تأثیر افزایش تعداد شاخص ها بر کارایی در تحلیل پوششی داده ها

فرهاد حسین زاده لطفی*، اعظم گنجی، مهناز برزوئی
گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات، تهران، ایران

چکیده

در این مقاله فرض بر این است n مشاهده واحد تصمیم گیری با m ورودی و s خروجی وجود دارد. تحلیل حساسیت را برای حالتی که شاخصی به مجموعه اضافه می شود را انجام می دهیم. یک شاخص جدید به شاخص ها اضافه نموده ومحدوده ای برای این شاخص چنان می یابیم که کارایی واحدهای کارا و مقدار کارایی واحدهای ناکارا حفظ گردد. برای ایجاد این ناحیه و اجتناب از حل مجدد مساله از روش تحلیل حساسیت برنامه ریزی خطی استفاده می کنیم.

کلمات کلیدی: تحلیل پوششی داده ها، کارایی، ورودی و خروجی، تحلیل حساسیت.

۱ مقدمه

برای مجموعه‌ای از n واحد تصمیم گیرنده با m ورودی و s خروجی معین، کارایی تمام واحدهای تصمیم گیرنده تعیین گردیده است. حال می‌خواهیم با تغییر در تعداد شاخص ها کارایی واحدها را مورد بررسی قرار دهیم. در اینجا این سوال مطرح می‌شود که آیا لازم است مدل کارایی را با این تغییرات مجددا حل نمود؟ به عنوان مثال با افزودن یک شاخص در فرم پوششی بعد مساله افزایش می یابد که حل دوباره مساله در بعد بالاتر مقرون به صرفه نیست. بنابراین باید تحقیقاتی انجام گیرد که بتوان به کمک فرآیند محاسباتی کمتر، تغییرات کارایی را مشخص نمود که این تحقیقات تحت عنوان تحلیل حساسیت صورت می‌پذیرد.

مبحث تحلیل حساسیت همواره مورد توجه محققان بوده است. در این زمینه چارنز و کوپر ۱۹۶۸ به موضوع تغییرات داده پرداختند و سپس در سال ۱۹۸۵ با توجه به تغییرات داده در هر دو طرف قیود مسایل برنامه‌ریزی خطی در DEA لزوم الگوریتم‌های جدید را بیان نمودند[3]. آن ها در سال ۱۹۹۲ تکنیک تحلیل حساسیت در حالت تغییرات همزمان تمامی‌ورودی‌ها و خروجی‌های یک DMU خاص را مورد توسعه قرار دادند[6]. علاوه بر این در سال ۱۹۹۶ تحلیل حساسیت و پایداری در طبقه‌بندی کارایی را بررسی نمودند که قبل از آن ۱۹۹۲ به این موضوع به طور خاص در مدل‌های جمعی پرداخته بودند[5].

*عهده دار مکاتبات
آدرس الکترونیکی: *farhad@hosseinzadeh.ir*

به واسطه تغییر در ورودی‌ها و خروجی‌ها ناحیه پایداری تعریف شد که ژووسیفورد تغییرات منحصر هر ورودی یا هر خروجی و همچنین تغییرات متناسب همزمان در تمام DMUها را برای محاسبه ناحیه پایداری مورد مطالعه قرار دادند [9] و این تغییرات را به صورت تغییرات بدتر شونده برای DMU تحت ارزیابی و تغییرات بهتر شونده برای سایر DMUها در نظر گرفتند بطوری که کارایی DMU تحت ارزیابی حفظ گردد[10].
چارنز و همکاران ۱۹۹۲ نیز به کمک L_1 و L_∞ مدل‌هایی را برای محاسبه شعاع پایداری ارایه نمودند[5] تحلیل حسایت و پایداری در طبقه‌بندی کارایی در مدل‌های DEA معکوس توسط جهانشاهلو و همکاران ۲۰۰۵ بررسی گردید[8].
موضوع دیگری که در تحلیل حساسیت می توان مورد بررسی قرار داد در صورت افزودن یا کاستن تعداد شاخص ها می باشد که در مقاله حاضر یک روش برای این موضوع پیشنهاد می گردد.
دربخش ۲ این مقاله به بیان برخی از تعاریف و مدل‌های مورد نیاز می‌پردازیم و دربخش ۳ با افزودن یک شاخص ورودی (خروجی) تاثیر آن را بر مقدار کارایی واحدها بررسی نموده و سپس محدوده ای برای شاخص افزوده شده چنان می یابیم که DMU ناکارای مفروضی کارا گردد. دربخش ۴ برای روشن شدن مطلب مثال هایی آورده می شود.

۲ مفاهیم

n ، DMU با m ورودی و s خروجی را در نظر می‌گیریم که X یک ماتریس ورودی $m\times n$ و Y یک ماتریس خروجی $s\times n$ با عناصر مثبت است.
مجموعه $\{(x,y) \mid$ که توسط $x\geq 0$ تولید می‌شود. $y\geq 0\}$، مجموعه امکان تولید (PPS) نامیده می‌شود.
یک مشاهده (DMU) را کارا می‌گویند اگر و فقط اگر توسط هیچ نقطه‌ای از PPS مغلوب نشود و در غیر این صورت DMU ناکاراست.
مدل CCR بر پایه تکنولوژی بازده با مقیاس ثابت (CRS) توسط چارنز، کوپر و رودز ارایه گردید، بعد از آن بنکر، چارنز و کوپر مدلی را براساس تکنولوژی بازده به مقیاس متغیر (VRS) طراحی کردند که به مدل BCC معروف شد. مجموعه امکان تولید این دو مدل به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$T=\{(x,y) \mid x\lambda \leq x,\ y\lambda \geq y,\ \lambda \in \Lambda\}$$
$$\Lambda_{ccr}=\{\lambda \mid \lambda \geq 0\},\ \Lambda_{BCC}=\{\lambda \mid \lambda =1,\ \lambda \geq 0\}$$

فرم پوششی مدل CCR در ماهیت ورودی به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} &Min\ \theta \\ &s.t. \\ &\quad X\lambda \leq \theta X_p \\ &\quad Y\lambda \geq Y_p \\ &\quad \lambda \in \Lambda \end{aligned} \tag{۱}$$

هنگامی که جواب بهینه یک مساله برنامه ریزی خطی به دست آمد، تغییرات در مساله که معمولا یکی از موارد زیر می باشد، به وسیله تحلیل حساسیت مورد بررسی قرار می گیرد:[2]

تغییر در بردار هزینه: اگر تغییر در ضریب متغیر غیرپایه‌ای در تابع هدف صورت گیرد در جدول بهینه تنها ضریب آن متغیر در سطر تابع هدف تغییر می‌کند، ولی اگر تغییر در یکی از ضرایب متغیرهای پایه‌ای در تابع هدف اعمال گردد در جدول بهینه علاوه بر ضرایب تمام متغیرهای غیراساسی در سطح هدف جدول سیمپلکس، مقدار بهینه نیز تحت تاثیر قرار می‌گیرد.

تغییر در بردار منابع: با تغییر در مقادیر بردار سمت راست جدول سیمپلکس شدنی بودن مساله زیر سوال می‌رود ولی بر بهینگی تاثیری ندارد.

تغییر در ماتریس تکنولوژی: تغییر در ضرایب یک متغیر غیرپایه‌ای بر ضریب آن متغیر در سطر تابع هدف جدول بهینه تاثیر می‌گذارد؛ ولی اگر تغییر در ضرایب یک متغیر پایه‌ای باشد، ماتریس پایه و به دنبال آن جدول بهینه تغییر می‌کند.

افزودن یک فعالیت جدید: با اطلاعات داده $Z_j - C_j$ متناظر با متغیر اضافه شده را محاسبه نموده اگر مقدارآن مثبت باشد (در مساله Min سازی) متغیر جدید وارد پایه می شود و باید تاحصول بهینگی روش سیمپلکس ادامه یابد در غیر این صورت جواب جاری بهینه است و این متغیر با مقدار صفر در جواب بهینه ظاهر می‌شود.

افزودن یک محدودیت جدید: اگر جواب بهینه مساله اصلی در محدودیت اضافه شده صدق کند، این نقطه، جواب بهینه مساله جدید نیز است و در غیر این صورت روش سیمپلکس دوگان را برای یافتن جواب بهینه جدید به کار می‌بریم.

۳ تأثیر افزایش تعداد شاخص ها بر کارایی

با افزایش شاخص ها (افزایش تعداد ورودی ها و خروجی ها) احتمال کارا شدن بیشتر می شود به این ترتیب که با افزوده شدن بر تعداد شاخص ها، در فرم پوششی مدل تعداد قیود افزایش یافته و جواب بهینه مدل بهتر نمی شود پس کارایی بالا می رود.

حال تأثیر افزایش یک شاخص را بر کارایی DMUها بررسی می کنیم.

۳-۱ تأثیر افزودن یک شاخص ورودی بر کارایی

همان طور که گفته شد با افزودن یک شاخص به فرم پوششی مدل یک قید افزوده می شود.

$$\begin{aligned}
\theta'^{*} = Min \quad & \theta \\
s.t. \qquad & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} \le \theta\, x_{ip}, \qquad j = 1,2,...,m, \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{rj} \ge y_{rp}, \qquad r = 1,2,...,s, \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{m+1,j} \le \theta\, x_{m+1,p}, \\
& \lambda \in \Lambda
\end{aligned} \qquad (۲)$$

$$\Lambda_{CCR} = \{ \lambda \mid \lambda \ge 0 \} \text{ , } \Lambda_{BCC} = \{ \lambda \mid 1\lambda = 1 \,\&\, \lambda \ge 0 \}$$

فرض کنیم S ناحیه شدنی مدل CCR (BCC) فرم پوششی قبل از افزودن قید جدید و S' ناحیه شدنی آن بعد از افزودن قید باشد. با افزودن قید یکی از دو حالت زیر اتفاق می افتد:

- $S' = \phi$، در این حالت با توجه به نشدنی بودن مساله، افزودن قید جدید به آن امکان پذیر نمی باشد. که در مدل CCR (۲) این حالت اتفاق نمی افتد، زیرا این مدل با اضافه نمودن هر تعداد قید به عنوان شاخص جدید، شدنی باقی می ماند.
- $S' \neq \phi$، که در این صورت قضایای زیر را داریم:

قضیه ۱ افزودن یک شاخص ورودی بر کارایی DMUهای کارا تأثیری ندارد.

برهان با افزودن یک شاخص داریم: $S' \subseteq S$ پس $\theta'^{*} \not< \theta^{*}$ بنابراین $\theta'^{*} \ge \theta^{*}$.چون DMU تحت ارزیابی (DMU_P) قبل از افزودن شاخص کارا بوده است پس $\theta^{*} = 1$. با توجه به رابطه بالا و این مطلب که بهینه مدل پوششی در بازه [۱و ۰) صدق می کند نتیجه می گیریم که $\theta'^{*} = 1$. پس کارایی DMU_P بعد از افزودن شاخص حفظ می گردد.

اگر B پایه بهینه فرم پوششی مساله قبل از افزودن یک قید باشد پایه و بردار منابع جدید (بعد از افزودن قید) به صورت زیر تعریف می گردد:

$$B_{new} = \begin{bmatrix} B & 0 \\ U & -1 \end{bmatrix} \quad , \quad b_{new} = \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$U = \begin{bmatrix} -x_{m+1,j_1} & . & . & . & -x_{m+1,jk} & 0 & . & . & . & 0 & x_{m+1,p} \end{bmatrix}$$

K تعداد متغیرهای متناظر با λهای پایه ای و صفرهای موجود در ماتریس U متناظر با متغیرهای کمکی مساله در پایه اولیه هستند.

B و B_{new} به ترتیب از مرتبه $m+s$ و $m+s+1$ بوده و U ماتریسی از مرتبه $1.(m+s)$ است. در این صورت $(B_{new})^{-1}$ از رابطه زیر محاسبه می گردد:

$$(B_{new})^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & 0 \\ UB^{-1} & -1 \end{bmatrix}$$

از طرفی:

$$(Z_j - C_j)_{new} = (Z_j)_{new} - C_j = \begin{bmatrix} C_B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B^{-1} & 0 \\ UB^{-1} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_j \\ -x_{m+1,j} \end{bmatrix} - C_j = Z_j - C_j \qquad (۴)$$

به همین ترتیب این رابطه را می توان برای سایر متغیرهای مساله نیز نوشت. پس با توجه به این روابط مشاهده می شود که اضافه کردن محدودیت جدید برای جدول بهین متناظر واحدهای کارا و ناکارا در بهینگی مساله تأثیری ندارد.

بنابراین برای حفظ مقدار کارایی واحدهای ناکارا کافیست شرط شدنی بودن را در جدول بهینه اعمال نماییم.

برای بررسی تأثیر افزودن قید جدید در شدنی بودن به صورت زیر عمل می کنیم:

$$(B^{-1}b)_{new} = \begin{bmatrix} \bar{b} \\ U\bar{b} \end{bmatrix}$$

چون جواب بهینه مساله اولیه شدنی است پس $\bar{b} \geq 0$.

با توجه به مقدار $U\bar{b}$ قضایای زیر بیان می شود:

قضیه۲ اگر بردار X_{m+1} مقدار کارایی DMU_P ناکارا را حفظ نماید آن گاه در رابطه زیر صدق می کند:

$$x_{m+1,p} \geq \frac{\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^* x_{m+1,j}}{\theta^*}$$

برهان با توجه به حفظ مقدار کارایی DMU_P و با فرض ثابت ماندن جدول بهینه کافی است برای شدنی ماندن جواب بعد از افزودن قید جدید داشته باشیم:

$$U\bar{b} \geq 0$$

طبق فرض DMU_P ناکاراست پس $(-X_P , Y_P)$ در پایه موجود نمی باشد. بدون کاستن از کلیت مساله λ_1، λ_2، ...، λ_K را از اعضای پایه اولیه در نظر گرفته و ماتریس U را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$U = \begin{bmatrix} -x_{m+1,j} & 0 \; . \; . \; . \; 0 & x_{m+1,p} \end{bmatrix} \quad , \quad j=1,2,...,k \; , \; j \neq P$$

و داریم:

$$\bar{b} = \begin{bmatrix} \lambda_j^* \\ S_t^* \\ \theta^* \end{bmatrix} \quad , \quad j = 1,2,...,k \;\; \text{و} \;\; j \neq p \;\; \text{و} \;\; t = 1,2,...,m+s-(k+1)$$

پس $U\bar{b}=-\sum_{j=1}^{k}\lambda_j^* x_{m+1,j}+\theta^* x_{m+1,p}\ \geq 0$ بنابراین $x_{m+1,p}\ \geq\ \frac{\sum_{j=1}^{k}\lambda_j^* x_{m+1,j}}{\theta^*}$، با توجه به غیر پایه ای بودن λ_j (j=k+1,…,n) به دست می آید:

$$x_{m+1,p}\ \geq\ \frac{\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^* x_{m+1,j}}{\theta^*}$$

با فرض برقرار نبودن قضیه(۲) برای حفظ مقدار کارایی یک DMU ناکارای مفروض قضیه **۳** را داریم:

قضیه۳ فرض کنیم حکم قضیه **۳** برقرار نباشد. آن گاه اگر مقدار کارایی یک DMU ناکارا در صورت افزودن یک شاخص ورودی ثابت بماند آن گاه روابط زیر برقرار است:

$$1\quad U\bar{b}<0$$
$$2\quad a_{m+1,L}-U\Gamma_L>0$$
$$3\quad \bar{b}+\frac{U\bar{b}}{a_{m+1,L}-U\Gamma_L}\,\Gamma_L\geq 0$$

که $\Gamma_L=B^{-1}a_L$ و متغیر L ام وارد شونده به پایه می باشد.

برهان از آن جایی که قضیه(۲)برقرار نیست پس

$$x_{m+1,p}\ <\ \frac{\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^* x_{m+1,j}}{\theta^*}$$

بنابراین:

$$U\bar{b}<0 \tag{۵}$$

برای آن که مقدار بهینه تابع هدف تغییر نکند باید

$$\exists j\in N.B\qquad Z_j-C_j=0$$

فرض کنیم $Z_L-C_L=0$ متغیر غیر پایه ای L وارد شونده به پایه باشد بنابراین پایه B' به صورت زیر تعریف می گردد:

$$B'=\begin{bmatrix} B & a_L \\ U & a_{m+1,L}\end{bmatrix}$$

وارون این ماتریس از رابطه زیر محاسبه می شود:

$$(B')^{-1}=\begin{bmatrix} B^{-1}+\Gamma_L(a_{m+1,L}-U\Gamma_L)^{-1}UB^{-1} & -\Gamma_L(a_{m+1,L}-U\Gamma_L)^{-1} \\ -(a_{m+1,L}-U\Gamma_L)^{-1}UB^{-1} & (a_{m+1,L}-U\Gamma_L)^{-1}\end{bmatrix}$$

به دلیل عدم تأثیر افزودن قید بر بهینگی مساله، شرط شدنی بودن را اعمال نموده ایم که:

داریم:

$$(B')^{-1} b_{new} = \begin{bmatrix} \bar{b} + \dfrac{U\bar{b}}{a_{m+1,L} - U\Gamma_L}\,\Gamma_L \\ \dfrac{-U\bar{b}}{a_{m+1,L} - U\Gamma_L} \end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$\bar{b} + \frac{U\bar{b}}{a_{m+1,L} - U\Gamma_L}\,\Gamma_L \geq 0 \qquad (۶)$$

$$\frac{-U\bar{b}}{a_{m+1,L} - U\Gamma_L} > 0$$

به دلیل آنکه $U\bar{b} < 0$ است پس در رابطه بالا داریم:

$$a_{m+1,L} - U\Gamma_L > 0 \qquad (۷)$$

شرایط این قضیه را برای تمام متغیرهای غیر پایه ای که مقدارشان در سطر هدف جدول بهینه صفر است،اعمال نموده واجتماع محدوده های به دست آمده، که همان ناحیه مطلوب است را به دست می آوریم.

به طور کلی از اجتماع شروط قضایای ۲ و۳ محدوده ای به دست می آید که اگر مقدار شاخص $(m+1)$ ام در آن باشد مقدار کارایی DMU ناکارای مفروض حفظ می گردد.

۳-۲ تأثیر افزودن یک شاخص خروجی بر کارایی

با افزوده شدن یک شاخص خروجی مساله فرم پوششی به صورت زیر تبدیل می شود:

$$\begin{aligned}
Min \quad & \theta \\
s.t. \quad & -\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} - s_i^- + \theta x_{ip} = 0, \qquad i = 1,2,\dots,m, \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = y_{rp}, \qquad r = 1,2,\dots,s, \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{s+1,j} - s_{s+1}^+ = y_{s+1,p}, \\
& \lambda \in \Lambda,\ s^- \geq 0,\ s^+ \geq 0.
\end{aligned} \qquad (۸)$$

$$\Lambda_{CCR} = \{\, \lambda \mid \lambda \geq 0 \,\}\ ,\ \Lambda_{BCC} = \{ \lambda \mid 1\lambda = 1 \,\&\, \lambda \geq 0 \}$$

فرض کنیم $S' \neq \phi$ باشد. با توجه به اینکه B پایه بهینه مساله اولیه (مساله قبل از افزودن قید جدید) است داریم:

$$B_{new} = \begin{bmatrix} B & 0 \\ U & -1 \end{bmatrix}, \quad b_{new} = \begin{bmatrix} b \\ y_{S+1,p} \end{bmatrix}$$

$$U = \left[\ y_{s+1,j_1}\ \dots\ y_{s+1,j_k}\ \ 0\ \dots\ 0\ \right]$$

k تعداد متغیرهای متناظر با λ های پایه ای و صفرهای موجود در ماتریس U متناظر با متغیرهای کمکی مساله اولیه و θ می باشد.

B و B_{new} به ترتیب از مرتبه $m+s$ و $m+s+1$ بوده و U ماتریس $1.(m+s)$ است.

قضیه ٤ اضافه شدن یک شاخص خروجی بر کارایی یک DMU کارا تأثیری ندارد.

برهان اثبات مشابه برهان قضیه ۱ است.

قضیه ٥ اگر بردار Y_{S+1} مقدار کارایی DMU_P ناکارا را حفظ نماید همواره در رابطه زیر صدق می کند:

$$0 < \; y_{S+1,p} \; \leq \; \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^* \, y_{s+1,j}$$

برهان مشابه اثبات قضیه ۲ داریم:

$$(B^{-1}b)_{new} = \begin{bmatrix} \bar{b} \\ U\,\bar{b} - y_{s+1,p} \end{bmatrix}$$

$$U\,\bar{b} - y_{s+1,P} = \sum_{K=1}^{L} \lambda_k^* \, y_{S+1,k} - y_{S+1,P} \geq 0$$

بنابراین $y_{S+1,P} \leq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^* \, y_{S+1,k}$ و به دلیل غیرپایه‌ای بودن $\lambda_j \; (j=k+1,...,n)$ و شرط $Y \neq 0$ و $Y \geq 0$ داریم:

$$0 < \; y_{S+1,P} \; \leq \; \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^* \, y_{S+1,k}$$

اگر قضیه۵ برقرار نباشد به منظور حفظ مقدار کارایی یک DMU ناکارای مفروض قضیه ٦ بیان می شود:

قضیه٦ اگر حکم قضیه ۵ برقرار نباشد، آن گاه اگر مقدار کارایی DMU_P ناکارا در صورت افزودن یک شاخص خروجی ثابت بماند آن گاه روابط زیر برقرار است:

1. $U\,\bar{b} - y_{S+1,p} < 0$
2. $a_{m+1,L} - U\,\Gamma_L > 0$
3. $\bar{b} + \dfrac{(U\,\bar{b} - y_{s+1,p})\,\Gamma_L}{a_{m+1,L} - U\,\Gamma_L} \geq 0$

که $\Gamma_L = B^{-1} a_L$ و متغیر L ام وارد شونده به پایه می باشد.

برهان مشابه برهان قضیه ۳ داریم:

$$U\bar{b} - y_{S+1,p} < 0 \qquad (۹)$$

$$(B')^{-1} b_{new} = \begin{bmatrix} \bar{b} + \dfrac{(U\bar{b} - y_{S+1,p})\,\Gamma_L}{a_{m+1,L} - U\Gamma_L} \\ \dfrac{-U\bar{b} + y_{S+1,p}}{a_{m+1,L} - U\Gamma_L} \end{bmatrix}$$

بنابراین

$$\bar{b} + \frac{(U\bar{b} - y_{S+1,p})\,\Gamma_L}{a_{m+1,L} - U\Gamma_L} \geq 0 \qquad (۱۰)$$
$$\frac{-U\bar{b} - y_{S+1,p}}{a_{m+1,L} - U\Gamma_L} > 0$$

با توجه به رابطه (۳-۷) و رابطه بالا به دست می آید:

$$a_{m+1,L} - U\Gamma_L > 0 \qquad (۱۱)$$

با برقرار کردن شرایط این قضیه برای هر یک از متغیرهای غیر پایه ای که مقدارشان در سطر هدف جدول بهینه صفر است و اجتماع نواحی به دست آمده،ناحیه مورد نظر برای افزودن شاخص خروجی معین می گردد.

ناحیه برای مقدار شاخص خروجی $(m+1)$ام که مقدار کارایی یک DMU ناکارا را حفظ کند از اجتماع شروط قضایای ۵ و۶ به دست می آید.

۳-۳ افزودن یک شاخص به منظور کارا شدن یک DMU ناکارا

مقدار شاخص $(m+1)$ ام را طوری تعیین می کنیم که DMU_P ناکارا، کارا شده و طبقه بندی کارایی سایر DMUها تغییر نکند.

قضیه۷ هر بردار $X_{m+۱}$ که منجر به کاراشدن DMU_P ناکارا گردد در روابط زیر صدق می کند:

1. $U\bar{b} < ۰$
2. $-x_{m+1,p} - U\Gamma_P > 0$
3. $\left| \dfrac{Z_P - C_P}{-(-x_{m+1,p}, -U\Gamma_{P})} \right| < \left| \dfrac{Z_j - C_j}{-(a_{m+1,P} - U\Gamma_j} \right| \qquad \forall j \in N.B$

برهان شاخص افزوده شده باید طوری باشد که DMU_P ناکارا را کارا نماید بنابراین لازم است مقدار بهینه تغییر یابد و لازمه این تغییر آن است که جواب بهینه قبلی در قید جدید صدق نکند،یعنی:

$U\bar{b} < ۰$

فرض می کنیم λ_P در اولین تکرار بعد از افزودن قید جدیدوارد پایه گردد پس:

$$\frac{Z_P - C_P}{-(-x_{m+1,p} - U\Gamma_P)} = Min\ \{\frac{Z_j - C_j}{-(a_{m+1,p} - U\Gamma_j)} : -(a_{m+1,p} - U\Gamma_j) < 0\ ,\ \forall_j \in N.B\}$$

از رابطه بالا دو شرط زیر به دست می آید:

$$-x_{m+1,p} - U\Gamma_P > 0$$

$$\left| \frac{Z_P - C_P}{-(-x_{m+1,p}, -U\Gamma_{P)}} \right| < \left| \frac{Z_j - C_j}{-(a_{m+1,P} - U\Gamma_j} \right| \qquad \forall j \in N.B$$

با ورود λ_P به پایه و با توجه به روابط (۱) و (۲) شدنی بودن مساله بدیهی است و با اعمال رابطه (۳) بهینگی مساله نیز برقرار می شود.

به دلیل آنکه λ_P با مقدار مثبت در پایه است پس DMU_P یک DMU کارا می باشد.

٤ مثال های عددی

در این قسمت پنج مثال بیان می شود.

مثال٤-۱ پنج DMU_P با دو ورودی و یک خروجی که مختصات آن ها در جدول ۱ آمده است را در نظر می گیریم:

DMU	۱	۲	۳	۴	۵
x_{1j}	۶	۴	۲	۱	۲
x_{2j}	۰/۵	۱	۲	۴	۳
y_{1j}	۱	۱	۱	۱	۱

جدول ۱: داده ها

در ارزیابی با مدل CCR فرم پوششی، DMU_1،...، DMU_4 کارا و DMU_5 ناکارا تشخیص داده شده اند.

از تحت ارزیابی قرار دادن DMU_5 داریم:

$$\theta_5^* = 0.85\ \ ,\ \lambda_3^* = 0.71\ \ ,\ \lambda_4^* = 0.29$$

طبق قضیه ۲ مقدار شاخص ورودی جدید (ورودی سوم) به صورت زیر برای DMU_5 محاسبه می گردد:

$$x_{3,5}\ \geq\ 0x_{3,1} + 0x_{3,2} + 0.83x_{3,3} + 0.33x_{3,4}$$

اگر مقدار شاخص ورودی تعیین شده برای DMU ها در رابطه بالا صدق کند،مقدار کارایی DMU_5 را ثابت و برابر ۰/۸۵ نگه می دارد.

مثال٤-۲ اطلاعات پنج DMU با یک ورودی و یک خروجی در جدول ۲ آمده است:

DMU	۱	۲	۳	۴	۵
x_{1j}	۱	۲	۳	۵	۸
y_{1j}	۱	۲/۵	۴	۶	۲

جدول ۲: داده های مربوط به ۵ واحد تصمیم گیرنده

با ارزیابی DMUها به کمک مدل BCC فرم پوششی، DMU_1،...، DMU_4 کارا و DMU_5 ناکارا می‌باشند.

در ارزیابی DMU_5 ناکارا داریم:

$$\theta^* = 0.2, \;\; \lambda_1^* = 0.67, \;\; \lambda_3^* = 0.33$$

با توجه به اینکه مقدار متناظر با متغیر λ_2 در سطر هدف جدول بهینه برابر صفر می باشد و مساله جواب بهینه دگرین دارد می توان شرایط قضیه (۳) را برای یافتن شاخص ورودی دوم اعمال نمود.

1. $-0.67x_{2,1} - 0.33x_{2,3} + 0.2x_{2,5} < 0$

2. $-x_{2,2} + 0.5x_{2,1} + 0.5x_{2,3} > 0$

3. $\begin{cases} -1.6x_{2,1} - 3.2x_{2,2} + x_{2,5} \geq 0 \\ -6.4x_{2,2} + 1.6x_{2,3} + x_{2,5} \geq 0 \end{cases}$

ناحیه مطلوب برای حفظ مقدار کارایی DMU_5 در صورت افزودن شاخص ورودی از اشتراک روابط (۱)، (۲) و(۳) به دست می آید.

مثال٤-۳ مختصات چهار DMU با دو ورودی و یک خروجی را مطابق جدول ۳ داریم:

DMU	۱	۲	۳	۴
x_{1j}	۱	۴	۲	۵
x_{2j}	۵	۲/۵	۳	۱
y_{1j}	۱	۱	۱	۱

جدول ۳: داده های مربوط به ۴ واحد تصمیم گیرنده

با حل مدل CCR فرم پوششی برای هر یک از DMUها، DMU_1، DMU_3، DMU_4 کارا و DMU_2 ناکارا هستند. برای تعیین مقدار شاخص خروجی دوم برای DMU_2 ناکارا طبق قضیه (۴) داریم:

$$\theta_2^* = 0.83 \quad \text{و} \quad \lambda_3^* = 0.55 \qquad \lambda_4^* = 0.45$$

$$0 < y_{2,2} \leq 0.55y_{2,3} + 0.45y_{2,4}$$

اگر مقدار شاخص خروجی دوم برای DMUها در رابطه بالا صدق کند مقدار کارایی DMU_2 ثابت باقی می‌ماند.

مثال ٤-٤ مختصات مربوط به پنج DMU با دو ورودی و یک خروجی در جدول ۴ آمده است:

DMU	۱	۲	۳	۴	۵
x_{1j}	۱	۲	۴	۶	۳
x_{rj}	۴	۳	۱	۰/۵	۲/۵
y_{1j}	۱	۱	۱	۱	۱

جدول ٤: داده های مربوط به ۵ واحد تصمیم گیرنده

در ارزیابی با مدل CCR فرم پوششی، DMU_1،...، DMU_4 کارا و DMU_5 ناکارا هستند. از تحت ارزیابی قرار دادن DMU_5 اطلاعات زیر به دست می آید:

$$\theta^* = 0.9 \quad , \quad \lambda_1^* = 0.42 \quad , \quad \lambda_3^* = 0.58$$

با توجه به اینکه مقدار متناظر با متغیر λ_2 در سطر هدف جدول بهینه برابر صفر می‌باشد و مساله جواب بهینه دگرین دارد پس با برقراری شرایط قضیه (۵) برای یافتن شاخص خروجی دوم داریم:

1. $0.42y_{2,1} + 0.58y_{2,3} - y_{2,5} < 0$

2. $y_{2,2} - 0.6y_{2,1} - 0.3y_{2,3} > 0$

3. $\begin{cases} 0.42y_{2,2} + 0.22y_{2,3} - 0.6y_{2,5} \geq 0 \\ 0.58y_{2,2} - 0.22y_{2,1} - 0.3y_{2,5} \geq 0 \end{cases}$

ناحیه مطلوب برای حفظ مقدار کارایی DMU_5 در صورت افزودن شاخص خروجی دوم از اشتراک روابط (۱)، (۲) و(۳) به دست می آید.

مثال ٤-٥ سه DMU که مشخصات آن ها در جدول ۵ آمده ، مفروض است:

DMU	۱	۲	۳
x_{1j}	۳/۵	۲	۴
y_{1j}	۴	۲/۵	۵

جدول ٥: داده های مربوط به ۳ واحد تصمیم گیرنده

با حل مدل BCC ، $DMU_۱$ ناکارا، $DMU_۲$ و $DMU_۳$ کارا هستند.با اعمال شرایط قضیه (۶) ناحیه مطلوب به صورت زیر مشخص می شود:

$$S = \left\{ 0.9x_{2,1} - 0.4x_{2,2} - 0.6x_{2,3} < 0, x_{2,1} - 0.4x_{2,2} - 0.6x_{2,3} < 0, 0.22\,x_{2,1} - 0.04x_{2,2} - 0.17x_{2,3} < 0 \right\}$$

به عنوان مثال با داشتن مقادیر شاخص ورودی دوم به صورت زیر، DMU_1 ناکارا، کارا شده و کارایی DMU_2 و DMU_3 حفظ می گردد:

$x_{2,1} = 0.5$ و $x_{2,2} = 2$

۵ نتیجه گیری

تحلیل حساسیت از موضوعاتی است که به دلیل اهمیت آن در مسایل برنامه‌ریزی خطی مورد توجه قرار گرفته و درشاخه‌های مختلف بررسی شده است. در این مقاله یک روش برای تحلیل حساسیت کارایی واحدها ارایه شد و ناحیه پایداری چنان یافتیم که با اضافه کردن یک شاخص جدید به تمام DMU ها کارایی واحدها تغییر نکند، برای ایجاد این ناحیه از روش تحلیل حساسیت $L.P$ استفاده کردیم. برای یافتن این ناحیه نیاز به حل یک مساله برنامه ریزی خطی نیست، فقط با محاسبه ساده می توان روابطی برای ناحیه حرکت ورودی و یا خروجی جدید یافت به طوری که کارایی همه واحدها ثابت باقی بماند. این موضوع می تواند برای مساله تخصیص هزینه و یا درآمد نیز مورد استفاده قرار گیرد. یافتن ناحیه پایداری در حالت افزودن بیش از یک شاخص می تواند موضوع تحقیقات بعدی قرار گیرد.

منابع

[1] R.D. Banker, A. Charnes, W.W. Cooper, Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis, Management Science 30, 1984, 1078-1092.
[2] M. Bazarra, J.Jarvis, H. D.Sherali, Linear Programming and Network Flow, John Wiley and Sons, Inc 1990.
[3] A. Charnes, W.W. Cooper, A.Y. Lewin, R.C. Morey, J.J. Rousseau, Sensitivity and stability analysis in DEA, Annals of Operations Research 2, 1985, 139-156.
[4] A. Charnes, W.W. Cooper, E. Rhodes, Measuring the efficiency of decision making units, European Journal of Operational Research 2, 1978, 429-444.
[5] A. Charnes, S. Haag, P. Jaska, J. Semple, Sensitivity of efficiency calculations in the additive model of data envelopment analysis, International Journal of System Sciences 23, 1992a, 789-798.
[6] A. Charnes, L. Neralic, Sensitivity analysis of the proportionate change of inputs (or outputs) in data envelopment analysis, Glasnik Matematicki 27, 1992b, 393-405.
[7] W.W. Cooper, J.L. Ruiz, I. Sirvent, Choosing weights from alternative optimal solutions of dual multiplier models in DEA, European Journal of Operational Research 180, 2007, 443-458.
[8] G.R. Jahanshahloo, F. Hosseinzadeh Lotfi, N. Shoja, G. Tohidi, S. Razavyan, Sensitivity of efficiency classifications in the inverse DEA models, Applied Mathematics and computation 169, 2005, 905-916.
[9] L.M. Seiford, J. Zhu, Sensitivity analysis of DEA models for simultaneous changes in all the data, Journal of the Operational Research Society 49, 1998a, 1060-1071.
[10] L.M. Seiford, J. Zhu, stability regions for maintaining efficiency in data envelopment analysis, European Journal of Operational Research 108, 1998b, 127-139.
[11] J. Zhu, Robustness of the efficient DMUs in data envelopment analysis, European Journal of Operational Research 90, 1996, 451-460.