مجله ریاضیات کاربردی واحد لاهیجان، سال هفتم، شماره ۳ (پیاپی ۲۶)، پاییز ۸۹، ص ص ۱۹-۱۱
شاپا ۶۰۸۳-۲۰۰۸

توسعه روش تکراری نیوتن و معرفی روش های سریع برای حل معادلات غیرخطی

صمد عهدی اقدم*، **رضا رضاپور**
اعضای هیات علمی گروه ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد مرند

رسید مقاله: ۸۸/۳/۲
پذیرش مقاله: ۸۹/۶/۲۹

چکیده
در این مقاله برخی اصلاحات روش کلاسیک نیوتن با همگرایی مکعبی را به همراه روش هالی در نظر گرفته و به کمک قاعده مشتق‌گیری عددی گاوس و قواعد انتگرال‌گیری عددی روش هایی ترکیبی به دست می‌آوریم. تحلیل همگرایی نشان می‌دهد که روش های ارایه شده دارای مراتب همگرایی پنج یا شش می‌باشند و آزمون های عددی موید کارایی بیشتر و بهتر این روش ها نسبت به سایر روش های موجود هستند.

کلمات کلیدی: ریشه‌یابی، روش نیوتن، روش های تکراری، انتگرال گیری عددی و مشتقگیری عددی.

۱ مقدمه
روش کلاسیک نیوتن برای یافتن ریشه معادله $f(x)=0$ عبارت است از:

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{۱}$$

با قرار دادن $\frac{f}{f'}$ در محل f در فرمول نیوتن، روش تکراری شرودر با فرمول

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)f'(x_n)}{[f'(x_n)]^2-f(x_n)f''(x_n)} \tag{۲}$$

حاصل می‌شود.

بسط تیلور مرتبه دوم تابع $f(x)$ حول نقطه x_n (به ازای $x=x_{n+1}$) به صورت

$$0=f(x_{n+1})\cong f(x_n)+(x_{n+1}-x_n)\left[f'(x_n)+\frac{1}{2}f''(x_n)(x_{n+1}-x_n)\right] \tag{۳}$$

*عهده دار مکاتبات
آدرس الکترونیکی: ahdi@marandiau.ac.ir

است که با قرار دادن $-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ از فرمول نیوتن به جای عبارت $(x_{n+1}-x_n)$ در داخل کروشه و حل معادله حاصل نسبت به x_{n+1} فرمول روش هالی به صورت

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)f'(x_n)}{[f'(x_n)]^2-\frac{1}{2}f(x_n)f''(x_n)} \quad (۴)$$

حاصل می‌شود.

روش های کلاسیک نیوتن و شرودر دارای مرتبه همگرایی دو بوده و روش هالی مرتبه همگرایی سه دارد.

روش های مرتبه سومی که با اصلاحاتی از روش نیوتن در [1، 2، 6، 7 و 8] ارایه شده‌اند، با در نظر گرفتن فرمول های درجه دوم متفاوت برای محاسبه انتگرال

$$f(x)=f(x_n)+\int_{x_n}^{x} f'(t)dt \quad (۵)$$

به دست می‌آیند که با رعایت نامگذاری های همان مراجع به ترتیب آن ها را توضیح می‌دهیم:

الف روش میانگین حسابی نیوتن

از فرمول (۵) به ازای $x=x_{n+1}$ و $f(x_{n+1})=0$ نتیجه می‌شود:

$$0=f(x_n)+\int_{x_n}^{x_{n+1}} f'(t)dt \quad (۶)$$

که با استفاده از قاعده انتگرال گیری ذوزنقه‌ای به فرمول

$$x_{n+1}=x_n-\frac{2f(x_n)}{f'(x_{n+1})+f'(x_n)}$$

می‌رسیم که مشکل معلوم بودن x_{n+1} در سمت راست این رابطه (برای محاسبه خودش) را می‌توان با اعمال تکرار $(n+1)$ام نیوتن در طرف راست برطرف نمود. به این ترتیب روش نیوتن اصلاح شده با نام روش میانگین حسابی نیوتن به صورت زیر به دست می‌آید:

$$x_{n+1}=x_n-\frac{2f(x_n)}{f'(x_{n+1}^*)+f'(x_n)} \quad (۷)$$

که

$$x_{n+1}^*=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (*)$$

ب روش نقطه میانی نیوتن

با به کارگیری قاعده نقطه میانی برای انتگرال موجود در (۶) به روش دیگری به صورت

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'\left(\frac{x_n + x^*_{n+1}}{2}\right)} \tag{۸}$$

دست می‌یابیم که همانند روش قبل x^*_{n+1} از رابطه(*) محاسبه می‌شود.

پ روش واسطه موزون نیوتن

با در نظر گرفتن بسط تیلور درجه اول $f(x)$ حول نقاط x_n و x_{n+1} داریم:

$$\begin{cases} f(x) \approx f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) \\ f(x) \approx f(x_{n+1}) + f'(x_{n+1})(x - x_{n+1}) \end{cases}$$

در این عبارات به جای x به ترتیب x_{n+1} و x_n را نوشته و تقریبها را به تساوی در نظر می گیریم. سپس با حل هر یک از این معادلات نسبت به x_{n+1} و محاسبه میانگین آن ها روشی به صورت

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{2}\left[\frac{1}{f'(x_n)} + \frac{1}{f'(x^*_{n+1})}\right] \tag{۹}$$

حاصل می‌شود که هومیر [۳] نیز آن را به دست آورده است.

۲ روش های نو و تحلیل همگرایی

تقریب ریشه توابعی نظیر $f(x) = \sin(x)e^{-x} + Ln(x^2+1)$ با روش های شرودر و هالی به دلیل نیاز به تعیین f'' با محاسبات فراوانی همراه است. برای سهولت می‌توان با استفاده از قاعده مشتق‌گیری عددی گاوس به جای f'' عباراتی بر حسب f' یا f را قرار داد.

قاعده مشتق‌گیری عددی گاوس سه نقطه‌ای به صورت

$$\forall x \in [x_n, x_{n+1}];\ f''(x) \approx w_0 f(x_n) + w_1 f\left(\frac{x_n + x_{n+1}}{2}\right) + w_2 f(x_{n+1})$$

فرمول مرتبه سوم

$$x_{n+1} = x_n - \frac{3f(x_n) - 4f\left(\frac{x_n + x^*_{n+1}}{2}\right) + 2f(x^*_{n+1})}{f'(x_n)} \tag{۱۰}$$

را نتیجه می‌دهد که آن را فرمول نیوتن-گاوس می‌نامیم. در این فرمول نیز x^*_{n+1} از رابطه (*) محاسبه می‌شود.

در ادامه برخی اصلاحات جدید روش نیوتن را با یک یا دو ارزیابی اضافی از تابع در یک نقطهٔ تکراری دیگر به وسیله روش های مرتبه سوم ارایه می کنیم. این روش ها دارای مرتبه همگرایی پنج یا شش هستند.
به این منظور انتگرال (۵) را روی بازه $[u_{n+1}, x_{n+1}]$ با قاعده مستطیلی تقریب می‌زنیم که با حل معادله نسبت به x_{n+1} نتیجه می‌شود:

$$x_{n+1} = u_{n+1} - \frac{f(u_{n+1})}{f'(u_{n+1})} \qquad (۱۱)$$

برای بدست آوردن روش های نیوتن اصلاح شده ترکیبی و همچنین برای کاستن از تعداد ارزیابی های توابع، $f'(u_{n+1})$ را با $f'(x^*_{n+1})$ برآورد می کنیم که x^*_{n+1} از رابطه (*) محاسبه می‌شود. بنابراین یک رده از روش های جدید

$$x_{n+1} = u_{n+1} - \frac{f(u_{n+1})}{f'(x^*_{n+1})} \qquad (۱۲)$$

حاصل می‌شود که $u_{n+1} = g(x_n)$ یکی از روش های قبلی است.
علاوه بر این با استفاده از بسط تیلور داریم:

$$\begin{cases} f'(x^*_{n+1}) \approx f'(x_n) + f''(x_n)(x^*_{n+1} - x_n) \\ f'\left(\dfrac{x_n + x^*_{n+1}}{2}\right) \approx f'(x_n) + \dfrac{1}{2} f''(x_n)(x^*_{n+1} - x_n) \end{cases}$$

از این دو رابطه می‌توانیم تقریب

$$f'(x^*_{n+1}) \approx 2 f'\left(\frac{x_n + x^*_{n+1}}{2}\right) - f'(x_n)$$

را به دست آوریم که با به کارگیری این تقریب در رابطه (۱۱) گروه دیگری از روش های جدید به صورت

$$x_{n+1} = u_{n+1} - \frac{f(u_{n+1})}{2 f'\left(\dfrac{x_n + x^*_{n+1}}{2}\right) - f'(x_n)} \qquad (۱۳)$$

حاصل می‌شوند.
در ادامه در قضایای ۱ و ۲ ثابت می کنیم که ترکیب روش های مرتبه سه با روابط (۱۲) یا (۱۳) روش هایی از مرتبه پنج و با رابطه (۱۱) روش هایی از مرتبه شش را تولید می کند. برخی از ترکیبات روش ها که دارای کارایی بهتر و تعداد اعمال کمتری می‌باشند، عبارتند از:
الف ترکیب (۷) با (۱۲) را روش میانگین حسابی اصلاح شده نیوتن می‌نامیم:

$$\begin{cases} u_{n+1} = x_n - \dfrac{2 f(x_n)}{f'(x^*_{n+1}) + f'(x_n)}, \\ x_{n+1} = u_{n+1} - \dfrac{f(u_{n+1})}{f'(x^*_{n+1})}. \end{cases} \qquad (۱۴)$$

ب ترکیب (۸) با (۱۳) را روش نقطه میانی اصلاح شده نیوتن نامگذاری می‌کنیم:

$$\begin{cases} u_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'\left(\dfrac{x_n + x_{n+1}^*}{2}\right)}, \\ x_{n+1} = u_{n+1} - \dfrac{f(u_{n+1})}{2f'\left(\dfrac{x_n + x_{n+1}^*}{2}\right) - f'(x_n)}. \end{cases} \quad (۱۵)$$

پ ترکیب (۹) با (۱۲) با نام روش واسطه موزون اصلاح شده نیوتن عبارت است از:

$$\begin{cases} u_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{2}\left[\dfrac{1}{f'(x_n)} + \dfrac{1}{f'(x_{n+1}^*)}\right], \\ x_{n+1} = u_{n+1} - \dfrac{f(u_{n+1})}{f'(x_{n+1}^*)}. \end{cases} \quad (۱۶)$$

ت ترکیب روش هالی همچون سایر روش های از مرتبه سه با (۱۲) یا (۱۳) روشی با مرتبه همگرایی پنج می‌باشد، ولی برای کاستن از تعداد اعمال بهتر است آن را با (۱۱) و با نام روش هالی اصلاح شده ترکیب کنیم که مرتبه همگرایی آن با استناد به قضیه۲، شش می‌باشد. در فرمول هالی x_{n+1}^* حضور ندارد و بنابراین نیازی به استفاده از رابطه (*) نیست.

$$\begin{cases} u_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)f'(x_n)}{[f'(x_n)]^2 - \dfrac{1}{2}f(x_n)f''(x_n)}, \\ x_{n+1} = u_{n+1} - \dfrac{f(u_{n+1})}{f'(u_{n+1})}. \end{cases} \quad (۱۷)$$

۳ محاسبه مرتبه همگرایی روش ها

با استفاده از بسط تیلور تابع $f(x_n)$ و مشتقات اول و دوم آن حول r (ریشه تابع f) فرمول های خطای

$$\begin{cases} e_{n+1} = c_2 e_n^2 + o(e_n^3), \\ e_{n+1} = -c_2^2 e_n^2 + o(e_n^3) \end{cases}$$

به ترتیب برای روش های نیوتن و شرودر حاصل می‌شود که در آن ها $e_n = x_n - r$ و $c_k = \dfrac{f^{(k)}(r)}{k!f'(r)}$ به ازای $k = 2,3,...$ است. این روابط نشان می‌دهند که مرتبه همگرایی این روش ها حد اقل دو می‌باشد.

در مورد روش های مرتبه سوم روابط خطای زیر را داریم:

- روش میانگین حسابی نیوتن $$e_{n+1}=\left(c_2^2+\frac{c_3}{2}\right)e_n^3+O(e_n^4)$$
- روش نقطه میانی نیوتن $$e_{n+1}=(c_2^2-\frac{1}{4}c_3)e_n^3+O(e_n^4)$$
- روش واسطه موزون نیوتن $$e_{n+1}=\frac{1}{2}c_3e_n^3+O(e_n^4)$$
- روش هالی $$e_{n+1}=(c_2^2-c_3)e_n^3+O(e_n^4)$$
- روش نیوتن-گاوس $$e_{n+1}=(2c_2^2-\frac{1}{2}c_3)e_n^3+O(e_n^4)$$

برای تعیین مرتبه همگرایی روش های از مراتب بالا، روش های مرتبه سوم بیان شده را به فرم کلی

$$u_{n+1}=g_3(x_n) \tag{۱۸}$$

در نظر گرفته و اولین قضیه را می‌آوریم.

قضیه ۱ فرض می کنیم تابع $f:D\subset R\to R$ در بازه باز D دارای یک ریشه ساده r است و در این بازه مشتقات اول، دوم وسوم را داراست. در این صورت روش های تعریف شده با (۱۲) و(۱۳)، که در آن ها u_{n+1} در (۱۸) معرفی شده و در فرمول

$$u_{n+1}-r=Ae_n^3+O(e_n^4) \tag{۱۹}$$

برای برخی $A\neq 0$ و $e_n=x_n-r$ صدق می کنند، دارای مرتبه همگرایی پنج هستند.

اثبات چون $f(r)=0$ ، پس بسط تیلور تابع $f(u_{n+1})$ حول نقطه r را به صورت

$$f(u_{n+1})=f'(r)[(u_{n+1}-r)+O((u_{n+1}-r)^2)]$$

در نظر می گیریم و همچنین با استفاده از تقسیم چند جمله‌ای ها می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{f'(x_{n+1}^*)}=\frac{1}{f'(r)}[1-2c_2^2e_n^2+4c_2(c_2^2-c_3)e_n^3+O(e_n^4)]$$

اکنون با کمک این روابط فرمول (۱۲) را به صورت

$$\begin{aligned}x_{n+1}-r&=u_{n+1}-r-[(u_{n+1}-r)-2c_2^2e_n^2(u_{n+1}-r)+O(e_n^6)]\\&=2c_2^2e_n^2(u_{n+1}-r)+O(e_n^6)=2c_2^2Ae_n^5+O(e_n^6).\end{aligned}$$

می‌نویسیم و به طریق مشابه مرتبه همگرایی (۱۳) به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$x_{n+1}-r=(2c_2^2-\frac{3}{2}c_3)Ae_n^5+O(e_n^6).$$

در واقع با ترکیب هر پنج روش مرتبه سوم معرفی شده با فرمول های (۱۲) یا (۱۳) می‌توان ده روش مرتبه پنجم به دست آورد. به هر حال هفت روش ذکر نشده در مقایسه با روش های تعریف شده توسط(۱۴) تا (۱۶) به محاسبه مازاد از مشتق اول نیاز دارند و بنابراین کارایی کمتری دارند.
با به کارگیری فرمول های خطا و قضیه۱ نتیجه می‌شود که برای روش های (۱۴) تا (۱۶) معادلات خطای زیر برقرارند:

- روش معرفی شده بوسیله (۱۴): $e_{n+1} = {c_2}^2(2c_2^2 + c_3){e_n}^5 + O({e_n}^6)$
- روش تعریف شده با (۱۵): $e_{n+1} = (2c_2^2 - \frac{3}{2}c_3)(c_2^2 - \frac{1}{4}c_3)e_n^5 + O(e_n^6)$
- روش توصیف شده به وسیله (۱۶): $e_{n+1} = c_2^2 c_3 e_n^3 + O({e_n}^6)$

قضیه۲ با مفروضات قضیه۱، ترکیب روش های از مرتبه سه با رابطه (۱۱) روش هایی با مرتبه همگرایی شش تولید می کند.

اثبات برای رابطه (۱۱) با جایگزین نمودن u_{n+1} به جای x_n در فرمول خطای نیوتن خواهیم داشت:

$$x_{n+1} - r = u_{n+1} - r - \frac{[(u_{n+1} - r) + c_2(u_{n+1} - r)^2 + O((u_{n+1} - r)^3)]}{[1 + 2c_2(u_{n+1} - r) + O((u_{n+1} - r)^2)]}$$
$$= c_2(u_{n+1} - r)^2 + O((u_{n+1} - r)^3)$$

که استفاده از (۱۹) نتیجه مطلوب را به صورت $x_{n+1} - r = c_2 A e_n^6 + O(e_n^7)$ به دست می‌دهد.
ترکیب هر یک از روش های مرتبه سوم با (۱۱) روشی از مرتبه شش را تولید می‌کند که از بین این ها فقط ترکیب(۱۷) را به دلیل کارایی بهترش در نظر می‌گیریم. فرمول خطای این روش $e_{n+1} = c_2(c_2^2 - c_3)e_n^6 + O(e_n^7)$ است.

۱ آزمون ها و مقایسه روش ها

روش های معرفی شده در تعداد ارزیابی های توابع و همینطور در تعداد اعمال حسابی در هر تکرار با هم متفاوتند. برای مقایسه روش ها به اختصار روش های نیوتن، شرودر و هالی را به ترتیب با نمادهای CN، SCH وHL و روش های مرتبه سوم (۷) تا (۱۰) را به ترتیب با نمادهای AN، MN، HN وNG و روش های مرتبه پنجم (۱۴) تا (۱۶) را به ترتیب با نمادهایAN5 ، MN5 وHN5 و روش مرتبه شش (۱۷) را با HL6 نشان می‌دهیم.
با استفاده از [4] شاخص کارایی را به صورت $p^{\frac{1}{w}}$ تعریف می‌کنیم که p مرتبه روش و w تعداد ارزیابی های توابع در هر تکرار از یک روش است. شاخص کارایی روش ها را در جدول۱ می‌آوریم.

CN	SCH	NG	AN,MN,HN,HL	AN5,MN5,HN5	HL6
$\sqrt{2}\cong 1.414$	$\sqrt[3]{2}\cong 1.260$	$\sqrt[4]{3}\cong 1.316$	$\sqrt[3]{3}\cong 1.442$	$\sqrt[4]{5}\cong 1.495$	$\sqrt[5]{6}\cong 1.431$

جدول ۱. مقایسه شاخص کارایی روش ها

در ادامه هریک از این روش ها را برای تقریب ریشه r توابع انتخابی

$$f_1(x)=x^3+4x^2-10; \qquad r=1.3652300134141$$
$$f_2(x)=xLn(x)-\cos(x); \qquad r=1.26668360567426$$
$$f_3(x)=e^x-3\cos^2(x)+5x; \qquad r=0.286017295428356$$

به کار گرفته و نتایج را در جدول های ۲ تا ۴ می‌آوریم. این جدول ها شامل تعداد تکرارها (n)زمان انجام محاسبات (T) برحسب ثانیه و مقدار تقریبی ریشه (x_n) با معیار توقف $\left|f(x_n)<10^{-14}\right|$ برای دستیابی به ریشه مورد نظر هستند.

	T	n	x_n	$f(x_n)$
CN	0.036151	5	1.3652300134141	0
SCH	0.056851	5	1.3652300134141	0
NG	0.069174	5	1.3652300134141	8.9×10^{-15}
AN	0.050837	3	1.3652300134141	0
MN	0.025676	3	1.3652300134141	-3.6×10^{-15}
HN	0.024961	3	1.3652300134141	0
HL	0.028207	3	1.3652300134141	0
AN5	0.021746	2	1.3652300134141	0
MN5	0.022196	2	1.3652300134141	0
HN5	0.019795	2	1.3652300134141	0
HN6	0.026541	2	1.3652300134141	0

جدول ۲. اطلاعات مربوط به تابع f_1 با تقریب اولیه $x_0=1.8$

	T	n	x_n	$f(x_n)$
CN	0.610255	5	1.26668360567426	2.2×10^{-16}
SCH	0.780674	5	1.26668360567426	2.2×10^{-16}
NG	0.671505	3	1.26668360567426	7.2×10^{-16}
AN	0.530780	3	1.26668360567426	2.2×10^{-16}
MN	0.452732	3	1.26668360567426	-3.3×10^{-16}
HN	0.530222	3	1.26668360567426	2.2×10^{-16}
HL	0.468445	3	1.26668360567426	-1.3×10^{-15}
AN5	0.421051	2	1.26668360567426	2.2×10^{-16}
MN5	0.468920	2	1.26668360567426	-9.5×10^{-15}
HN5	0.264722	2	1.26668360567426	2.2×10^{-16}
HN6	0.531263	2	1.26668360567426	2.2×10^{-16}

جدول ۳. اطلاعات مربوط به تابع f_2 با تقریب اولیه $x_0=0.9$

	T	n	x_n	$f(x_n)$
CN	0.781660	5	0.286017295428356	-2.2×10^{-16}
SCH	1.171487	5	0.286017295428356	-4.4×10^{-16}
NG	0.968011	3	0.286017295428356	-2×10^{-15}
AN	0.702713	3	0.286017295428356	-4.4×10^{-16}
MN	0.624448	3	0.286017295428356	-2.2×10^{-16}
HN	0.639550	3	0.286017295428356	-6.7×10^{-16}
HL	0.734477	3	0.286017295428356	-2.2×10^{-16}
AN5	0.640121	2	0.286017295428356	-2.2×10^{-16}
MN5	0.609457	2	0.286017295428356	-4.4×10^{-16}
HN5	0.374678	2	0.286017295428356	-6.7×10^{-16}
HN6	0.780925	2	0.286017295428356	-2.2×10^{-16}

جدول ٤. اطلاعات مربوط به تابع f_3 با تقریب اولیه $x_0 = 0$

نتیجه گیری

اصلاحاتی از روش نیوتن با مراتب همگرایی بالا را معرفی نمودیم که روش های مرتبه پنج دارای شاخص کارایی بهتری هستند. روش های معرفی شده در مقایسه با روش های شرودر و هالی به دلیل عدم نیاز به محاسبه مشتق دوم به مجموعه وسیع‌تری از توابع قابل استفاده هستند.

روش NG با این که نسبت به سایر روش های جدید مدت زمان اجرای زیادی لازم دارد ولی در حل دستگاه های معادلات به دلیل نیاز به محاسبه تنها یک ماتریس ژاکوبین بر روش هایی همچون HN،AN ، AN5 و HN5 از لحاظ تعداد محاسبات کمتر ارجحیت خواهد داشت.

آزمون های عددی نشان می‌دهند که روش های جدید از لحاظ تعداد تکرارها (برای رسیدن به دقت یکسان) مقرون به صرفه‌اند. از بین کلیه روش های مورد بحث زمآن های انجام محاسبات برای روش HN5 نسبت به بقیه روش ها کمتر است و لذا این روش بر دیگر روش ها ارجحیت دارد.

منابع

[1] Frontini M., Sormani E., (2003), Some variants of Newton’s method with third-order convergence, J. Comput. Appl. Math. 140, 419-426.

[2] Frontini M., Sormani E., (2003), Modified Newton’s method with third convergence and multiple roots, J. Comput. Appl. Math. 156, 345-354.

[3] Homeier H.H.H., (2005), On Newton-type methods with cubic convergence, J. Comput. Appl. Math. 176, 425-432.

[4] Gautschi W., (1997), Numerical Analysis: An Introduction, Birkhauser, Basel.

[5] Grau M., Diaz-Barrero J.L., (2006), An improvement of the Euler-Chebyshev iterative method, J. Math. Anal. Appl. 315, 1-7.

[6] Ozban A.Y., (2004), Some new variants of Newton’s method, Appl. Math. Lett. 17, 677-682.

[7] Weerakoon S., Fernando T.G.I., (2000), A variant of Newton’s method with accelerated third-order convergence, Appl. Math. Lett. 13, 87-93.

[8] Ahdi Aghdam, S. REzapour, R., Ghosi, S., (2010) Newton like Iterative Methods for solving the system of Nonlinear Equations, Journal of Applied Mathematics, 23, 1-10.