن مساله دوآل و کراندار بودن مساله پرایمال در مدل FDH برای ارزیابی DMU_k به صورت $[0, \varepsilon_k^*]$ است که ε_k^* جواب بهینه (۹) می باشد.

تعریف ۲ اشتراک تمام بازه‌های اطمینان در مدل FDH برای ارزیابی تمام واحدهای تصمیم گیری به‌صورت $[0, \varepsilon^*]$ است که در آن $\varepsilon^* = \text{Min}\{\varepsilon_1^*, \ldots, \varepsilon_n^*\}$ که ε_j^*ها از حل مساله برنامه ریزی خطی (۹) به‌دست می‌آیند.

تعریف ۳ هر مقدار از بازه اطمینان $[0, \varepsilon^*]$ به‌عنوان یک مقدار قابل قبول برای عدد غیر ارشمیدسی ε می باشد.

تعریف ٤ $\varepsilon^* = \text{Min}\{\varepsilon_1^*, \ldots, \varepsilon_n^*\}$ به‌دست آمده از حل (۹) به‌عنوان کران پائینی برای وزن های v_i و u_r در دوآل فرم εدار مدل FDH_{BCC} به کار برده می‌شود.

قضیه۲ اگر $[0, \varepsilon']$ بزرگترین بازه اطمینان برای عدد غیر ارشمیدسی ε باشد، در این صورت $\varepsilon' = \varepsilon^*$.

اثبات فرض کنید $[0, \varepsilon^*]$ یک بازه اطمینان برای عدد غیر ارشمیدسی ε باشد. از آنجایی که $[0, \varepsilon']$ بزرگترین بازه اطمینان برای عدد غیرارشمیدسی ε است پس می‌توان نوشت:

$[0,\varepsilon^*] \subseteq [0,\varepsilon']$ یا $\varepsilon^* \le \varepsilon'$ (۱۶)

اکنون نشان می‌دهیم که $\varepsilon' \le \varepsilon^*$. فرض کنید که $\varepsilon' > \varepsilon^*$ ، بنابراین عدد مثبتی همانند δ می‌توان یافت که $\varepsilon' = \varepsilon^* + \delta$. بر اساس تعریف، برای مقدار $\varepsilon' = \varepsilon^* + \delta$ دوآل مدل FDH برای تمام واحدهای تصمیم‌گیری شدنی است و در حالت خاص $(\varepsilon', u^0,, v^0, z^0) = (\varepsilon^* + \delta, u^0,, v^0, z^0)$ یک جواب شدنی برای (۹) است که در آن $\varepsilon^* = \varepsilon_k^*$.

با توجه به اینکه ε_k^* یک جواب بهینه برای (۹) می باشد پس $\varepsilon_k^* \ge \varepsilon^* + \delta \Rightarrow \varepsilon_k^* \ge \varepsilon_k^* + \delta$.

پس نتیجه می‌شود که $\delta \le 0$ که این یک تناقض است پس

$\varepsilon' \le \varepsilon^*$ (۱۷)

با توجه به روابط (۱۶) و(۱۷) نتیجه می‌شود که $\varepsilon' = \varepsilon^*$.

۵ تعیین بازه اطمینان ε با حل یک مساله برنامه‌ریزی خطی

در بخش قبل، روندی برای تعیین بازه اطمینان عدد غیر ارشمیدسی ε ارایه گردید. در این روند برای یافتن بازه اطمینان ε، ناچار به حل n مساله برنامه‌ریزی خطی هستیم که در آن n تعداد واحدهای تصمیم‌گیری می باشد. در این بخش برای تعیین بازه اطمینان ε یک مساله برنامه‌ریزی خطی را ارایه می‌دهیم.

با توجه به قضیه ۲ می‌توان نتیجه گرفت که جواب بهینه (۹) با جواب بهینه مدل زیر یکسان است:

$$\begin{aligned}
\text{Max} \quad & \varepsilon \\
\text{s.t.} \quad & v^t X_k \le 1, \\
& u^t (Y_j - Y_k) - v^t X_j + z \le 0, \qquad j = 1,\dots,n, \\
& v \ge \mathbf{1}\varepsilon, \\
& u \ge \mathbf{1}\varepsilon.
\end{aligned} \tag{۱۸}$$

اکنون مساله برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}
\text{Max} \quad & \varepsilon \\
\text{s.t.} \quad & v^t X_j \le 1, \qquad j = 1,\dots,n, \\
& u^t (Y_j - Y_k) - v^t X_j + z \le 0, \qquad j = 1,\dots,n, \\
& v \ge \mathbf{1}\varepsilon, \\
& u \ge \mathbf{1}\varepsilon.
\end{aligned} \tag{۱۹}$$

فرض کنید که $(\varepsilon^0, u^0, v^0, z^0)$ یک جواب بهینه برای (۱۹) باشد. در این صورت $\varepsilon^0 \le \varepsilon_j^*$ برای $j = 1$،...، n که در آن ε_j^*ها جواب بهینه برای (۹) هستند. از این رو می‌توان نتیجه گرفت که:

$\varepsilon^0 \le \varepsilon^* = \text{Min}\{\varepsilon_j^*; j = 1,\dots,n\}$

به عبارت دیگر $\varepsilon^0 > 0$. زیرا در غیر این صورت با توجه به محدودیت‌های دوآل (۱۹) با تناقض مواجه می‌شویم.

قضیه۳ مقدار جواب بهینه (۱۹) مثبت است.

اثبات دوآل (۱۹) را به شکل زیر در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned}
\text{Min} \quad & \sum_{j=1}^{n}\theta_j + 0\lambda_j \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^{n}\theta_j X_j - \sum_{j=1}^{n}\lambda_j X_j - Z' = \mathbf{0}, \\
& \sum_{j=1}^{n}\lambda_j (Y_j - Y_k) - W = \mathbf{0}, \\
& \mathbf{1}W + \mathbf{1}Z' = 1, \\
& \sum_{j=1}^{n}\lambda_j = 0, \\
& \theta_j, \lambda_j \geq 0, \qquad j = 1,\ldots,n, \\
& W, Z' \geq \mathbf{0}.
\end{aligned} \tag{۲۰}$$

با توجه به محدودیت‌های $\mathbf{1}\lambda = 0$ و $\lambda \geq \mathbf{0}$ مدل اخیر را می‌توان به شکل زیر ساده کرد:

$$\begin{aligned}
\text{Min} \quad & \sum_{j=1}^{n}\theta_j \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^{n}\theta_j X_j - Z' = \mathbf{0}, \\
& \mathbf{1}Z' = 1, \\
& \theta_j \geq 0, \qquad j = 1,\ldots,n, \\
& Z' \geq \mathbf{0}.
\end{aligned} \tag{۲۱}$$

فرض می‌کنیم که مقدار جواب بهینه مدل (۱۹) برابر صفر باشد. پس بنابراین نتیجه می‌شود که $\text{Min} \ \sum_{j=1}^{n}\theta_j = 0$. که این با توجه به محدودیت‌های $\sum_{j=1}^{n} \theta_j X_j - Z' = \mathbf{0}$ و $\mathbf{1}Z' = 1$ امکان پذیر نیست. از این رو (۲۰) دارای جواب بهینه مثبت است. پس (۱۹) نیز دارای جواب مثبت است.

قضیه زیر رابطه میان ε^0 و ε^* را بیان می‌کند.

قضیه٤ اگر $(\varepsilon^0, u^0, v^0, z^0)$ یک جواب بهینه برای (۱۹) باشد و مجموعه $J = \{j \mid v^{0t}X_j = 1\} = \{k\}$ منحصر به فرد باشد در این صورت $\varepsilon^0 = \varepsilon^*$.

اثبات با در نظر گرفتن دوآل (۱۹) و بر اساس فرض می‌دانیم که: $v^{0t}X_j < 1 \ ; \ j = 1,..,n, j \neq k$. در این صورت، شرط مکمل زاید نتیجه می‌دهد که مقدار جواب بهینه (۲۰) بایستی $\theta_j^0 = 0 \ ; \ j = 1,..,n, j \neq k$. از این رو θ_k^0 را می‌توان یک جواب بهینه برای مساله برنامه‌ریزی خطی زیر در نظر گرفت:

$$\begin{aligned}
\text{Min} \quad & \theta_k \\
\text{s.t.} \quad & \mathbf{1}W + \mathbf{1}Z' = 1, \\
& \theta_k X_k - \lambda X - Z' = \mathbf{0}, \\
& \lambda(Y - Y_k) - W = \mathbf{0}, \\
& \mathbf{1}\lambda = 0, \\
& W, Z', \lambda \geq \mathbf{0}, \\
& \theta_k \geq 0.
\end{aligned} \tag{۲۲}$$

که مدل فوق، دوآل (۱۸) می باشد که دارای جواب بهینه ε_k^* است به طوری که $\varepsilon_k^* = \varepsilon^0$. پس داریم:

$$\varepsilon_k^* = \varepsilon^o \leq \varepsilon^* = \text{Min}\left\{\varepsilon_j^*; j = 1,..,n\right\} \Rightarrow \varepsilon^0 = \varepsilon^*$$

٦ مثال های عددی

مثال ۱ شش واحد تصمیم‌گیری با یک ورودی و یک خروجی که اطلاعات مربوط به آن ها در جدول زیر آمده است را در نظر بگیرید:

DMU	A	B	C	D	E	F
I	3	5	8	10	6	9
O	2	4	7	8	1	5

جدول ۳: داده های مربوط به شش واحد تصمیم گیری

برای تعیین مقدار ε (ε^*) ابتدا مدل (۹) را برای تمام واحدهای تصمیم‌گیری حل می‌کنیم. در این صورت جواب بهینه به دست آمده عبارت است از:

DMU	ε_j^*	v^*	u^*	z^*
A	0.333	0.333	0.333	1
B	0.2	0.2	0.2	1
C	0.125	0.125	0.125	0
D	0.1	0.1	0.1	0.9
E	0.166667	0.166667	0.166667	0.333333
F	0.1111	0.1111	0.1111	0.666667

جدول٤: جواب بهینه مربوط به شش واحد تصمیم گیری با حل مدل (۹)

پس مقدار بهینه به‌دست آمده برای عدد غیرارشمیدسی ε (ε^*) عبارت است از:

$$\varepsilon^* = \text{Min}\{\varepsilon_1^*, \varepsilon_2^*, \varepsilon_3^*, \varepsilon_4^*, \varepsilon_5^*, \varepsilon_6^*\} = \text{Min}\{0.333, 0.2, 0.125, 0.1, 0.166667, 0.1111\} = 0.1$$

در نتیجه بازه اطمینان به صورت $[0,0.1]$ است.

مثال ۲ شش واحد تصمیم‌گیری با یک ورودی و یک خروجی که اطلاعات مربوط به آن ها در جدول ۱ آمده است را در نظر بگیرید.

این بار با به کار بردن (۱۹) می‌خواهیم بازه اطمینان عدد غیرارشمیدسی ε را تعیین کنیم. چنانچه ارزیابی ما بر روی واحد تصمیم‌گیری A باشد، جواب بهینه‌ای به شکل زیر به دست خواهیم آورد:

$$\varepsilon^0 = 0.1, u^0 = 0.1, v^0 = 0.1, z^0 = 0$$

پس بازه اطمینان به صورت $[0,0.1]$ خواهد بود. چنانچه هر کدام از واحدهای تصمیم‌گیری دیگر را با (۲۰) مورد ارزیابی قرار بدهیم همان جواب بهینه $\varepsilon^0 = 0.1$ را به دست خواهیم آورد که نتایج این ارزیابی در جدول زیر خلاصه شده است:

DMU	ε^o	v^o	u^o	z^o
A	0.1	0.1	0.1	0
B	0.1	0.1	0.1	0.5
C	0.1	0.1	0.1	0.8
D	0.1	0.1	0.1	0.9
E	0.1	0.1	0.1	0.2
F	0.1	0.1	0.1	0.6

جدول ۵: جواب بهینه مربوط به شش واحد تصمیم گیری با حل مدل (۱۹)

پس بازه اطمینان به صورت $[0,0.1]$ خواهد بود که با جواب مثال ۱ مطابقت دارد. توجه داریم که مجموعه $J = \left\{ j \mid {v^0}^t X_j = 1 \right\}$ منحصر به فرد می باشد. زیرا ${v^0}^t X_j = {v^o}^t x_D = 0.1\times 10 = 1$.

۷ نتیجه‌گیری

در این مقاله، ابتدا مدل های FDH را معرفی کردیم. سپس با توجه به اینکه مدل های FDH_{BCC} و فرم εدار مدل FDH_{BCC} یک مساله برنامه ریزی صحیح مختلط می‌باشند، فرم خطی متناظر با این مدل‌ها را به‌دست آوردیم و این فرم خطی را جهت یافتن دوآل مدل های مذکور مورد استفاده قرار دادیم. همچنین برای رفع مشکل صفر شدن وزن DMUها در ارزیابی آن ها با مدل FDH_{BCC}، عـدد غیر ارشمیدسی ε و فرم εدار مدل FDH_{BCC}را به کار بردیم و نقش عدد غیرارشمیدسی ε را در فرم εدار مدل FDH_{BCC} مورد مطالعه قرار دادیم.

در نهایت روندی را برای محاسبه بازه اطمینان ε در مدل FDH_{BCC} ارایه کردیم که در این روند با حل n مساله برنامه‌ریزی خطی، می‌توان بازه اطمینان ε را در مدل FDH_{BCC} تعیین کرد. در پایان به جای حل n مساله برنامه‌ریزی خطی، روندی را طراحی کردیم که با حل یک مساله برنامه‌ریزی خطی واحد، بازه اطمینان ε را تعیین کند.

منابع

[1] Agrell, P. J., Tind, J. A Dual Approaches to Nonconvex Frontier Models, Journal of Productivity Analysis 16, 2001, 129- 147.

[2] Briec, W., Kerstens, K., Vanden Eeckaut, P. Nonconvex Technologies and Cost Functions: Definitions, Duality and Non Parametric Tests of Convexity. Journal of Economics 81, 2004, 155-192.

[3] Daneshvar, S., Facet Analysis on Data Envelopment Analysis, Thesis of P.H.D, 2002.

[4] Deprins, D., Simar,L., Tulkens, H. Measuring Labor Efficiency in Post Offices. In: Marchand, M., Pertieau, P., Tulkens, H., the Performance of Public Enterprises Concepts and Measurements. Elsevier, Amsterdam, 1984, PP. 247- 263

[5] JahanShahloo, G.R. Kazemi Matin, R. Hadi Vencheh, A., On FDH Efficiency Analysis with Interval Aata, Applied Mathematics and Computation, 2004, 47- 55.

[6] Karstens, K., Vanden Eechaut, P., Estimating Return to Scale Using Nonparametric Deterministic Technologies: A New Method Based on Goodness-of-Fit, European Journal of Operational Research 1999, 134, 43-58.
[7] Mehrabian, S., Jahanshahloo, G.R., Alirezaee, M.R., Amin, G.R, an Assurance Interval for the Non-Archimedean Epsilon in DEA Models, European Journal of Operation Research, 2000, 344-347.
[8] Podinovski, V .V, On the Linearization of Reference Technologies for Testing Return to Scale in FDH Models, European Journal of Operational Research 152, 2004, 800-802.
[9] Thrall, R. M. What is the Economic Meaning of FDH, Journal of Productivity Analysis 11, 1999, 243-250.
[10] Tulkens, H., On FDH Efficiency Analysis: Some Methodological Issues and Application to Retail Banking, Courts and Urban Transit, Journal of Productivity Analysis, 1993, 183-210.
[11] Yun, Y. B., Nakayala, H., Tanino, T., A Generalized Model for Data Envelopment Analysis, European Journal of Operation Research, 2004, 87-105