مجله ریاضیات کاربردی واحد لاهیجان، سال هفتم، شماره ۳ (پیاپی ۲۶)، پاییز ۸۹، ص ص ۳۳-۲۱
شاپا ۶۰۸۳-۲۰۰۸

# بهبود ورودی‌ها و خروجی‌های واحدهای تصمیم گیرنده به وسیله‌ی جهت های بهینه ؛ رویکردی از تحلیل پوششی داده‌ها

**حامد ژیانی رضایی[۱] *، سید علیرضا داودی[۲]، غزاله میرزایی[۱]**
[۱] گروه ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد مشهد
[۲] گروه ریاضی ، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد نیشابور

رسید مقاله: ۸۹/۳/۶
پذیرش مقاله: ۸۹/۶/۳۰

## چکیده

گاهی در مسایل عملی ممکن است جهت حرکت یک واحد تصمیم گیرنده ($DMU$) به سوی مرز کارایی یا به عبارت دیگر نحوه‌ی بهبود ورودی-خروجی‌های آن، به شکل خاصی، برای کاربر اهمیت داشته باشد. این جهت ها گاهی از ابتدا معلوم هستند [۱]، اما در بعضی موارد، جهت خاصی که هدف کاربر را پوشش می‌دهد می‌تواند مجهول باشد. در این مقاله، نمونه هایی از این اهداف، مطرح و الگوریتم هایی برای یافتن جهت های برآورد کننده‌ی این اهداف ارایه خواهد شد. مسایلی که مورد بررسی قرار خواهند گرفت عبارتند از: بهبود ورودی-خروجی‌ها با حداقل تغییرات در مقادیر آن ها و یافتن جهت حرکت به سمت مرز، برای حالتی که ورودی- خروجی‌ها برای بهبود، نسبت به هم اولویت دارند.

**کلمات کلیدی:** تحلیل پوششی داده‌ها ، جهت های بهینه، ابرصفحه های قوی، اولویت مطلق.

## ۱ مقدمه

تحلیل پوششی داده‌ها ($DEA$)، یک روش غیر پارامتری است که از آن برای ارزیابی کارایی واحدهایی با چندین ورودی و چندین خروجی استفاده می‌شود. [۲-۳] کارایی هر واحد بر اساس فاصله‌ی آن تا مرز مجموعه‌ی امکان تولید محاسبه می‌شود. نحوه‌ی نزدیک شدن $DMU$ به مرز مجموعه‌ی امکان تولید (اصطلاحاً حرکت) منجر به ارایه‌ی مدل‌های مختلف ارزیابی می‌شود. در بعضی مدل‌های $DEA$ مانند مدل‌های اندازه‌ی ناکارایی وابسته به متغیرهای کمکی جهت دار و تابع فاصله‌ی تکنولوژی جهت دار که توسط وبر و فوکویوما در [۱] معرفی شده‌اند، جهت های حرکت به سوی مرز، معین هستند. اما گاهی ممکن است برای رسیدن به مرز یا بهبود ورودی-خروجی‌ها، جهت خاصی مطلوب باشد که از ابتدا معلوم نباشد.

*عهده دار مکاتبات
آدرس الکترونیکی: hz_rezai@hotmail.com

یکی از حالات این است که $DMU$ بخواهد با حداقل تغییرات در مقادیر ورودی و خروجی به مرز برسد، در این صورت مسیری مورد نظر خواهد بود که از $DMU$ ی مورد ارزیابی به سمت نزدیکترین ابرصفحه‌ی سازنده‌ی مجموعه‌ی امکان تولید ($PPS$) حرکت کند.

حالت دیگری که در این مقاله بررسی می‌شود، زمانی است که کاربر برای بهبود ورودی ها و خروجی‌های $DMU$ها اولویتی قائل باشد. به عنوان مثال کارخانه های تولید نان صنعتی را به عنوان $DMU$ ها در نظر بگیرید که بتوانند با کاهش دو ورودی گندم و جو و صرف هزینه‌ی آن در بخشی دیگر، کارایی خود را بالا ببرند. اما با توجه به تقاضای بیشتر نان گندم نسبت به نان جو، کاهش جو را بر کاهش گندم ترجیح دهند. دراین صورت، کاهش ورودی جو نسبت به گندم در اولویت قرار می‌گیرد.

در موارد مطرح شده، این مطلب در نظر گرفته می‌شود که جهت به ابر صفحه ای برسد که در میان سایر ابرصفحه های کارای قوی سازنده‌ی $PPS$، دارای ضرایبی باشد که متناظر با وزن‌های بهینه برای $DMU$ ی مورد ارزیابی (وزن هایی که ماکزیمم کارایی را به آن $DMU$ نسبت می‌دهند) هستند. در بخش ۲ مقدماتی را از $DEA$ ارایه خواهیم کرد. در بخش ۳ نحوه‌ی نزدیک شدن یک $DMU$ به مرز کارایی را بر اساس حداقل تغییرات در ورودی و خروجی‌ها بررسی خواهیم کرد. بخش ۴ شامل ارایه‌ی روش جهت حرکت $DMU$ به سمت مرز کارایی بر اساس اولویت بندی بین ورودی‌ها و خروجی‌ها می‌باشد. بخش ۵ شامل مثال عددی و بخش ۶ نیز نتیجه گیری را ارایه می‌دهد.

## ۲ مقدمات $DEA$

یک مجموعه با $n$ واحد تصمیم گیرنده ($DMU$) را در نظر بگیرید که هر $DMU_j$ $\left(j=1,...,n\right)$ از $m$ ورودی $x_{ij}$ $\left(i=1,...,m\right)$ برای تولید $s$ خروجی $y_{rj}$ $\left(r=1,...,s\right)$ استفاده می‌کند. فرض کنید بردارهای ورودی و خروجی برای هر $DMU_j$ که $j=1...$ ،$n$ ، به صورت $\left(x_j, y_j\right)$ نمایش داده شود، به طوری که برای هر $j$، مؤلفه های این بردار نامنفی باشند و حداقل یک مؤلفه‌ی هر بردار ورودی و حداقل یک مؤلفه‌ی هر بردار خروجی مثبت باشد. مجموعه‌ی همه‌ی $(x, y)$ های شدنی را مجموعه‌ی امکان تولید ($PPS$) نامیده و با $T$ نشان می‌دهند که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$T=\{\left(x,y\right) \mid \text{ورودی } x \text{ بتواند خروجی } y \text{ را تولید کند}\}$$

مجموعه‌ی امکان تولید با بازده به مقیاس متغیر به صورت زیر تعریف می‌شود [۴]:

$$T_v=\left\{\left(x,y\right) \mid x\geq\sum_{j=1}^{n}x_j\lambda_j\,,\,y\leq\sum_{j=1}^{n}y_j\lambda_j\,,\,\sum_{j=1}^{n}\lambda_j=1\,,\,\lambda_j\geq0\,,\,j=1,...,n\right\}$$

بنکر، چارنز و کوپر [۴] مدل $BCC$ را برای ارزیابی کارایی یک $DMU$ به صورت زیر معرفی کردند :

$$\begin{aligned} &Min\,\theta \\ &s.t.\ (\theta x_0, y_0)\in T_v \end{aligned}$$

که با استفاده از تعریف $PPS$ منجر به مدل زیر خواهد شد که مدل $BCC$ در ماهیت ورودی نامیده می‌شود:

$$\begin{aligned} &Min\ \theta \\ &s.t.\ \sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_{ij}, && i=1,...,m, \\ &\quad \sum_{j=1}^{n}\lambda_j y_{rj}, && r=1,...,s, \\ &\quad \sum_{j=1}^{n}\lambda_j = 1, \\ &\quad \lambda_j \geq 0, && j=1,...,n, \\ &\quad \theta \ \ free. \end{aligned} \tag{۱}$$

می توان نشان داد که این مدل با مدل جهت دار با جهت $\begin{pmatrix}\mathbf{d}^x \\ \mathbf{d}^y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\mathbf{1} \\ \mathbf{0}\end{pmatrix}$ که در آن $\mathbf{1} \in R^m$ و $\mathbf{0} \in R^s$ معادل است.

روش معمول برای تصویر $DMU$ تحت ارزیابی بر روی مرز کارایی استفاده از مدل دو مرحله‌ای است. در مرحله‌ی اول مدل (۱) حل می‌شود و در مرحله‌ی دوم مدل زیر

$$\begin{aligned} &Max\ \ \sum_{i=1}^{m} s_i^- + \sum_{r=1}^{s} s_r^+ \\ &s.t.\quad s_i^- = \theta^* x_{io} - \sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_{ij} && i=1,...,m, \\ &\quad s_r^+ = \sum_{j=1}^{n}\lambda_j y_{ij} - y_{ro} && r=1,...,s, \\ &\quad \sum_{j=1}^{n}\lambda_j = 1, \\ &\quad \lambda_j \geq 0, && j=1,...,n, \\ &\quad s_i^- \geq 0, && i=1,...,m, \\ &\quad s_r^+ \geq 0, && r=1,...,s. \end{aligned} \tag{۲}$$

که در آن $\theta^*$ مقدار بهینه‌ی مدل (۱) است. حال مختصات تصویر $DMU_o$ از روابط زیر محاسبه می شود.

$$\hat{x}_{io} = \sum_{j=1}^{n}\lambda_j^* x_{ij} = \theta^* x_{io} - s_i^{-*} \qquad i=1,...,m,$$
$$\hat{y}_{ro} = \sum_{j=1}^{n}\lambda_j^* y_{rj}^* = y_{ro} + s_r^{+*} \qquad r=1,...,s.$$

**تعریف ۱** فرض کنید $(\theta^*, \lambda^*, s^{-*}, s^{+*})$ جواب بهینه‌ی مدل دو مرحله‌ای باشد. اگر در مرحله‌ی اول $\theta^* = 1$ و در مرحله‌ی دوم همه‌ی متغیرهای کمکی صفر باشند یعنی $\mathbf{0} = (s^{-*}, s^{+*})$، آنگاه $DMU_o$ تحت ارزیابی را $BCC$ – کارا (کارای قوی) گویند.

یکی دیگر از مدل‌هایی که در $DEA$ معرفی شده است مدل جمعی نام دارد. این مدل مستقل از ماهیت است و به صورت زیر فرمول بندی می شود:

$$
\begin{aligned}
&Max \quad \sum_{i=1}^{m} s_i^- + \sum_{r=1}^{s} s_r^+ \\
&s.t. \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} + s_i^- = x_{io} && i=1,\dots,m, \\
&\qquad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{ij} - s_r^+ = y_{ro} && r=1,\dots,s, \\
&\qquad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1, \\
&\qquad \lambda_j \ge 0, && j=1,\dots,n, \\
&\qquad s_i^- \ge 0, && i=1,\dots,m, \\
&\qquad s_r^+ \ge 0, && r=1,\dots,s.
\end{aligned}
\tag{۳}
$$

مدل جمعی عددی برای کارایی به دست نمی‌دهد و فقط تشخیص می‌دهد که $DMU_o$ تحت ارزیابی کارا هست یا نه. برخلاف مدل (۱) نحوه ی حرکت در مدل جمعی به صورت غیرشعاعی و در راستای کاهش مولفه های ورودی و افزایش مولفه های خروجی است. می توان نشان داد این مدل با حالت خاصی از مدل جهتدار با جهت $\begin{pmatrix} \mathbf{d}^x \\ \mathbf{d}^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$ معادل است که در آن $\mathbf{1} \in R^m$ و $\mathbf{1} \in R^s$.

**تعریف ۲** $DMU_o$، $ADD$-کاراست اگر در حل مدل (۳) مقدار بهینه‌ی تابع هدف صفر باشد.

**قضیه ۱** $DMU_o$ $BCC$- کاراست اگرو فقط اگر $ADD$-کارا باشد.

برهان: به [۵] مراجعه کنید.

**قضیه ۲** فرض کنید $DMU_o$ ، $BCC$-کارا باشد، دراین صورت ضرایب نرمال شده‌ی $\left(v^*, u^*, u_0^*\right)$ از ابرصفحه‌ی تکیه کننده‌ی $H$ در $\left(x_o, y_o\right)$، یک جواب بهینه‌ی مدل $BCC$ می‌باشد و بالعکس.

**برهان** به [۵] مراجعه کنید.

## ۳ بهبود ورودی-خروجی‌ها با حداقل تغییرات

**تعریف۳** فرض کنید که جهت های حرکت به سمت مرز معین نباشند، از بین همه‌ی جهت هایی که $DMU_o$ را بر مرز کارایی تصویر می‌کنند، آن هایی را *بهینه* می‌نامیم که اولاً $DMU_o$ را بر ابرصفحه‌ای از $PPS$ تصویر کنند که ضرایب آن متناظر با وزن‌هایی باشند که بیشترین کارایی را به $DMU_o$ اختصاص می‌دهند، ثانیاً مجموع مؤلفه‌های این بردارهای جهتدار نسبت به سایر جهت هایی که در شرط اول صدق می‌کنند، کمترین مقدار را داشته باشند. (متر فاصله تا مرز را نرم یک درنظر می‌گیریم.)

**تعیین جهت حرکت به سمت نزدیکترین ابرصفحه:** بنا به قضیه ۲ برای به دست آوردن کارایی نسبی یک $DMU$ می توان از ضرایب ابرصفحه های قوی سازای $PPS$ استفاده کرد. برای پیدا کردن جهت های بهینه برای حرکت $DMU_o$ به سمت مرز کارایی ابتدا معادله‌ی همه‌ی ابرصفحه‌های قوی و سازنده‌ی $PPS$ را به دست می‌آوریم. کارایی نسبی $DMU_o$ را توسط وزن‌هایی که متناظر با ضرایب این ابرصفحه‌ها می‌باشند محاسبه کرده، ابرصفحه یا ابرصفحه‌هایی که به ازای آن ها بیشترین مقدار کارایی به $DMU_o$ نسبت داده می‌شوند را مشخص می‌کنیم. با قرار دادن مختصات $DMU_j$ ها $\left( j=1,...,n \right)$ در معادله‌ی این ابرصفحه‌ها، $DMU$هایی که روی هر یک از این ابرصفحه ها قرار دارند را یافته و کمترین فاصله‌ی $DMU_o$ را تا این ابرصفحه‌ها به دست می آوریم. این مراحل در الگوریتم زیر ارایه می‌شوند:

### الگوریتم پیشنهادی برای پیدا کردن جهت های بهینه

**مرحله اول** معادله‌ی همه‌ی ابرصفحه‌های کارای قوی سازنده‌ی $PPS$ را توسط روش ارایه شده در [۶] به دست آورید.

**مرحله دوم** به کمک رابطه‌ی $\theta_p = \dfrac{u_p y_o - u_{0p}}{v_p x_o}$ $\left( p=1,...,t \right)$ که $t$ تعداد ابرصفحه‌های قوی و سازنده‌ی $PPS$ است، کارایی نسبی $DMU_o$ را توسط وزن‌هایی که متناظر با ضرایب ابرصفحه‌های قوی سازنده‌ی $PPS$ هستند، به دست آورده، قرار دهید:

$$\theta^* = \max_{p=1,...,t} \left\{ \theta_p \right\}$$

**مرحله سوم** ابرصفحه‌هایی را که به ازای آن ها $\theta_p = \theta^*$، در مجموعه‌ی $H$ قرار دهید. ($H$ مجموعه‌ی ابر-صفحه‌های کارا و سازنده از $PPS$ می‌باشد که ضرایب آن متناظر با وزن‌هایی هستند که بیشترین کارایی را به $DMU_o$ اختصاص می‌دهند) فرض کنید:

$$H = \left\{ H_1,...,H_h \right\} \qquad h \le t$$

**مرحله چهارم** به کمک معادله‌ی ابرصفحه‌های $H_1$،...، $H_n$، $DMU$ هایی را که روی هر یک قرار دارند بیابید و آن ها را به ترتیب در مجموعه‌های $M_{H_1}$،...، $M_{H_n}$ قرار دهید. ( $M_{H_L}$ $\left( L=1,...,h \right)$ مجموعه‌ی اندیس $DMU$ های کارایی است که مختصات آن ها در ابرصفحه‌ی $H_L$ صدق می‌کنند.)

**مرحله پنجم** برای به دست آوردن جهت های بهینه، (جهت هایی که با کمترین فاصله، $DMU_o$ را بر ابرصفحه‌ای با ضرایب متناظر با وزن‌های بهینه برای $DMU_o$ تصویر کند) مدل زیر را به ازای $L=1$ ، ... ،h حل کنید:

$$
\begin{aligned}
s_L = Min \quad & \sum_{i=1}^{m} s_i^- + \sum_{r=1}^{s} s_r^+ \\
s.t. \quad & \sum_{j\in M_{H_L}} \lambda_j x_{ij} = x_{io} - s_i^-, \qquad i = 1,\dots,m, \\
& \sum_{j\in M_{H_L}} \lambda_j y_{rj} = y_{ro} + s_r^+, \qquad r = 1,\dots,s, \\
& \sum_{j\in M_{H_L}} \lambda_j = 1, \\
& \lambda_j \ge 0, \qquad j \in M_{H_L}, \\
& s_i^- \ge 0, \qquad i = 1,\dots,m, \\
& s_r^+ \ge 0, \qquad r = 1,\dots,s.
\end{aligned} \tag{۴}
$$

و قرار دهید:

$$s^* = Min_{L=1,\dots,h}\{s_L\}$$

**مرحله ششم** جهت های بهینه به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\vec{g}^x = \sum_{j\in M_{H_L}^*} x_{ij}\lambda_j - x_{io} = -\vec{s}_i^- \qquad i = 1,\dots,m$$

$$\vec{g}^y = \sum_{j\in M_{H_L}^*} y_{rj}\lambda_j - y_{ro} = \vec{s}_r^+ \qquad r = 1,\dots,s$$

که در آن، $M_{H_L}^*$ مجموعه‌ی مراجعی هستند که در حل مدل متناظر آن ها، $s^* = s_L$.

مجموعه‌ی $M_{H_L}^*$ (یا ابرصفحه‌ی متناظر با آن) ممکن است منحصر بفرد نباشد، یعنی بیش از یک ابرصفحه با شرایط مذکور می‌نیمم فاصله تا $DMU_o$ را داشته باشد.

در مدل ارایه شده در مرحله‌ی پنجم، چون $j \in M_{H_L}\ (L=1,\dots,h)$، و از آنجا که اعضای $M_{H_L}$ همگی بر یک ابرصفحه‌ی قوی سازنده‌ی $PPS$ واقعند، تنها زمانی تابع هدف می‌تواند صفر شود که $DMU_o$ نیز روی این ابرصفحه قرار داشته باشد، یعنی اگر $\left(\lambda_j^*, s_i^{-*}, s_r^{+*}\right)$ جواب بهینه‌ی به دست آمده از مدل (۴) باشد بطوریکه برای $i=1$، ...، m و $r=1$، ...، s و $s_i^{-*}=0$ و $s_r^{+*}=0$ آنگاه:

$$
\begin{aligned}
& \sum_{j\in M_{H_L}^*} \lambda_j x_{ij} = x_{io} \qquad i = 1,\dots,m \\
& \sum_{j\in M_{H_L}^*} \lambda_j y_{rj} = y_{ro} \qquad r = 1,\dots,s
\end{aligned} \tag{۵}
$$

که با توجه به این که $\sum_{j\in M_{H_L}} \lambda_j^* = 1$ و $\lambda_j^* \ge 0$ $\left(j \in M_{H_L}\right)$، دو تساوی (۵) بیان می‌کنند که $DMU_o$ با ترکیب محدب $DMU_j$ هایی $\left(j \in M_{H_L}\right)$ ساخته می‌شود که همگی روی ابرصفحه‌ی $H_L$ واقعند.

اگرچه ظاهر مدل (۴) شبیه به مدل جمعی با تابع هدف می‌نیمم می‌باشد، ولی چون مجموعه‌ی $DMU$ های مشاهده شده ایکه در این مدل در نظر گرفته می‌شوند بجای $j=1,\dots,n$، $j\in M_{H_L}$ $(L=1,\dots,h)$ می‌باشند و اعضای $M_{H_L}$ همگی بر یک ابرصفحه واقعند، لذا نتیجه‌ی به دست آمده از حل این مدل با آنچه از حل مدل جمعی با تابع هدف می‌نیمم سازی به دست می‌آید متفاوت خواهد بود. هر ترکیب محدب از $DMU$ های واقع بر یک ابرصفحه، در ناحیه محدب ایجاد شده توسط همین $DMU$ ها و در نتیجه روی ابرصفحه‌ی متعلق به آن ها، واقع خواهد شد. علاوه بر این، به دلیل وجود اصل امکان پذیری در اصول $PPS$، ممکن است تصویر

$DMU$ مورد ارزیابی با ترکیبی از اعضای $M_{H_L}$، اما در نقطه ای خارج از ناحیه‌ی محدود شده توسط ترکیب محدب این اعضا تصویر شود. دراین صورت ممکن است تصویر خارج از $PPS$ بر ابرصفحه‌ی مذکور تصویر شود که غیر قابل قبول خواهد بود. لذا، برای اطمینان از اینکه تصویر $DMU$ ی مورد ارزیابی حتماً در ناحیه‌ی محدودشده توسط ترکیب محدب اعضای $M_{H_L}$ تصویر شود، قید $\lambda_j \geq 0 \ \left( j \in M_{H_L} \right)$ را نیز به مدل می-افزائیم. فرض کنید $\left( \lambda_j^*, s_i^{-*}, s_r^{+*} \right)$ جواب بهینه‌ی به دست آمده از مدل (۴) باشد. طبق تعریف تصویر، مختصات تصویر به دست آمده از حل این مدل، به صورت زیر است:

$$\hat{x}_{io} = \sum_{j \in M_{H_L}} \lambda_j^* x_{ij} = x_{io} - s_i^{-*}, \qquad i = 1, \ldots, m,$$
$$\hat{y}_{ro} = \sum_{j \in M_{H_L}} \lambda_j^* y_{rj} = y_{ro} + s_r^{+*}, \qquad r = 1, \ldots, s.$$

که در آن $\lambda_j^* \geq 0$ و $\sum_{j \in M_{H_L}} \lambda_j^* = 1$

به عبارت دیگر $\left( \hat{x}, \hat{y} \right) = \left( \sum_{j \in M_{H_L}} x_{ij} \lambda_j^*, \sum_{j \in M_{H_L}} y_{rj} \lambda_j^* \right)$، به طوری که $\lambda_j \in [0,1]$ , $\sum_{j \in M_{H_L}} \lambda_j = 1$ یعنی $\left( \hat{x}, \hat{y} \right)$ ترکیب محدب اعضای $M_{H_L}$ می‌باشد، لذا برخلاف مدل جمعی (با تابع هدف می‌نیمم)، در این جا تصویر نمی‌تواند بر مرز ضعیف واقع شود، چون در واقع در مدل (۴) ناحیه‌ی $PPS$، تنها ناحیه‌ی محدب ایجاد شده توسط همین $DMU$ هاست.

## ٤ بهبود ورودی-خروجی‌ها با اولویت مطلق

بدون وارد شدن خلل به کلیت مساله، فرض کنید برای $DMU_O$، بهبود ورودی-خروجی‌ها به ترتیب $x_1$، ...، $x_m$ و $y_1$، ...، $y_s$ اولویت بندی شده باشند (این اولویت می‌تواند ابتدا برای خروجی‌ها و بعد ورودی‌ها، ترکیب مختلطی از ورودی- خروجی‌ها و همچنین می‌تواند برای $DMU$ های مختلف، یکسان یا متفاوت باشد). چون اختصاص وزن های بهینه ای که بیشترین کارایی را به $DMU$ی مورد ارزیابی اختصاص می‌دهند، در اولویت قرار دارد، ابتدا مراحل اول تا چهارم الگوریتم بخش۳ را برای این $DMU$ اجرا می کنیم. لذا هم اکنون، ابر صفحه یا ابرصفحه هایی که ضرایب آن ها متناظر با این وزن های بهینه اند، معلوم هستند.

برای حرکت به سمت این ابرصفحه با توجه به اولویت مفروض بین ورودی-خروجی‌ها، بجای تابع هدف مدل (۴)، قرار می‌دهیم: $\min \quad s_1^-$

اگر جواب بهینه منحصربفرد بود این جواب را به عنوان جواب بهینه‌ی مسأله می‌پذیریم. در غیراین صورت، فرض می کنیم مجموعه جواب های چندگانه‌ی به دست آمده مجموعه‌ی $K_1^-$ باشد. حال، $s_2^-$ را روی $K_1^-$، می‌نیمم می کنیم. مجدداً اگر جواب بهینه منحصربفرد بود حل مسأله پایان می‌پذیرد و درغیراین صورت $s_3^-$ را روی مجموعه‌ی جدید جواب های چندگانه $K_2^-$ می‌نیمم می کنیم. این روند را تا به دست آمدن جوابی منحصر بفرد یا تا وقتی که برای آخرین مورد (در اینجا برای $s_s^+$) این می‌نیمم سازی انجام شود، ادامه می‌دهیم.

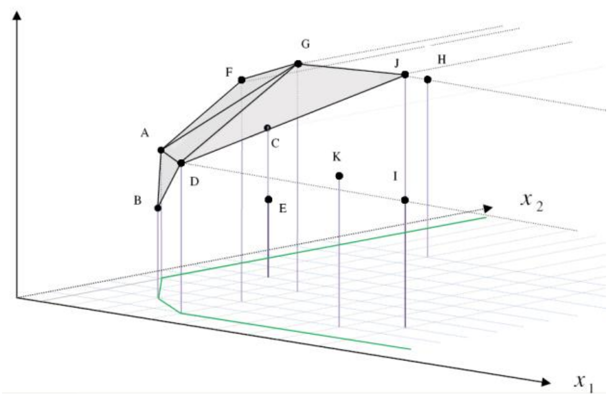
## ۵ مثال عددی

جدول ۱ مقادیر ورودی و خروجی را برای یازده $DMU$ نشان می‌دهد.

| DMU | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 1 | 3 | 3 | 5 | 3 | 3 | 5 | 4 | 10 | 10 | 9 |
| $x_2$ | 4 | 2 | 6 | 1 | 6 | 5 | 5 | 10 | 3 | 3 | 2 |
| $y$ | 5 | 4 | 6 | 6 | 3 | 8 | 9 | 7 | 5 | 10 | 6 |

**جدول ۱.** مقادیر ورودی و خروجی برای یازده $DMU$

PPS ایجاد شده از DMU های جدول ۱ در شکل۱ نشان داده شده اند:




**شکل ۱.** نمایش موقعیت $DMU$ های جدول ۱

اگر مثال ۱ را توسط فرم پوششی دو مرحله ای مدل $BCC$ حل کنیم، $DMU$ های کارای قوی به صورت زیر به دست می آیند:

$$F=\{A,B,D,F,G,J\}$$

با استفاده از الگوریتم و نمادهای ارایه شده در [۶]می توان تمام ابرصفحه های سازای قوی $PPS$ را به دست آورد. برای این منظور ابتدا برای هر یک از اعضای $F$مجموعه‌های $F_j$ و $\bar{F}_j$ را تعیین می‌کنیم. سپس زیرمجموعه‌های $m+s=3$ عضوی از $F$ را با شرایط ذکر شده در الگوریتم انتخاب می‌کنیم، خواهیم داشت:

$$F_A=\{A,B,D,F,G\} \qquad \bar{F}_A=\{J\}$$
$$F_B=\{A,B,D\} \qquad \bar{F}_B=\{F,G,J\}$$
$$F_D=\{A,B,D,G,J\} \qquad \bar{F}_D=\{F\}$$
$$F_F=\{A,F,G\} \qquad \bar{F}_F=\{B,D,J\}$$
$$F_G=\{A,D,F,G,J\} \qquad \bar{F}_G=\{B\}$$
$$F_J=\{D,G,J\} \qquad \bar{F}_J=\{A,B,F\}$$

اولین زیرمجموعه‌ی ۳ عضوی از $F$ را $\{A,B,D\}$ انتخاب می کنیم، ابرصفحه ی ایجاد شده به صورت زیر است:

$$\begin{vmatrix} x_1-1 & x_2-4 & y-5 \\ 2 & -2 & -1 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \to \quad -5x_1-6x_2+2y=-19$$

دومین زیر مجموعه را به صورت $\{A,F,G\}$ انتخاب می کنیم، ابرصفحه ی ایجاد شده به صورت زیر است:

$$\begin{vmatrix} x_1-3 & x_2-5 & y-8 \\ -2 & -1 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \to \quad -x_1-4x_2+2y=-7$$

سومین زیرمجموعه را به صورت $\{A,G,D\}$ انتخاب می کنیم، ابرصفحه ی ایجاد شده به صورت زیر است:

$$\begin{vmatrix} x_1-1 & x_2-4 & y-5 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \to \quad 13x_1+12x_2-16y=-19$$

و آخرین زیرمجموعه به صورت $\{D,G,J\}$ انتخاب می‌شود، ابرصفحه ی ایجاد شده به صورت زیر است:

$$\begin{vmatrix} x_1-5 & x_2-1 & y-6 \\ 0 & 4 & 3 \\ 5 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \quad \to \quad 2x_1+3x_2-4y=-11$$

معادله‌ی ابرصفحه‌های قوی سازنده‌ی $PPS$ به صورت زیر هستند:

$$H_1: \quad 2y-5x_1-6x_2+19=0$$
$$H_2: \quad 2y-x_1-4x_2+7=0$$
$$H_3: \quad -16y+13x_1+12x_2+19=0$$
$$H_4: \quad -4y+2x_1+3x_2+11=0$$

حال اگر $DMU_E$ را به عنوان $DMU$ تحت ارزیابی انتخاب کنیم، به کمک رابطه‌ی $\theta_p = \dfrac{u_P y_E - u_{0P}}{v_P x_E}$ که $P=1$،...، 4 کارایی نسبی $DMU_E$ را توسط وزن‌هایی که متناظر با ضرایب ابرصفحه‌های قوی به دست آمده هستند، به صورت زیر به دست می آوریم:

$\theta_1 = 0.4901$ ،$\theta_2 = 0.4814$ ،$\theta_3 = 0.2612$ و $\theta_4 = 0.0416$

قرار می‌دهیم:

$$\theta^* = Max_{P=1,2,3,4}\{\theta_P\} = \theta_1$$
$$H = \{H_1\}$$
$$M_{H_1} = \{A,B,D\}$$

حال برای به دست آوردن جهت‌هایی که با کمترین فاصله (الگوریتم ارایه شده در بخش ۳) ، $DMU_E$ را روی ابرصفحه‌ای با ضرایب متناظر با وزن‌های بهینه برای $DMU_E$ تصویر می‌کند، مدل زیر را حل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} s_1 = \min \quad & \sum_{i=1}^{2} s_i^- + s_1^+ \\ s.t. \quad & \sum_{j \in M_{H_1}} \lambda_j x_{ij} = x_{iE} - s_i^- \qquad i = 1,2 \\ & \sum_{j \in M_{H_1}} \lambda_j y_{rj} = y_{rE} + s_r^+ \qquad r = 1 \\ & \sum_{j \in M_{H_1}} \lambda_j = 1 \\ & \lambda_j \geq 0, \qquad j \in M_{H_1} \\ & s_i^- \geq 0, \qquad i = 1,2 \\ & s_r^+ \geq 0, \qquad r = 1 \end{aligned}$$

اگر مقادیر $x_{1A}$، $x_{1B}$، $x_{1D}$، $x_{2A}$، $x_{2B}$، $x_{2D}$، $y_A$ ، $y_B$ و $y_D$ را در مدل فوق قرار دهیم، داریم:

$$\begin{aligned} & Min\ s_1^- + s_2^- + s_1^+ \\ & s.t.\ \lambda_A + 3\lambda_B + 5\lambda_D = 3 - s_1^-, \\ & \quad 4\lambda_A + 2\lambda_B + \lambda_D = 6 - s_2^-, \\ & \quad 5\lambda_A + 4\lambda_B + 6\lambda_D = 3 + s_1^+, \\ & \quad \lambda_A + \lambda_B + \lambda_D = 1, \\ & \quad \lambda_A \geq 0, \\ & \quad \lambda_B \geq 0, \\ & \quad \lambda_D \geq 0, \\ & \quad s_1^- \geq 0, s_2^- \geq 0, s_1^+ \geq 0. \end{aligned}$$

مقادیر $s_1^-$، $s_2^-$، $s_1^+$، $\lambda_A$، $\lambda_B$ و $\lambda_D$ با استفاده از نرم افزار $Lindo$ به صورت زیر به دست می آیند:

$$s_1^- = 0,\ s_2^- = 4,\ s_1^+ = 1,\ \lambda_A = 0,\ \lambda_B = 1,\ \lambda_D = 0$$

قرار می‌دهیم: $s^* = s_1$

جهت‌های بهینه به صورت زیر به دست می آیند:

$$\begin{aligned} & \vec{g}^x = \sum_{j \in M_{H_L}^*} x_{ij} \lambda_j - x_{iE} = -\vec{s}_i^- \qquad i = 1,2 \\ & \vec{g}^y = \sum_{j \in M_{H_L}^*} y_{rj} \lambda_j - y_{rE} = \vec{s}_r^+ \qquad r = 1 \\ & \vec{g}^x = \left(-s_1^-, -s_2^-\right)\ ,\ \vec{g}^y = s_1^+ \\ & \vec{g} = \left(\vec{g}^x, \vec{g}^y\right) = (0, -4, 1) \end{aligned}$$

مدل (۵) جوابی متفاوت با مدل جمعی دارد. اگر مثال۱ را به جای مدل (۵) با مدل جمعی (۳) حل کنیم، داریم:

$$
\begin{aligned}
&Max\ \ s_1^- + s_2^- + s_1^+\\
&s.t.\ \ \lambda_A + 3\lambda_B + 3\lambda_C + 5\lambda_D + 3\lambda_E + 3\lambda_F + 5\lambda_G + 4\lambda_H + 10\lambda_I + 10\lambda_J + 9\lambda_K = 3 - s_1^-\\
&\quad 4\lambda_A + 2\lambda_B + 6\lambda_C + 1\lambda_D + 6\lambda_E + 5\lambda_F + 5\lambda_G + 10\lambda_H + 3\lambda_I + 3\lambda_J + 2\lambda_K = 6 - s_2^-\\
&\quad 5\lambda_A + 4\lambda_B + 6\lambda_C + 6\lambda_D + 3\lambda_E + 8\lambda_F + 9\lambda_G + 7\lambda_H + 5\lambda_I + 10\lambda_J + 6\lambda_K = 3 + s_1^+\\
&\quad \lambda_A + \lambda_B + \lambda_D + \lambda_C + \lambda_D + \lambda_E + \lambda_F + \lambda_G + \lambda_H + \lambda_I + \lambda_J + \lambda_K = 1\\
&\quad \lambda_j \ge 0 \quad j = A,\dots,K\\
&\quad s_1^- \ge 0, s_2^- \ge 0, s_1^+ \ge 0
\end{aligned}
$$

با استفاده از نرم افزار $Lindo$ به دست می‌آید:

$$s_1^- = 2, s_2^- = 2, s_1^+ = 2, \lambda_A = 1, \lambda_B = 0, \dots, \lambda_K = 0$$

اگر مثال ۱ را به روش دوم (اولویت مطلق ـ روش ارایه شده در بخش ۴) حل کنیم ابتدا مراحل اول تا چهارم الگوریتم بخش۳ را برای این $DMU$ اجرا می‌کنیم. لذا هم اکنون، ابر صفحه یا ابرصفحه هایی که ضرایب آن ها متناظر با این وزن های بهینه اند، معلوم هستند. فرض می کنیم اولویت ها بترتیب ورودی اول، ورودی دوم و خروجی باشد. برای حرکت به سمت این ابرصفحه با توجه به اولویت مفروض بین ورودی-خروجی‌ها، مدل زیر را حل می‌کنیم:

$$
\begin{aligned}
&Min\ \ s_1^-\\
&s.t.\ \ \lambda_A + 3\lambda_B + 5\lambda_D = 3 - s_1^-,\\
&\quad 4\lambda_A + 2\lambda_B + \lambda_D = 6 - s_2^-,\\
&\quad 5\lambda_A + 4\lambda_B + 6\lambda_D = 3 + s_1^+,\\
&\quad \lambda_A + \lambda_B + \lambda_D = 1,\\
&\quad \lambda_A \ge 0,\\
&\quad \lambda_B \ge 0,\\
&\quad \lambda_D \ge 0,\\
&\quad s_1^- \ge 0, s_2^- \ge 0, s_1^+ \ge 0.
\end{aligned}
$$

مساله دارای جواب بهینه ی چندگانه با مقدار بهینه ی تابع هدف $s_1^{-*} = 0$ می باشد.

چون جواب بهینه منحصر به فرد نیست اولویت دوم را روی ناحیه بهینه ی مساله ی مربوط به اولویت اول اعمال می کنیم. مساله ی زیر حاصل می شود:

$$
\begin{aligned}
&Min\ \ s_2^- \\
&s.t.\ \ \lambda_A + 3\lambda_B + 5\lambda_D = 3 - 0, \\
&\quad 4\lambda_A + 2\lambda_B + \lambda_D = 6 - s_2^-, \\
&\quad 5\lambda_A + 4\lambda_B + 6\lambda_D = 3 + s_1^+, \\
&\quad \lambda_A + \lambda_B + \lambda_D = 1, \\
&\quad \lambda_A \geq 0, \\
&\quad \lambda_B \geq 0, \\
&\quad \lambda_D \geq 0, \\
&\quad s_1^- \geq 0, s_2^- \geq 0, s_1^+ \geq 0.
\end{aligned}
$$

مساله دارای جواب بهینه ی چندگانه با مقدار بهینه ی تابع هدف $s_2^{-*} = 3.5$ می باشد.

مجدداً مساله جواب بهینه چندگانه دارد. لذا اولویت سوم را روی ناحیه بهینه ی مساله ی مربوط به اولویت دوم اعمال می کنیم. مساله ی حاصل شده به صورت زیر می باشد:

$$
\begin{aligned}
&Min\ \ s_1^+ \\
&s.t.\ \ \lambda_A + 3\lambda_B + 5\lambda_D = 3 - 0, \\
&\quad 4\lambda_A + 2\lambda_B + \lambda_D = 6 - 3.5, \\
&\quad 5\lambda_A + 4\lambda_B + 6\lambda_D = 3 + s_1^+, \\
&\quad \lambda_A + \lambda_B + \lambda_D = 1, \\
&\quad \lambda_A \geq 0, \\
&\quad \lambda_B \geq 0, \\
&\quad \lambda_D \geq 0, \\
&\quad s_1^- \geq 0, s_2^- \geq 0, s_1^+ \geq 0.
\end{aligned}
$$

که مقدار بهینه ی تابع هدف آن $s_2^{-*} = 2.5$ می باشد.

بنابراین با توجه اولویت ها و جواب های بهینه ی سه مدل فوق جهت بهینه $\mathbf{d} = (0, -3.5, 2.5)^T$ است. این نشان می دهد که برای بهبود ورودی ها و خروجی، که اولویت های بهبود بترتیب روی ورودی اول، ورودی دوم و خروجی اعمال شده است، لازم است جهت حرکت $\mathbf{d}$ انتخاب شود. بدیهی است که هرگونه تغییر در نوع اولویت بندی روی شاخص ها ورودی و خروجی منجر به جهت های دیگر ی خواهد شد.

## ۶ نتیجه‌گیری

در این مقاله روشی برای پیدا کردن جهت های بهینه معرفی شده است. با این روش کاربر می‌تواند با حداقل تغییرات در مقادیر ورودی و خروجی به مرز برسد. از طرف دیگر برای محاسبه‌ی کارایی یک $DMU$ تحت ارزیابی، وزن‌هایی انتخاب می‌شوند که بیشترین کارایی را به این $DMU$، اختصاص می‌دهند.

در این مقاله دو نوع مسأله با جهت های بهبود دهنده‌ی خاص و مجهول ارایه شده‌اند. ممکن است در مسایل کاربردی اهداف دیگری نیز دنبال شوند که با روشی مشابه آنچه ارایه شد، می توان آن جهت ها را به دست

آورد. با استفاده از این روش‌ها، می‌توان بطور هدفمند به سمت مرز کارایی حرکت کرد. لذا، بعد از به دست آوردن وزن‌های بهینه برای $DMU$ ی مورد ارزیابی، که با محاسبه‌ی ماکزیمم کارایی نسبی آن در مقایسه با سایر واحدها انجام می گیرد، با توجه به شرایط فردی این $DMU$ و شرایط ویژه ای که برای کاربر اهمیت دارند، به کمک جهت‌های بهینه‌ی به دست آمده برای آن، می‌توان اطلاعات جزئی تر و بیشتری از ارزیابی این واحد به دست آورد.

## منابع

[1] Fukuyama H, Weber WL.(2009) A directional slacks-based measure of technical inefficiency. Socio-Economic Planning Sciences 43(4):274–87.

[2] Charnes, A., Cooper, W.W., Rhodes, E.L., 1978. Measuring the efficiency of decision making units. European Journal of Operational Research 2, 429–444.

[3] Cook, W.D., Seiford, L.M., 2009. Data envelopment analysis (DEA) –Thirty years on. European Journal of Operational Research 192, 1–17.

[4] Banker, R.D., Charnes, A., Cooper, W.W., 1984. Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis. Management Science 30, 1078–1092.

[5] Cooper WW, Seiford L.M, Tone K.(2007) Data Envelopment Analysis; Second Edition, Springer.

[6] Jahanshahloo, G.R., Hosseinzadeh Lotfi, F., Zhiani Rezai, H., Rezai Balf, F. (2007) Finding strong defining hyperplanes of Production Possibility Set. European Journal of Operational Research 177 42–54.