مجله ریاضیات کاربردی واحد لاهیجان، سال هفتم، شماره ۱(پیاپی ۲۴)، بهار ۸۹، ص ص ۴۸-۴۱

بهبودی بر مدل FDH در ماهیت ورودی ـ خروجی

سهراب کردرستمی [۱*]، علیرضا امیرتیموری [۲]، سیده فاطمه باقری [۱]

[۱] گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد لاهیجان

[۲] گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد رشت

چکیده

در تحلیل پوششی داده ها برای هر واحد ناکارا یک نقطه مرجع روی مرز کارائی پیدا می شود به گونه ای که واحد تحت ارزیابی با کم کردن ورودی ها و افزودن خروجی هایش به نقطه مرجعی روی مرز می رسد. واحد مرجع برای هر واحد ناکارا، ترکیبی از واحدهای کارای موجود است که در واقعیت وجود عینی ندارد و تصنعی و خیالی است. در مدل های FDH این مشکل بر طرف می شود و مراجع واحدهای موجود هستند. در این مطالعه مدلی بر اساس مدل FDH ارایه می شود که در آن واحد مرجع برای هر DMU ناکارا، تنها شامل یکی از واحدهای موجود می باشد. این مدل غیرشعاعی، قابل تبدیل به فرم خطی می باشد و مستقیماً با حل یک مساله برنامه ریزی صحیح مختلط می توان نقطه تصویر را برای هر واحد ناکارا روی مرز کارارا به دست آورد. همچنین یکی از مزایای این مدل نسبت به مدل FDH این است که بطور همزمان در هر دو ماهیت ورودی و خروجی ارایه می شود.

کلمات کلیدی: تحلیل پوششی داده ها، FDH، کارایی.

۱ مقدمه

اندازه گیری کارایی تکنیکی نخستین بار با کارهای دبرو ۱۹۵۱ و کوپمنز ۱۹۵۱ شروع شد. به دنبال آن، فارل ۱۹۵۷ اندازه ی کارای تکنیکی را معرفی کرد. پس از آن چارنز، کوپر و رودز ۱۹۷۸ دیدگاه فارل را توسعه داده و مدل CCR را مطرح نمودند. مدل های FDH برای کامل کردن مدل های تحلیل پوششی داده ها در سال ۱۹۸۴ توسط دیپرین، سیمار و تولکنز ارایه شدند. با توجه به اینکه مدل های تحلیل پوششی داده ها شرط تحدب دارند مدل های FDH بدون شرط تحدب عمل می کنند. لذا در تکنولوژی FDH مساله از طریق برنامه ریزی صحیح مختلط حل می شود. ویژگی جذاب مدل FDH این است که واحد مرجع برای هر DMU ناکارا، تنها شامل یکی از واحد های موجود باشد که مجموعه مرجع آن، در بسیاری از موارد با مسائل حقیقی زندگی بیشتر سازگاری

* عهده دار مکاتبات

آدرس الکترونیکی: *krostami@guilan.ac.ir*

این مدل تنها در ماهیت ورودی و یا خروجی ارایه شده است.در این مطالعه مدلی مطرح می شود که واحد ناکارا را در هر دو ماهیت ورودی و خروجی روی مرز تصویر می کند. یعنی هر واحد ناکارا به طور همزمان می تواند با کاهش ورودی ها و افزایش خروجی هایش به مرز کارائی برسد و مستقیماً با حل یک مساله برنامه ریزی صحیح مختلط، نقطه تصویر هر واحد ناکارا روی مرز کارا به دست می آید.

این مطالعه به صورت زیر سازمان دهی شده است:

در بخش ۲ مروری بر مدل های CCR و FDH انجام می گیرد. مدل پیشنهادی در بخش ۳ مطرح می شود. در بخش ۴ یک مثال عددی ارایه می شود و در بخش ۵ نتیجه گیری مطرح می گردد.

۲ مروری بر مدل های CCR و FDH

شکل مجموعه امکان تولید می تواند در تعیین مدلی که می خواهیم از آن استفاده کنیم نقش مهمی داشته باشد. مرز مجموعه امکان تولید، تقریبی از تابع تولید در نظر گرفته می شود. با پذیرفتن اصول موضوعه که شامل اصل شمول مشاهدات، بی کرانی اشعه، امکان پذیری، اصل تحدب و اصل کمینه برونیابی است، مجموعه امکان تولید با بازده به مقیاس ثابت به صورت زیر تعریف می شود:

$$P_c = \{(x,y) \mid \ x \geq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \quad , \quad y \leq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j \quad , \quad \lambda_j \geq 0\}$$

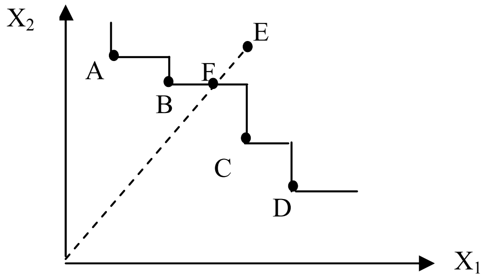
که در آن x یک بردار m تایی، y یک بردار s تایی، $x_j = (x_{1j},...,x_{mj})$ بردار ناصفر ورودی ها و $y_j = (y_{1j},...,y_{sj})$ بردار ناصفر خروجی ها است. مدل CCR با بازده ثابت به صورت زیر می باشد:

$$\begin{aligned}
Min \quad & \theta - \varepsilon(\sum_{r=1}^{s} s_r^+ + \sum_{i=1}^{m} s_i^-) \\
s.t. \quad & \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} + s_i^- = \theta x_{i0}, \quad i=1,...,m, \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = y_{r0}, \quad r=1,...,s, \\
& \lambda_j, s_i^-, s_r^+ \geq 0, \qquad for\ all\ i, j, r.
\end{aligned} \tag{۱}$$

که در آن $\varepsilon > 0$ یک کمیت به اندازه کافی کوچک است. انگیزه ی اصلی از به وجود آمدن مدل FDH (مدل پله ای) اینست که مطمئن شویم میزان کارایی تنها بر اساس مشاهدات واقعی به دست آمده است زیرا در بعضی از مسایل، ترکیب محدب واحدها معنا ندارد مانند وقتی که می خواهیم کارایی موتور ماشین های مختلف را محاسبه کنیم. اختلاف CCR با FDH در آنست که تکنولوژی FDH خودش را به تکنولوژی تحدب محدود نمی کند این جهت گیری FDH جذاب به نظر می رسد زیرا یافتن یک توجیه برای اینکه شرط تحدب در مجموعه های امکان تولید قرار بگیرد مشکل است و کار راحت تر آن است که شرط تحدب حذف

شود پس هر کدام از واحدها در تشکیل واحد مجازی یا باید شرکت کنند یا شرکت نکنند یعنی λ_j (سهم مشارکت هر یک از واحدها) یا باید یک شود یا صفر. به عبارت دیگر $\lambda_j \in \{0 \text{ و } 1\}$.

شکل ۱ مثالی از مدل FDH برای پنج واحد تصمیم گیرنده با استفاده از دو ورودی و یک خروجی را نشان می دهد.



شکل ۱: مجموعه امکان تولید مدل FDH

با قبول اصول موضوعه به غیر از اصل تحدب مجموعه امکان تولید مدل FDH به صورت زیر تعریف می شود:

$$P_{FDH} = \{(x, y) \;\; | \;\; x \geq x_j \;\; , \;\; y \leq y_j \;\;\; x, y \geq 0 \; , \; j = 1, \ldots, n\}$$

که $\{x_j \geq 0 \; , \; y \leq y_j \quad j = 1, \ldots, n\}$ جزء مشاهدات واقعی هستند به عبارت دیگر یک نقطه عضوی از مجموعه امکان تولید است اگر مختصات همه ورودی ها حداقل به بزرگی x_j نظیر آن باشد برای $j = 1$، ...، n و مختصات خروجی ها نا بیشتر از بردارهای y_j نظیر مشاهدات واقعی باشد.

در واقع این مساله می تواند به فرم برنامه ریزی صحیح مختلط زیر فرمول بندی شود:

$$\begin{array}{ll} Min & \theta \\ s.t. & x\lambda \leq \theta x_0 \\ & y\lambda \geq y_0 \\ & 1\lambda = 1 \qquad \lambda_j \in \{0,1\} \end{array} \qquad (۲)$$

که در آن λ ها متغیرهای دودویی هستند و θ متغیری آزاد و پیوسته است.

مساله مدل ۲ تنها در ماهیت ورودی ارایه شده است. در ادامه مدلی مطرح می شود که بطور همزمان در هر دو ماهیت ورودی و خروجی ارایه شده است که یک امتیاز نسبت به مدل FDH است.

۳ مدل پیشنهادی

این مدل به طور همزمان ورودی ها را کاهش و خروجی ها را افزایش می دهد، بنابراین تابع هدف به صورت ترکیب فاکتورهای انقباض ورودی، $\sum_{i=1}^{m}\theta_i$ و فاکتورهای انبساط خروجی، $\sum_{r=1}^{s}\phi_r$ در یک روش جمعی مطرح می شود که یک امتیاز نسبت به مدل FDH است. برای ارزیابی $DMU_0:(x_0,y_0)$ مقدار این اندازه از فرمول بندی زیر به دست می آید:

$$
\begin{aligned}
& Min \quad z=\frac{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\theta_i}{\frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s}\phi_r} \\
& s.t. \\
& \qquad \sum_{j=1}^{n}\lambda_j y_{rj}=\phi_r y_{ro}\,, \quad r=1,\ldots,s \\
& \qquad \sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_{ij}=\theta_i x_{io}\,, \quad i=1,\ldots,m \\
& \qquad \sum_{j=1}^{n}\lambda_j=1 \\
& \qquad \theta_i\le 1 \qquad\qquad i=1,\ldots,m \\
& \qquad \phi_r\ge 1 \qquad\qquad r=1,\ldots,s \\
& \qquad \lambda_j\in\{0,1\} \\
& \qquad \theta_i\ge 0
\end{aligned}
\tag{۳}
$$

برای خطی کردن مدل بالا از تبدیلات چارنز و کوپر (۱۹۷۶) استفاده می کنیم. با تغییر متغیر $\frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s}\phi_r=\frac{1}{\rho}$ که ρ یک اسکالر مثبت است مساله به صورت زیر تغییر می یابد.

$$
\begin{aligned}
Min \quad & z=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\rho\theta_i \\
s.t. \quad & \\
& \sum_{r=1}^{s}\rho\phi_r=1, \\
& \sum_{j=1}^{n}\rho\lambda_j x_{ij}=\rho\theta_i x_{io}, \quad i=1,\dots,m, \\
& \sum_{j=1}^{n}\rho\lambda_j y_{rj}=\rho\phi_r y_{ro}, \quad r=1,\dots,s, \\
& \sum_{j=1}^{n}\rho\lambda_j=\rho, \\
& \rho\theta_i\le\rho, \quad i=1,\dots,m, \\
& \rho\phi_r\ge\rho, \quad r=1,\dots,s, \\
& \lambda_j\in\{0,1\}.
\end{aligned}
\tag{۴}
$$

حال تعریف می کنیم $\bar{\lambda}_j=\rho\lambda_j$, $\bar{\theta}_i=\rho\theta_i$, $\bar{\phi}_r=\rho\phi_r$. با تعریف $\bar{\lambda}_j=\rho\lambda_j$ و از آنجایی که $\lambda_j\in\{0,1\}$ است دو حالت وجود دارد.

۱ـ اگر $\lambda_j=0$ باشد آن گاه $\bar{\lambda}_j=0$. ۲ـ اگر $\lambda_j=1$ باشد آن گاه $\bar{\lambda}_j=\rho$.

بنابراین می توان دو محدودیت $\bar{\lambda}_j\le\rho\le\bar{\lambda}_j+M(1-\lambda_j),\ 0\le\bar{\lambda}j\le M\lambda_j$ را به مساله افزود تا شرایط بالا برقرار گردد. درنتیجه این مدل به صورت زیر فرمول بندی می شود:

$$
\begin{aligned}
Min \quad & z=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\bar{\theta}_i \\
s.t. \quad & \frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s}\bar{\phi}_r=1, \\
& \sum_{j=1}^{n}\bar{\lambda}_j x_{ij}=\bar{\theta}_i x_{io}, && i=1,\dots,m, \\
& \sum_{j=1}^{n}\bar{\lambda}_j y_{rj}=\bar{\phi}_r y_{ro}, && r=1,\dots,s, \\
& \sum_{j=1}^{n}\bar{\lambda}_j=\rho, && j=1,\dots,n, \\
& \bar{\lambda}j\le M\lambda_j, && j=1,\dots,n, \\
& \bar{\lambda}_j\le\rho\le\bar{\lambda}_j+M(1-\lambda_j), && j=1,\dots,n,
\end{aligned}
\tag{۵}
$$

$$\bar{\theta}_i \le \rho, \qquad i = 1,\dots,m,$$
$$\bar{\phi}_r \ge \rho, \qquad r = 1,\dots,s,$$
$$\lambda_j \in \{0,1\}, \quad \bar{\theta}_i \ge 0\,, \quad \bar{\phi}_r \ge 0.$$

با حل این مدل مستقیماً نقطه تصویر هر واحد ناکاراروی مرز کارا به دست می آید. حال ثابت می کنیم که مدل پیشنهادی همواره جواب شدنی دارد و هیچ گاه بیکران نیست.

قضیه ۱-۳ مدل پیشنهادی همواره جواب شدنی دارد.

برهان کافی است یک جواب برای مساله پیدا کنیم که در تمام قیود مدل پیشنهادی صدق کند مجموعه جواب $(\theta_i = 1, \phi_r = 1\,, \lambda_\rho = 1\,, \lambda_j = 0\ (j = 1,\dots,n\,,\ j \ne \rho)$ در تمام قیود صدق می کند بنابراین مدل پیشنهادی همواره جواب شدنی دارد همچنین $(\bar{\theta}_i = \rho, \bar{\phi}_r = \rho\,, \bar{\lambda}_\rho = \rho\,, \bar{\lambda}_j = 0(j = 1,\dots,n))$ یک جواب شدنی برای مساله برنامه ریزی خطی این مدل می باشد.

قضیه ۲-۳ مدل پیشنهادی هیچگاه بیکران نیست.

برهان در مساله می نیمم سازی شرط بیکران بودن مساله این است که $cd < 0$ باشد همچنین در مساله ماکزیمم سازی شرط بیکرانی مساله، $cd \rangle 0$ است. پس چون مدل پیشنهادی ما از نوع می نیمم سازی است کافی است ثابت کنیم که $cd < 0$ برقرار نیست. در نظر می گیریم:

$$\begin{cases} c = (0,\dots,0,1,0,\dots,0) \ge 0 \\ d = (d_1,\dots,d_i,\dots,d_m) \ge 0 \end{cases} \rightarrow \quad cd \ge 0$$

بنابراین مدل پیشنهادی هیچ گاه بیکران نیست.

٤ مثال عددی

جدول۱، داده های کتابخانه عمومی در ۲۳ ناحیه از توکیو در سال ۱۹۸۶ را نشان می دهد برای بررسی کارایی واحدها و مجموعه مرجع نظیر واحدهای ناکارا، ورودی ها و خروجی های زیر را در نظر می گیریم. ورودی ها عبارتند از:

۱ـ مساحت کتابخانه ($100\ m_2$ = واحد)

۲ـ تعداد کتاب (۱۰۰۰ = واحد)

۳ـ کارمندان (۱۰۰۰ = واحد)

خروجی ها عبارتند از:

۱ـ جمعیت ناحیه (۱۰۰۰ = واحد)

۲ـ تعداد کتاب های ثبت شده (۱۰۰۰ = واحد)

۳ـ تعداد کتاب های قرض داده شده (۱۰۰۰ = واحد)

در جدول۲ ، اندازه کارایی و مجموعه مرجع هر یک از کتابخانه های عمومی با استفاده از مدل پیشنهادی، FDH و مدل CCR نشان داده شده است.

خروجی ها			ورودی ها			
قرض داده	ثبت شده	جمعیت ناحیه	تعداد کارمندان	تعداد کتاب ها	مساحت کتابخانه	تعداد کتابخانه
۱۰۵/۳۲۱	۵/۵۶۱	۴۹/۱۹۶	۲۶	۱۶۳/۵۲۳	۲/۲۴۹	۱
۳۱۴/۶۸۲	۱۸/۱۰۶	۷۸/۵۹۹	۳۰	۳۳۸/۶۷۱	۴/۶۱۷	۲
۵۴۲/۳۴۹	۱۶/۴۹۸	۱۷۶/۳۸۱	۵۱	۲۸۱/۶۶۵	۳/۸۷۳	۳
۸۴۷/۸۷۲	۳۰/۸۱۰	۱۸۹/۳۹۷	۷۸	۴۰۰/۹۹۳	۵/۵۴۱	٤
۷۵۸/۷۰۴	۵۷/۲۷۹	۱۹۲/۲۳۵	۶۹	۳۶۳/۱۱۶	۱۱/۳۸۱	٥
۱۴۳۸/۷۴۶	۶۶/۱۳۷	۱۹۴/۰۹۱	۱۱۴	۵۴۱/۶۵۸	۱۰/۰۸۶	٦
۸۳۹/۵۹۷	۳۵/۲۹۵	۲۲۸/۵۳۵	۶۱	۵۰۸/۱۴۱	۵/۴۳۴	۷
۵۴۰/۸۲۱	۳۳/۱۸۸	۲۳۸/۶۹۱	۷۴	۳۳۸/۸۰۴	۷/۵۲۴	۸
۱۵۶۲/۲۷۴	۶۵/۳۹۱	۲۶۷/۳۸۵	۸۴	۵۱۱/۴۶۷	۵/۰۷۷	۹
۹۷۸/۱۱۷	۴۱/۱۹۷	۲۷۷/۴۰۲	۶۸	۳۹۳/۸۱۵	۷/۰۲۹	۱۰
۹۳۰/۴۳۷	۴۷/۰۳۲	۳۳۰/۶۰۹	۹۶	۵۰۹/۶۸۲	۱۱/۱۲۱	۱۱
۱۳۴۵/۱۸۵	۵۶/۰۶۴	۳۳۲/۶۰۹	۹۲	۵۲۷/۴۵۷	۷/۰۷۲	۱۲
۱۱۶۴/۸۰۱	۶۹/۵۳۶	۳۵۶/۵۰۴	۱۲۷	۶۰۱/۵۹۴	۹/۳۴۸	۱۳
۱۳۴۸/۵۸۸	۳۷/۴۶۷	۳۶۵/۸۴۴	۹۶	۵۲۸/۷۹۹	۷/۷۸۱	١٤
۱۱۰۰/۷۷۹	۵۷/۷۲۷	۳۸۹/۸۹۴	۷۷	۵۹۴/۱۵۸	۶/۲۳۵	١٥
۱۰۷۰/۴۸۸	۴۶/۱۶۰	۴۱۷/۵۱۳	۱۰۱	۵۱۵/۶۲۴	۱۰/۵۹۳	١٦
۱۷۰۷/۶۴۵	۱۰۲/۹۶۷	۵۰۳/۹۱۴	۱۱۸	۵۶۶/۷۰۸	۱۰/۸۶۶	۱۷
۱۲۲۳/۰۲۶	۴۷/۲۳۶	۵۱۷/۳۱۸	۷۴	۴۶۷/۶۱۷	۶/۵۰۰	۱۸
۲۲۹۹/۶۹۴	۸۴/۵۱۰	۵۳۷/۷۴۶	۱۰۳	۷۶۸/۴۸۴	۱۱/۴۶۹	۱۹
۱۹۰۱//۴۶۵	۶۹/۵۷۶	۵۹۰/۶۰۱	۱۰۷	۶۶۹/۹۹۶	۱۰/۸۶۸	۲۰
۱۹۰۹/۶۹۸	۸۹/۴۰۱	۶۲۲/۵۵۰	۱۲۰	۸۴۴/۹۴۹	۱۰/۷۱۷	۲۱
۳۰۵۵/۱۹۳	۹۷/۹۴۱	۶۶۰/۱۶۴	۲۴۲	۱۲۵۸/۹۸۱	۱۹/۷۱۶	۲۲
۴۰۹۶/۳۰۰	۱۹۱/۱۶۶	۸۰۸/۳۶۹	۲۰۲	۱۱۴۸/۸۶۳	۱۰/۸۸۸	۲۳

جدول ۱: داده های کتابخانه عمومی

مجموعه مرجع مدل CCR	کارایی مدل CCR	مجموعه مرجع FDHمدل	کارایی مدل FDH	مجموعه مرجع مدل پیشنهادی	کارایی مدل پیشنهادی	واحدها
{۲۳و۱۹}	۰/۵۸۸۸	۱	۱	۱	۱	۱
{۲۳و۱۸}	۰/۶۴۲۹	۲	۱	۲	۱	۲
{۲۳و۱۸}	۰/۶۵۱۲	۳	۱	۳	۱	۳
{۲۳و۱۸}	۰/۶۱۷۹	۴	۱	۴	۱	۴
{۲۳و۱۷}	۰/۹۱۱۳	۵	۱	۵	۱	۵
{۲۳}	۰/۷۴۵۰	۶	۱	۶	۱	۶
{۲۳و۱۹و۱۸}	۰/۷۱۰۰	۷	۱	۷	۱	۷
{۱۸و۱۷}	۰/۷۰۲۵	۸	۱	۸	۱	۸
{۲۳و۱۹}	۰/۹۰۶۷	۹	۱	۹	۱	۹
{۱۸و۱۷}	۰/۷۹۳۳	۱۰	1	۱۰	۱	۱۰
{۲۳و۱۸}	۰/۶۵۰۹	۱۸	۰/۹۱۷۵	۱۸	۰/۵۸۵۲	۱۱
{۲۳و۱۸و۱۷}	۰/۷۷۲۸	12	۱	12	۱	۱۲
{۲۳و۱۸}	۰/۶۹۰۹	13	۱	13	۱	۱۳
{۲۳و۱۸}	۰/۸۰۰۴	14	۱	14	۱	۱۴
{۲۳و۱۸و۱۷}	۰/۹۳۵۸	15	۱	15	۱	۱۵
{۲۳و۱۸و۱۷}	۰/۷۶۵۸	۱۸	۰/۹۰۶۹	۱۸	۰/۶۶۱۸	۱۶
17	۱	17	۱	17	۱	۱۷
18	۱	18	۱	18	۱	۱۸
19	۱	19	۱	19	۱	۱۹
{۲۳و۱۹و۱۸}	۰/۹۵۸۱	20	۱	20	۱	۲۰
{۲۳و۱۸}	۰/۹۴۱۸	21	۱	21	۱	۲۱
{۲۳و۱۸}	۰/۷۰۱۱	۲۳	۰/۹۱۲۵	۲۳	۰/۵۰۹۱	۲۲
23	۱	23	۱	23	۱	۲۳

جدول ۲: اندازه کارایی و مجموعه مرجع مدل ها

با توجه به نتایج به دست آمده از جدول۲، واحدهای ۱۱ و ۱۶ و ۲۲ تحت مدل پیشنهادی ناکارا شدند. مشاهده می شود که همین واحدها نیز تحت مدل FDH ناکارا هستند اما در مدل CCR، تنها واحدهای ۱۷ ، ۱۸ ، ۱۹ و ۲۳ کارا هستند. همچنین مجموعه مرجع برای این واحدهای ناکارا در مدل پیشنهادی تنها یکی از واحدهای موجود است و این در حالی است که در مدل CCR مجموعه مرجع برای واحدهای ناکارا، ترکیبی از واحدهای کارای موجود می باشد. به عنوان مثال واحد ۱۶ را در نظر بگیرید. مجموعه مرجع این واحد تحت مدل پیشنهادی و مدل FDH تنها شامل واحد ۱۸ است. یعنی نقطه مرجع آن تنها شامل یک واحد می باشد ولی مجموعه مرجع واحد ۱۶ تحت مدل CCR شامل واحدهای ۱۷، ۱۸ و ۲۳ است که نشان دهنده آنست که نقطه مرجع برای این واحد توسط مدل CCR ترکیبی از واحدهای ۱۷، ۱۸ و ۲۳ می باشد که در این صورت DMU مرجع بر آن غیر واقعی است. میزان کارایی این واحد در هر سه مدل نشان داده شده است. همچنین در مدل CCR واحد ۱۸، به تعداد چهارده مرتبه مرجع شده و این در حالی ست که در FDH و مدل پیشنهادی واحد ۱۸، سه مرتبه مرجع شده است.

۵ نتیجه گیری

اندازه گیری کارایی تکنیکی نخستین بار با کار دبرو وکوپمنز در سال ۱۹۵۱ شروع شد. مدل های FDH برای کامل کردن مدل های تحلیل پوششی داده ها در سال ۱۹۸۴ توسط دیپرین و همکارانش ارایه شد. با توجه به اینکه مدل های تحلیل پوششی شرط تحدب دارند. مدل های FDH بدون شرط تحدب عمل می کنند لذا از طریق برنامه ریزی صحیح مختلط حل می شود. همچنین واحد مرجع برای هر واحد ناکارا، تنها شامل یکی از واحد های موجود است بر این اساس، مدلی در این مطالعه ارایه شده، که همواره دارای جواب شدنی است و هیچ گاه بیکران نیست. یکی از امتیازات این مدل نسبت به FDH این است که این مدل در هر دو ماهیت ورودی و خروجی به طور همزمان ارایه می شود. که مستقیماً با حل یک مساله برنامه ریزی صحیح مختلط تصویر هر واحد ناکارا روی مرز کارا به دست می آید.

منابع

[1] Silva M. C. A., Castro P. and Thanassoulis E. Finding closest targets in non-oriented DEA models: the case of convex and non-convex technologies. Journal of Productivity Analysis, 2003, 19:251-269.
[2] Thrall R. M., what is the economic meaning of FDH? Journal of productivity Analysis, 11, 1999, pp.243-250.
[3] Charnes A., W.W. Cooper, and E. Rhodes, Measuring the Efficiency of Decision making Units. European Journal of Operational Research 2, 1978, 429-444.
[4] Deprins D, Simar L, Tullkens H, Measuring labor-efficiency in post officies. In Marchand M, Pestieau p, Tullkens H, editors. The performance of public enterprises. Amsterdam: Etsvier science publishers: 1984, 243-267.
[5] Podinovski V. V., On the linearisation of reference technologies for testing returns to scale in FDH models. European journal of operational Research, 152, 2004, 800-802.