مجله ریاضیات کاربردی واحد لاهیجان، سال هفتم، شماره ۲ (پیاپی ۲۵)، تابستان ۸۹، ص ص ۹۰-۷۹
شاپا ۶۰۸۳-۲۰۰۸

یک روش برای حل دستگاه معادلات خطی منفرد

محرم نیکوئی*[1]، میر کمال میرنیا[2]
[1]عضو باشگاه پژوهشگران جوان، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد تبریز
[2]گروه ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد تبریز

رسید مقاله: ۸۸/۱۲/۱
پذیرش مقاله: ۸۹/۵/۱

چکیده
در این مقاله، حل دستگاه معادلات خطی منفرد $n\times n$ مورد بررسی قرار گرفته است. ما نشان داده‌ایم هر دستگاه معادلات خطی منفرد با یک دستگاه معادلات خطی فرومعین هم ارز است. با ارایه مثال های عددی، نیز نشان داده شده است که جواب مینیمال به دست آمده برای دستگاه معادلات خطی فرومعین در دستگاه معادلات خطی منفرد هم ارز با آن نیز صدق می کند.

کلمات کلیدی: دستگاه معادلات منفرد، دستگاه معادلات فرومعین، شاخص، معکوس درازین، دستگاه های هم ارز.

۱ مقدمه
دستگاه معادلات خطی در علوم مختلف مهندسی و اجتماعی کاربردهای فراوانی دارد. حل عددی بیشتر مسایل محاسباتی در علوم ومهندسی منجر به حل دستگاه معادلات خطی منفرد می‌شود که از آن جمله می‌توان به معادله Navier-Stokes در مهندسی سیالات و Markov chain modelling در متغیرهای تصادفی اشاره کرد[4,6].

جالب است بدانید، برای هر ماتریس $A\in C^{n\times n}$، حتی ماتریس های منفرد، معکوس منحصر بفردی به نام معکوس درازین وجود دارد. در سال های اخیر، جواب دستگاه معادلات خطی منفرد را با معکوس درازین به دست می‌آورند. در [6] یک الگوریتم دو مرحله‌ای برای به دست آوردن معکوس درازین در حل دستگاه معادلات خطی منفرد با شاخص یک ارایه شده است. همچنین روش کرامر برای یافتن معکوس درازین را در [5] ببینید. در این مقاله، ما برای به دست آوردن معکوس درازین از قضیه‌ای که مربوط به موجود و منحصر بفرد بودن آن برای هر ماتریس دلخواه است استفاده می کنیم.

*عهده دار مکاتبات
آدرس الکترونیکی: *nikuie_m@yahoo.com*

یک دستگاه معادلات خطی منفرد سازگار دارای بی شمار جواب است. تاکنون روش های متعددی برای حل دستگاه معادلات خطی منفرد ارایه شده است[2,4,6]. مجموعه جواب ها یک دستگاه معادلات خطی فرومعین نیز نامتناهی است. با این حال یک دستگاه معادلات خطی فرومعین دارای یک جواب منحصر بفرد بنام جواب مینیمال است. در صورتی که یک دستگاه فرومعین دارای رتبه کامل سطری باشد، جواب مینیمال آن را با شبه‌معکوس به دست می‌آورند. این جواب دارای کمترین نرم اقلیدسی است[2].

هدف ما از نگارش این مقاله، معرفی معکوس درازین، اشاره به تفاوت آن با شبه‌معکوس و بیان کاربرد آن ها در حل دستگاه معادلات خطی است. همچنین جواب به دست آمده برای دستگاه معادلات خطی منفرد با معکوس درازین را با جواب به دست آمده با شبه‌معکوس برای دستگاه معادلات خطی فرومعین هم ارز با آن، مقایسه نموده‌ایم.

بخش بعدی این مقاله شامل تعاریف و قضایای مقدماتی درباره دستگاه معادلات خطی است. چند تعریف و قضیه درباره دستگاه معادلات خطی فرومعین و دستگاه های معادلات خطی هم ارز نیز ارایه شده است. مهمترین آن ها قضیه‌ای درباره دستگاه معادلات خطی منفرد ناسازگار است. در سومین بخش به نقش معکوس درازین و شبه معکوس در حل دستگاه معادلات خطی اشاره شده و یک روش برای به دست آوردن جواب مینیمال در دستگاه معادلات خطی منفرد ارایه شده‌است. همچنین در این بخش با طرح چند سوال و پاسخگویی به آن ها به شرح روش جدید پرداخته‌ایم. سه مثال عددی برای بررسی درستی مباحث ارایه شده در بخش‌های قبلی در بخش ۴ ارایه شده است.

۲ تعاریف اولیه و قضایای مقدماتی

تعریف۱ ماتریس $A \in C^{n\times n}$ را در نظر بگیرید. گوییم عدد صحیح نامنفی k شاخص ماتریس A است و با $ind(A)$ نمایش می‌دهیم، اگر k کوچکترین عدد صحیح نامنفی باشد به طوریکه

$$rank\left(A^{k+1}\right)=rank\left(A^{k}\right). \qquad (۱)$$

که معادل با اینکه شاخص ماتریس اندازه بزرگترین بلوک ژوردان متناظر با مقدار ویژه صفر ماتریس A است[7].

برای هر ماتریس $A \in C^{n\times n}$ شاخص ماتریس موجود و منحصر بفرد است[8]. برای آشنایی بیشتر با شاخص ماتریس و نحوه‌ی به دست آوردن شاخص هر ماتریس دلخواه به [8] مراجعه نمائید. در بخش چهارم، نحوه‌ی به دست آوردن شاخص ماتریس شرح داده شده‌است.

قضیه ۱ [8] ماتریس $A \in C^{n\times n}$ را در نظر بگیرید. داریم $0 \le ind(A) \le n$.

تعریف۲ [7] ماتریس $A \in C^{n\times n}$ را بطوریکه $ind(A)=k$ در نظر بگیرید. ماتریس X معکوس درازین ماتریس A با A^D نمایش داده می‌شود، هرگاه X در روابط زیر صدق می کند

$$AX = XA, \quad XAX = X, \quad A^k XA = A^k. \qquad (۲)$$

اگر $ind(A)=1$ باشد، A^D معکوس گروه ماتریس A نامیده می‌شود و با A_g نمایش داده می‌شود. اگر $ind(A)=0$ باشد A یک ماتریس نامنفرد است و A^D معکوس ماتریس A نامیده می‌شود و با A^{-1}

نمایش داده می‌شود[8]. با توجه به قضیه‌ی زیر برای هر ماتریس دلخواه $A \in C^{n\times n}$ معکوس درازین A^D موجود و منحصر بفرد است.

تاکنون برای به دست آوردن معکوس درازین یک ماتریس روش های متعددی ارایه شده‌است. اکثر این روش ها درباره ماتریس های بلوکی است. یک الگوریتم در [7] برای به دست آوردن معکوس درازین ارایه شده‌است که از جامعیت لازم برای به دست آوردن معکوس درازین تمام ماتریس های منفرد برخوردار نیست. در زیر قضیه‌ای ارایه شده‌است که ضمن اینکه بیانگر وجود و منحصر بفرد بودن معکوس درازین برای همه ماتریس های منفرد است یک روش جامع برای به دست آوردن معکوس درازین ماتریس های منفرد است. در بخش چهارم، نحوه‌ی به دست آوردن معکوس درازین شرح داده شده‌است.

قضیه۲ برای هر ماتریس دلخواه $A \in C^{n\times n}$، اگر $ind(A)=k$ و $rank(A^k)=r$ و فرم نرمال ژوردان ماتریس A بفرم زیر باشد

$$A = P\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}P^{-1}$$

که در آن D یک ماتریس مربع از مرتبه r است و $N^k = 0$ است. آنگاه معکوس درازین ماتریس A بفرم زیر است

$$A^D = P\begin{pmatrix} D^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1} .$$

اثبات. [7] را ببینید.

برای به دست آوردن فرم نرمال ژوردان یک ماتریس باید مقادیر ویژه، عدد آن ها و حداکثر تعداد بردارهای ویژه مستقل خطی متناظر با مقادیر ویژه را به دست آورد. و آن را بفرم $\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}$ نوشت. برای مطالعه بیشتر به [8] مراجعه نمائید.

تعریف ۳ [2] دستگاه معادلات خطی $Ax = b$ را در نظر بگیرید. که در آن A یک ماتریس $m\times n$، x یک بردار $n\times 1$ و b یک بردار $m\times 1$ می‌باشد. اگر $m<n$ باشد، در این صورت دستگاه فوق را فرومعین می‌گویند.

تعریف ٤ [2] ماتریس $A^+ = A^T\left(AA^T\right)^{-1}$، شبه معکوس ماتریس A نامیده می‌شود در صورتی که A یک ماتریس $m\times n$ $(m<n)$ با رتبه m باشد. شبه معکوس ماتریس A را معمولا با A^+ نمایش می‌دهند.

قضیه ۳ فرض کنید دستگاه معادلات خطی $Ax = b$ یک دستگاه سازگار یا ناسازگار باشد. اگر $ind(A)=k$ باشد در اینصورت دستگاه $A^k Ax = A^k b$ سازگار است.

اثبات دستگاه معادلات خطی $Ax = b$ دارای جواب است اگر و فقط اگر $rank(A)=rank(A|b)$ [2] . با توجه با آنچه که در تعریف ۲-۱ درباره شاخص ماتریس بیان شد واضح است که $rank(A^{k+1})=rank(A^{k+1}|A^k b)$ بنابراین دستگاه $A^k Ax = A^k b$ سازگار است.

برای حل دستگاه معادلات خطی منفرد سازگار یا ناسازگار $Ax = b$ در صورتیکه $ind(A) = k$ باشد. با توجه به خواص معکوس درازین می‌توانیم جواب های دستگاه معادلات خطی منفرد سازگار $A^k Ax = A^k b$ را به دست آوریم[6].

تعریف ۵ [3] دو دستگاه معادلات خطی را هم ارز نامیم، هرگاه هر معادله یک دستگاه ترکیبی خطی از معادلات دستگاه دیگر باشد.

قضیه ٤ [3] جواب های دستگاه های معادلات خطی هم ارز یکی هستند.

بهتر است بدانیم برای حل یک دستگاه از معادلات، می‌توانیم هر دستگاه هم ارز آن را به جای آن دستگاه حل کنیم، هیچ جوابی کم نمی‌شود و هیچ جواب جدیدی ظاهر نمی‌شود.

قضیه ٥ [3] هر ماتریس $m \times n$ مانند A با یک ماتریس تحویل شده سطری پلکانی هم ارز سطری است. و در صورتی که $[R|Z]$ ماتریس تحویل شده سطری پلکانی $[A|Y]$ باشد. دستگاه های $AX = Y$ و $RX = Z$ هم ارزند.

۳ یک روش برای حل دستگاه معادلات خطی منفرد

در این بخش، قضیه‌ای را درباره رسیدن به یک دستگاه معادلات خطی فرومعین، هم ارز با یک دستگاه معادلات خطی منفرد ثابت می‌کنیم. این قضیه اساس ارایه روش جدید برای حل دستگاه معادلات خطی منفرد است. ابتدا نگاهی گذرا به نقش معکوس درازین و شبه معکوس در حل دستگاه معادلات خطی خواهیم داشت.

۳-۱ نقش معکوس درازین و شبه معکوس در حل دستگاه معادلات خطی

قضیه٦ [1] فرض کنید $A \in C^{n \times n}$ باشد. $A^D b$ جواب دستگاه معادلات خطی

$$Ax = b, \quad ind(A) = k \tag{۳}$$

است و با $x_d = A^D b$ نشان داده می‌شود، اگر و فقط اگر $b \in R(A^k)$.

قضیه۷ دستگاه معادلات خطی فرومعین

$$Ax = b, \quad A \in C^{m \times n} \quad (m < n) \tag{۴}$$

را در نظر بگیرید. برای حل چنین دستگاهی اغلب لازم است xای را بیابیم که $\|x\|_2$ کمترین مقدار ممکن را داشته باشد. بنابراین جواب مینیمال دستگاه فرومعین فوق معادل است با حل مساله $minimize\{\|x\|_2 : Ax = b\}$.
در صورتی که $rank(A) = m$، $(m < n)$ باشد جواب مینیمال دستگاه فرومعین (۴) عبارت است از $A^+ b$.
بنابراین جواب مینیمال هر دستگاه فرومعین که دارای رتبه کامل سطری باشد را با $x_p = A^+ b$ نشان می‌دهیم.
اثبات. [2] را ببینید.

۳-۲ دستگاه معادلات خطی فرومعین، هم ارز با دستگاه معادلات خطی منفرد

بیان و اثبات قضیه زیر پایه اصلی ارایه روش جدید برای حل دستگاه معادلات خطی منفرد است.

قضیه ۸ هر دستگاه معادلات خطی منفرد سازگار با یک دستگاه فرومعین با رتبه کامل سطری، هم ارز است.

اثبات دستگاه معادلات خطی منفرد

$$Ax = b \tag{۵}$$

را در نظر بگیرید. فرض کنید $A \in R^{n\times n}$ ، $ind(A) = k$ ، $rank(A) = m < n$ و $b \in R(A^k)$ باشد. $[A|b]$، ماتریس افزوده دستگاه (۵) را به شکل زیر نمایش می‌دهیم.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right] \tag{۶}$$

اگر $[R'|c']$ ماتریس تحویل شده سطری پلکانی ماتریس افزوده (۶) باشد، دارای سطر صفر خواهد بود زیرا (۵) یک دستگاه منفرد است و سطرهای $[A|b]$ وابسته خطی هستند. $[R'|c']$ را به صورت زیر نشان می‌دهیم.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} & c_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ r_{m1} & r_{m2} & \cdots & r_{mn} & c_m \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right] \tag{۷}$$

فرض کنیم (۷) ماتریس افزوده دستگاه $R'x = c'$ باشد. با توجه به اینکه (۵) یک دستگاه سازگار است، ماتریس افزوده (۷) دارای m سطر غیر صفر است و تعداد سطرهای صفر آن برابر است با $n - rank(A)$. دقت داشته باشید که تعداد سطرهای غیر صفر ماتریس افزوده (۷) برابر با رتبه ماتریس ضرائب دستگاه (۵) است. طبق قضیه ۵ دستگاه های معادلات خطی $Ax = b$ و $R'x = c'$ هم ارزند. حال با حذف کردن سطرهای صفر دستگاه $R'x = c'$ داریم

$$\begin{aligned} r_{11}x_1 + r_{12}x_2 + \cdots + r_{1n}x_n &= c_1 \\ r_{21}x_1 + r_{22}x_2 + \cdots + r_{2n}x_n &= c_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\quad \vdots \;&\;\; \vdots \\ r_{m1}x_1 + r_{2n}x_2 + \cdots + r_{mn}x_n &= c_m \end{aligned} \tag{۸}$$

اجازه بدهید دستگاه (۸) را با $Rx = c$ نمایش دهیم. بدیهی است که دستگاه های معادلات خطی $R'x = c'$ و $Rx = c$ هم ارزند. چون هر یک از m معادله دستگاه $Rx = c$ ترکیبی خطی از معادلات دستگاه $R'x = c'$ می‌باشد و برعکس.

با توجه به آنچه که در بالا بحث شد داریم، دستگاه $Ax = b$ با دستگاه $R'x = c'$ هم ارز است و دستگاه $R'x = c'$ با $Rx = c$ هم ارز است. هم ارزی سطری یک رابطه هم ارزی است[3]. پس دستگاه های معادلات خطی $Ax = b$ و $Rx = c$ هم ارزند. $Rx = c$ یک دستگاه $m \times n\ (m < n)$ فرومعین است و رتبه ماتریس ضرائب آن برابر است با m .

پس $Rx = c$ یک دستگاه معادلات خطی فرومعین با رتبه کامل سطری است که هم ارز با دستگاه معادلات خطی منفرد (۵) می‌باشد. در حالت کلی، هر دستگاه فرومعین دارای رتبه کامل سطری نیست.

با توجه به ویژگی دستگاه های معادلات خطی هم ارز داریم:

نتیجه ۱ جواب به دست آمده با معکوس درازین برای دستگاه معادلات خطی منفرد در دستگاه معادلات خطی فرومعین با رتبه کامل سطری، هم ارز با آن نیز صدق می کند.

نتیجه ۲ جواب مینیمال به دست آمده با شبه معکوس برای دستگاه معادلات خطی فرومعین با رتبه کامل سطری، در دستگاه معادلات خطی منفرد هم ارز با آن نیز صدق می کند.

٤ یک روش برای حل دستگاه معادلات خطی منفرد

با توجه به قضیه ۸، یک روش برای حل دستگاه معادلات خطی منفرد $Ax = b$ به دست آوردن یک دستگاه معادلات خطی فرومعین با رتبه کامل سطری است که با آن هم ارز باشد. جواب مینیمال دستگاه معادلات خطی فرومعین با رتبه کامل سطری را با شبه معکوس می‌توان به دست آورد. بنا به نتیجه ۲ این جواب، جواب مینیمال دستگاه معادلات خطی منفرد $Ax = b$ نیز هست.

طرح و پاسخگویی سوالات زیر به تبیین قضیه ۸ که پایه و اساس روش فوق است کمک می کند.

۱. آیا هر دستگاه معادلات خطی منفرد دلخواه، با یک دستگاه فرومعین با رتبه کامل سطری، هم ارز است؟

بلی، ماتریس افزوده یک دستگاه معادلات خطی منفرد $n \times n$ ، ماتریسی از مرتبه $n \times (n+1)$ است. و بر اساس قضیه ۵ با یک ماتریس تحویل شده سطری پلکانی هم ارز سطری است. این خود دلیلی بر جامع بودن روش فوق است، یعنی رتبه، شاخص و سایر ویژگی های ماتریس ضرائب دستگاه منفرد محدویت در اجرای روش ایجاد نمی کند.

۲. آیا هر دستگاه معادلات خطی منفرد ناسازگار دلخواه، هم ارز با یک دستگاه فرومعین با رتبه کامل سطری است ؟

بلی، اگر در دستگاه معادلات خطی منفرد $Ax = b$ ، $ind(A) = k$ داشته باشیم $b \notin R(A^k)$، دستگاه ناسازگار است و طبق قضیه۲-۳ می‌توانیم روش فوق را برای دستگاه منفرد سازگار $A^k Ax = A^k b$ اجرا کنیم.

۳. آیا جواب دستگاه های فرومعین را فقط با شبه معکوس می‌توان به دست آورد؟

خیر، روش های متعددی برای به دست آوردن جواب دستگاه های معادلات خطی فرومعین وجود دارد[2]. اما جواب مینیمال آن دسته از دستگاه معادلات فرومعین که دارای رتبه کامل سطری هستند را می‌توان با شبه معکوس به دست آورد. ما در اینجا چون x_d و x_p را با هم مقایسه می‌کنیم به دستگاه های فرومعین با رتبه کامل سطری نیاز داریم.

۴. چرا در این روش از ماتریس تحویل شده سطری پلکانی استفاده می‌کنیم؟

ما با روش های متعددی می‌توانیم برای هر دستگاه معادلات خطی منفرد یک دستگاه فرومعین هم ارز به دست آوریم [مثال ۲ را ببینید]. اما آنچه که برای ما مهم است، این است که به یک ماتریس فرومعین با رتبه کامل سطری برسیم تا بتوانیم جواب مینیمال آن را با شبه معکوس به دست آوریم. در ماتریس تحویل شده سطری پلکانی سطرهای صفر زیر همه سطوری که دارای درایه‌های غیر صفرند واقع می‌شوند. به همین دلیل می‌توان بدون انجام عملیات اضافی آن ها را حذف کرد. چون سطرهای ماتریس افزوده هر دستگاه معادلات خطی منفرد وابسته خطی هستند پس ماتریس تحویل شده سطری پلکانی آن دارای سطر صفر خواهد بود.

۵. معکوس درازین با شبه معکوس چه تفاوتی دارد؟

معکوس درازین و شبه معکوس دو مفهوم کاملا مجزا از هم هستند. جواب مینیمال هر دستگاه معادلات خطی فرومعین که دارای رتبه کامل سطری باشد و جواب کمترین مربعات هر دستگاه معادلات خطی فرامعین که دارای رتبه کامل ستونی باشد را می‌توان با شبه معکوس به دست آورد[2]. معکوسی که برای ماتریس های نامنفرد تعریف شده است نوع خاصی از معکوس درازین است. بنابراین جواب یک دستگاه معادلات خطی منفرد یا نامنفرد را بدون توجه به استقلال خطی سطرها و ستونهای ماتریس ضرایب آن، می‌توان با معکوس درازین به دست آورد.

۵ نتایج عددی

فرض کنید $Ax = b$ یک دستگاه معادلات خطی منفرد سازگار باشد. در اینصورت $Ax = b$ دارای یک مجموعه جواب است و باید جواب مینیمال آن را به دست آورد. در این بخش، با ارایه مثال های عددی نشان داده‌ایم جواب به دست آمده با معکوس درازین برای $Ax = b$ همواره جواب مینیمال نیست.

اهیمت استفاده از معکوس درازین در این است که استفاده از روش الگوریتم دومرحله‌ای برای به دست آوردن معکوس درازین دستگاه معادلات خطی منفرد از سایر روش های تکراری مانند PCG , $PGMRES$ بهتر و موفق عمل می‌کند[8].

مثال ۱ دستگاه معادلات خطی منفرد زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned}
&2x_1 - 3x_2 - 5x_3 = 1,\\
&-x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 2,\\
&x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 1.
\end{aligned} \tag{۹}$$

ماتریس ضرایب دستگاه (۹) به صورت زیر می‌باشد

$$A=\begin{bmatrix}2 & -3 & -5\\ -1 & 4 & 5\\ 1 & -3 & -4\end{bmatrix}$$

همچنین با انجام محاسبات لازم داریم. $rank(A)=rank(A^2)=2$ بنابراین شاخص ماتریس A برابر یک است. پس (۹) یک دستگاه معادلات خطی منفرد با شاخص یک است. پس ماتریس A دارای معکوس گروه است. با توجه به اینکه $b\notin R(A)$ پس (۹) یک دستگاه ناسازگار است. طبق قضیه ۳ دستگاه $AAx=Ab$ را به دست می‌آوریم. A یک ماتریس خودتوان است. پس

$$\begin{aligned}&2x_1-3x_2-5x_3=-9,\\ &-x_1+4x_2+5x_3=12,\\ &x_1-3x_2-4x_3=-9.\end{aligned} \tag{۱۰}$$

بر اساس قضیه ۲ برای به دست آوردن معکوس گروه داریم

$$A=P^{-1}\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} & \begin{matrix}0\\ 0\end{matrix}\\ \begin{matrix}0 & 0\end{matrix} & 0\end{bmatrix}P=\begin{bmatrix}2 & -3 & -5\\ -1 & 4 & 5\\ 1 & -3 & -4\end{bmatrix}$$ که در آن $$P=\begin{bmatrix}-1 & 3 & 4\\ -2 & 3 & 5\\ -1 & 3 & 5\end{bmatrix}$$

بنابراین

$$A_g=P^{-1}\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} & \begin{matrix}0\\ 0\end{matrix}\\ \begin{matrix}0 & 0\end{matrix} & 0\end{bmatrix}P=\begin{bmatrix}2 & -3 & -5\\ -1 & 4 & 5\\ 1 & -3 & -4\end{bmatrix}$$

ملاحظه می‌کنیم که $A_g=A$. برای مطالعه بیشتر در این زمینه به [8] مراجعه نمائید. حال طبق قضیه ۳ برای دستگاه (۱۰) x_d به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$x_d=A_gb=\begin{bmatrix}2 & -3 & -5\\ -1 & 4 & 5\\ 1 & -3 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-9\\ 12\\ -9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-9\\ 12\\ -9\end{bmatrix}$$

بنا بر قضیه ۸ دستگاه معادلات خطی منفرد (۱۰) با دستگاه فرومعین زیر هم ارز است.

$$\begin{aligned}&x_1-x_3=0,\\ &x_2+x_3=3.\end{aligned} \tag{۱۱}$$

دستگاه فرومعین (۱۱) دارای رتبه کامل سطری است، پس:

$$\begin{aligned}x_p&=R^{+}c=R^{T}\left(RR^{T}\right)^{-1}c\\ &=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix}0\\ 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 1\end{bmatrix}\end{aligned}$$

طبق خاصیت دستگاه های هم ارز، x_d و x_p در (۱۰) و (۱۱) صدق می کنند. واضح است که $\|x_d\|_2 < \|x_p\|_2$.

مثال ۲ دستگاه معادلات خطی منفرد ناسازگار زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{aligned} 2x_1+4x_2+6x_3+5x_4&=1,\\ x_1+4x_2+5x_3+4x_4&=4,\\ -x_2-x_3&=5,\\ -x_1-2x_2-3x_3-3x_4&=1. \end{aligned} \tag{۱۲}$$

ماتریس ضرائب دستگاه (۱۲) به صورت زیر می‌باشد

$$B=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 5\\ 1 & 4 & 5 & 4\\ 0 & -1 & -1 & 0\\ -1 & -2 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

$rank(B^2)=rank(B^3)=2$ پس $ind(B)=2$. دستگاه سازگار $B^2Bx=B^2b$ را تشکیل می‌دهیم

$$\begin{aligned} 3x_1+11x_2+14x_3+14x_4&=101,\\ 2x_1+9x_2+11x_3+11x_4&=84,\\ -x_1-4x_2-5x_3-5x_4&=-37,\\ -x_1-4x_2-5x_3-5x_4&=-37. \end{aligned} \tag{۱۳}$$

از قضیه ۱ برای به دست آوردن معکوس درازین ماتریس B استفاده می کنیم.

$$B=P^{-1}\begin{bmatrix} \begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix} & \begin{matrix}0&0\\0&0\end{matrix}\\ \begin{matrix}0&0\\0&0\end{matrix} & \begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix} \end{bmatrix}P=\begin{bmatrix} 3 & 11 & 14 & 14\\ 2 & 7 & 9 & 9\\ -1 & -4 & -5 & -5\\ -1 & -4 & -5 & -5 \end{bmatrix}$$

که در آن

$$P=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 & 5\\ 0 & 9 & 9 & 9\\ \frac{76}{27} & \frac{76}{27} & \frac{163}{27} & \frac{217}{27}\\ \frac{11}{27} & \frac{11}{27} & \frac{14}{27} & \frac{41}{27} \end{bmatrix}$$

طبق قضیه ۱ معکوس درازین ماتریس فوق به صورت زیر خواهد بود

$$B^D=P^{-1}\begin{bmatrix} \begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix} & \begin{matrix}0&0\\0&0\end{matrix}\\ \begin{matrix}0&0\\0&0\end{matrix} & \begin{matrix}0&0\\0&0\end{matrix} \end{bmatrix}P=\begin{bmatrix} 3 & -7 & -4 & -4\\ 2 & -3 & -1 & -1\\ -1 & 2 & 1 & 1\\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

x_d برای (۱۳) به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$x_d=B^Db=\begin{bmatrix} 3 & -7 & -4 & -4\\ 2 & -3 & -1 & -1\\ -1 & 2 & 1 & 1\\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}101\\84\\-37\\-37\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11\\24\\-7\\-7\end{bmatrix}$$

قضیه ۸ دستگاه فرومعین زیر را که هم ارز سطری دستگاه منفرد (۱۳) است به دست می‌دهد:

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 + x_4 &= -3, \\ x_2 + x_3 + x_4 &= 10. \end{aligned} \tag{۱۴}$$

دستگاه (۱۳) را با $Rx = c$ نشان می‌دهیم. $rank\left(R\right) = 2$، پس $Rx = c$ یک دستگاه فرومعین با رتبه کامل سطری است و می‌توان جواب مینیمال آن را با شبه معکوس به دست آورد. با توجه به قضیه ۷ داریم

$$x_p = R^{+}b = R^{T}\left(RR^{T}\right)^{-1}b$$

$$x_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} -3 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{29}{5} \\ \frac{36}{5} \\ \frac{7}{5} \\ \frac{7}{5} \end{bmatrix}.$$

x_d و x_p در دستگاه معادلات (۱۳) و (۱۴) صدق می‌کنند. x_p جواب مینیمال دستگاه منفرد (۱۲) است.

با حذف سطر سوم دستگاه معادلات خطی منفرد (۱۳) ما به یک دستگاه معادلات خطی فرومعین می‌رسیم که با آن هم ارز سطری است، ولی دارای رتبه کامل سطری نیست.

مثال ۳ دستگاه معادلات خطی منفرد سازگار زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{aligned} -x_1 - x_2 - x_3 &= 1 \\ -x_1 + \frac{1}{3}x_2 - x_3 &= 2 \\ -x_1 - x_2 - x_3 &= 1 \end{aligned} \tag{۱۵}$$

شاخص ماتریس ضرائب دستگاه برابر با یک می‌باشد. از قضیه ۱ برای به دست آوردن معکوس درازین ماتریس A استفاده می‌کنیم.

$$A = P^{-1}\begin{bmatrix} [1] & 0 & 0 \\ 0 & \left[-\frac{8}{3}\right] & 0 \\ 0 & 0 & [0] \end{bmatrix}P = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & \frac{1}{3} & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

که در آن

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{11} & -\frac{3}{11} & \frac{1}{11} \\ -\frac{9}{22} & -\frac{3}{11} & -\frac{9}{22} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

طبق قضیه ۱ معکوس درازین ماتریس فوق به صورت زیر خواهد بود:

$$A_g = P^{-1}\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{8} \end{bmatrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & 0 \end{bmatrix}P = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} -1 & -6 & -1 \\ -6 & 12 & -6 \\ -1 & -6 & -1 \end{bmatrix}$$

x_d برای (۱۵) به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$x_d = A^D b = \begin{bmatrix} -\frac{1}{16} & -\frac{3}{8} & -\frac{1}{16} \\ -\frac{3}{8} & \frac{3}{4} & -\frac{3}{8} \\ -\frac{1}{16} & -\frac{3}{8} & -\frac{1}{16} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{8} \\ \frac{3}{4} \\ -\frac{7}{8} \end{bmatrix}$$

قضیه ۸ دستگاه فرومعین زیر را که هم ارز سطری دستگاه منفرد (۱۵) است به دست می‌دهد:

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= -\frac{7}{4} \\ x_2 &= \frac{3}{4} \end{aligned} \qquad (۱۶)$$

(۱۳) یک دستگاه فرومعین با رتبه کامل سطری است. برای به دست آوردن جواب مینیمال آن را شبه‌معکوس داریم

$$x_p = R^+ b = R^T \left(RR^T\right)^{-1} b$$

$$x_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} -\frac{7}{4} \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{8} \\ \frac{3}{4} \\ -\frac{7}{8} \end{bmatrix}.$$

$x_p = x_d$ در دستگاه معادلات (۱۵) و (۱۶) صدق می‌کنند. x_p جواب مینیمال دستگاه منفرد (۱۲) است.

٦ نتیجه‌گیری

در این مقاله، روش به دست آوردن دستگاه معادلات خطی فرومعین هم ارز با دستگاه معادلات خطی منفرد ارایه شده است. با این روش می‌توان جواب مینیمال را برای دستگاه معادلات خطی منفرد به دست آورد.

سپاسگزاری

این مقاله نتیجه حاصل از طرح پژوهشی با شماره‌ی ۸۸۷۲۴ است که با استفاده از اعتبارات پژوهشی باشگاه پژوهشگران جوان، دانشگاه آزاد اسلامی– واحد تبریز به انجام رسیده است. نویسندگان از باشگاه پژوهشگران جوان، دانشگاه آزاد اسلامی – واحد تبریز به خاطر حمایتش از طرح پژوهشی مذکور، از هیئت محترم داوران به خاطر ارایه پیشنهادات و نظرات گرانسنگ و دکتر سهراب کرد رستمی به خاطر زحماتشان ممنون و سپاسگزارند.

منابع

[1] Campbell,S.L.,Meyer,C., (1979), *Generalized Inverses of Linear Transformations* , Pitman London.
[2] Detta,B., (1994), *Numerical Linear Algebra and Application*, Thomson.
[3] Hoffman,K.,Kunze,R., (1971), *Linear algebra*, Prentice-Hall.
[4] Lin,L., Wei,Y., Zhang,N., (2008), *Convergence and quotient convergence of iterative methods for solving singular linear equations with index one* , J.Linear Algebra.Appl, V.203, PP.35-45.
[5] Wang,G. , (1989), *A cramer rule for finding the solution of a class of singular equations* J. Linear Algebra and its Applications, V.116, PP.27-34.
[6] Wei,Y., Zhou,J. , (2006), *A two-step algorithm for solving singular linear systems with index one*, J. Applied Mathematics and Computation, V.175, PP.472-485.
[7] Zheng,L. , (2001), *A characterization of the Drazin inverse*, J.Linear Algebra and its Applications, V.335, PP.183-188.
[8] Nikuie.M., Mirnia.M.K., Mahmoudi.Y., *Some results about the index of matrix and Drazin inverse*, Math Sci J. Islamic Azad University-Karaj Branch, to appear.