

محاسبه مجموعه اوزان مشترک با استفاده از تحلیل رویه‌ای

سه‌ند دانشورا، صابر ساعتی*، زهرا حسین مردی^۱

^۱گروه ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد تبریز
گروه ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد تهران شمال

رسید مقاله: ۸۹/۲/۳
پذیرش مقاله: ۸۹/۶/۲۷

چکیده

در این مقاله با شناخت دقیق ابرصفحه‌های متناظر مرز کارایی و یافتن ارتباط بین بردارهای گرادیان این ابرصفحه‌ها و اوزان مدل‌های CCR و BCC و با تعیین ابرصفحه غالب، مجموعه‌ای از اوزان یافته و این اوزان را به طور مشترک جهت تعیین کارایی واحدهای تصمیم‌گیری به کار می‌بریم. در روش پیشنهادی با حل مدل CCR، واحدهای MPSS تعیین شده و از بین آن‌ها، بزرگترینشان انتخاب می‌شود. سپس به کمک مدل BCC، بردار گرادیان ابرصفحه‌های مار بر بزرگترین MPSS تعیین و به کمک آن یک مجموعه مشترک از وزن‌ها محاسبه می‌گردد.

کلمات کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها، MPSS، مجموعه اوزان مشترک، مرز کارایی.

۱ مقدمه

استفاده بهینه از منابع در دسترس بشر، همواره مطلوب او بوده و همواره بر این تصمیم بوده تا با ایجاد راه-کارهای مناسب از منابع موجود، حداکثر استفاده را ببرد. محدودیت عواملی چون سرمایه، نیروی انسانی، انرژی و ... مدیران را به این فکر واداشت که روشی برای استفاده بهینه از این عوامل پیدا کنند. در این راستا یکی از مسائل مهم، مساله اندازه‌گیری کارایی است، که برای صاحب نظران اقتصادی از اهمیت بالایی برخوردار است. در تحلیل پوششی داده‌ها کارایی نسبی یک واحد تصمیم‌گیری، به وسیله محاسبه اوزان متناظر ورودی‌ها و خروجی‌های آن واحد تصمیم‌گیری که ماکزیمم نسبت مجموع وزین خروجی به مجموع وزین ورودی محاسبه می‌گردد. در مدل تحلیل پوششی داده‌ها برای هر واحد تصمیم‌گیری وزن جداگانه اختصاص داده می‌شود، که این مجموعه اوزان برای تک تک واحدهای تصمیم‌گیری متفاوت است، که گاهی اوقات ممکن است بعضی عوامل متناظر با اوزان مختلف مورد قبول نباشد.

*عهده دار مکاتبات

آدرس الکترونیکی: ssaatim@yahoo.com

راه حل این مشکل تعیین مجموعه اوزان مشترک است که برای اولین بار توسط Rool و همکاران [۱۲] در سال ۱۹۹۱ ارائه گردید.

یافتن مجموعه اوزان مشترک برای مقایسه کارایی واحدهای تصمیم‌گیری یکی از مباحث اصلی و مهم در تحلیل پوششی داده‌ها محسوب می‌شود که روش‌هایی جهت تعیین این اوزان مشترک ارائه شده است. اکثر این روش‌ها با استفاده از حل مسائل برنامه‌ریزی خطی متعددی در صدد انجام این امر برمی‌آیند [۱۴-۵]. در این مقاله، با دیدی متفاوت اقدام به تعیین مجموعه اوزان مشترک در تحلیل پوششی داده‌ها می‌شود. می‌دانیم، مجموعه امکان تولید، به صورت اشتراک چندین نیم‌فضا مشخص می‌شود. مضارب معادلات ابر صفحه‌های تکیه‌کننده این مجموعه، همان اوزان تعیین شده توسط مدل‌های موجود در تحلیل پوششی داده‌ها است. لذا، با تحلیل رویه‌ای و استفاده از مفهوم MPSS [۱]، مجموعه اوزان مشترک محاسبه خواهد شد. ساختار مقاله بدین شکل است که در ادامه، مدل‌های مورد نیاز معرفی خواهند شد. در بخش سوم، روش پیشنهادی ارائه می‌شود. بخش چهارم اختصاص به حل دو مثال عددی جهت روشن شدن موضوع دارد و در آخر نتیجه‌گیری مقاله بیان می‌شود.

۲ معرفی مدل‌های اساسی

فرض کنید n واحد تصمیم‌گیری DMU_j ($j = 1, \dots, n$) با بردار ورودی X_j ($j = 1, \dots, n$) و بردار خروجی Y_j ($j = 1, \dots, n$) داشته باشیم. مجموعه امکان تولید که خروجی‌های تولید شده با مصرف ورودی‌ها را نشان می‌دهد، می‌تواند به صورت زیر تعریف شود:

$$T_c = \{(X, Y) \mid X \geq \sum_{j=1}^n \lambda_j X_j, Y \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j Y_j, \lambda_j \geq 0, j = 1, \dots, n\} \quad (1)$$

متناظر با T_c ، مدل CCR [۴] جهت اندازه‌گیری کارایی نسبی DMU_p ($p \in \{1, \dots, n\}$) به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} & \text{Min } \theta \\ & \text{s.t. } \theta X_p - \sum_{j=1}^n \lambda_j X_j \geq 0, \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j Y_j \geq Y_p, \\ & \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (2)$$

مدل فوق فرم پوششی مدل CCR در ماهیت ورودی است.

می توان مجموعه امکان تولید را به فرم دیگری نیز تعریف نمود. این تعریف به شکل زیر است:

$$T_v = \{(X, Y) \mid X \geq \sum_{j=1}^n \lambda_j X_j, Y \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j Y_j, \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0, j = 1, \dots, n\} \quad (3)$$

تفاوت این دو مجموعه در نوع بازده نسبت به مقیاس تولید آن ها است. با استفاده از تعریف T_v ، فرم پوششی مدل BCC [۲] در ماهیت ورودی به شکل زیر می باشد:

$$\begin{aligned} & \text{Min } \theta \\ & \text{s.t. } \theta X_p - \sum_{j=1}^n \lambda_j X_j \geq 0, \\ & \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j Y_j \geq Y_p, \\ & \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \\ & \quad \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (4)$$

را به فرم زیر می نویسیم: BCC دوال مدل

$$\begin{aligned} & \text{Max } U^t Y_p + u_0 \\ & \text{s.t. } V^t X_p = 1, \\ & \quad U^t Y_j - V^t X_j + u_0 \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\ & \quad U \geq 0, \quad V \geq 0. \end{aligned} \quad (5)$$

که مدل فوق همان فرم مضربی مدل BCC در ماهیت ورودی است.

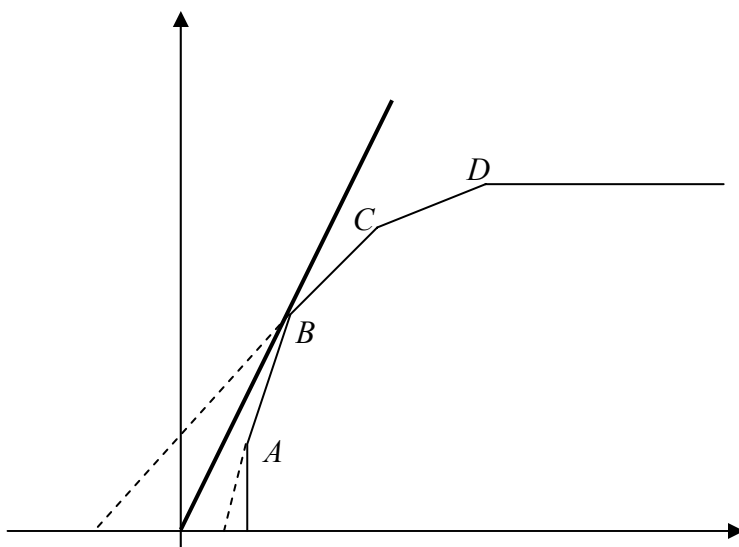
تعریف MPSS واحد تصمیم گیری $DMU_p = (X_p, Y_p)$ را یک MPSS نامیم، اگر و تنها اگر بازا هر $\alpha, \beta \in R^+$ داشته باشیم:

$$(\beta X_p, \alpha Y_p) \in T_v \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} \leq 1$$

۳ روش پیشنهادی

ابتدا روش را برای حالت یک ورودی و یک خروجی شرح داده و سپس برای چند ورودی و چند خروجی تعمیم می دهیم.

مساله را با استفاده از مدل CCR حل می کنیم، بعد از یافتن واحدهای تصمیم گیری کارا که در واقع همان MPSS های مساله می باشند، سعی می کنیم تا بزرگترین MPSS را انتخاب کنیم. برای این منظور ابتدا داده های مساله را نرمال کرده و در مرحله بعد از میان MPSS های موجود، MPSSی را انتخاب می کنیم که دارای بزرگترین خروجی باشد. چون از این MPSS دو خط کارا عبور می کند، لذا یک خط میان این دو خط پیدا



شکل ۱. نمایش بزرگترین MPSS و دو خط مار بر آن

می‌کنیم و بردار عمود بر این خط را به عنوان مجموعه اوزان مشترک در نظر می‌گیریم و با استفاده از آن کارایی واحدهای تصمیم‌گیری مساله را به دست می‌آوریم.

برای درک بهتر، روش فوق را از نظر هندسی به کمک شکل ۱ تعبیر می‌نماییم. اگر نقطه B را بزرگترین MPSS در نظر بگیریم در اینصورت، معادلات خطوط AB و BC را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$a_1x_1 + b_1y_1 = c_1 \quad (6)$$

$$a_2x_2 + b_2y_2 = c_2 \quad (7)$$

روابط (۶) و (۷) معادله دو خط گذرنده از نقطه B است و داریم:

$$y_1 = -\frac{a_1}{b_1}x_1 + \frac{c_1}{b_1}$$

$$y_2 = -\frac{a_2}{b_2}x_2 + \frac{c_2}{b_2}$$

که $m_1 = -\frac{a_1}{b_1}$ و $m_2 = -\frac{a_2}{b_2}$ به ترتیب شیب متناظر دو خط (۶) و (۷) می‌باشد. برای یافتن شیب خط بین این دو خط، میانگین شیب این دو خط را به دست می‌آوریم. این مقدار را به عنوان شیب خط مورد بحث در نظر می‌گیریم و m می‌نامیم که m بین m_1 و m_2 قرار دارد ($m_1 < m < m_2$) و معادله خط $y = mx + c$ حاصل می‌شود. حال بردار نرمال خط مذکور را یافته و آن را به عنوان مجموعه اوزان مشترک در نظر می‌گیریم. با استفاده از اوزان به دست آمده، کارایی واحدهای تصمیم‌گیری را به دست می‌آوریم. اگر $(-V, U)$ بردار نرمال خط مذکور باشد، کارایی واحدهای تصمیم‌گیری از فرمول زیر محاسبه می‌شود:

$$eff = \frac{U^T Y}{V^T X} \quad (8)$$

روش پیشنهادی را به حالت کلی چند ورودی و چند خروجی تعمیم می‌دهیم. در این حالت، ابتدا مساله را با مدل CCR حل می‌کنیم و بعد از یافتن MPSS های مساله و نرمال سازی داده‌ها، مجموع خروجی‌ها را محاسبه می‌کنیم و از میان MPSS ها، MPSS می‌دارای بیشترین خروجی است انتخاب می‌کنیم. از MPSS مذکور بی نهایت ابرصفحه عبور می‌کند. ما دو ابرصفحه کارا که دارای بیشترین عرض از مبدا و کمترین عرض از مبدا هستند را پیدا می‌کنیم. برای این کار باید ابرصفحه متناظر با u_o^+ و u_o^- را پیدا کنیم که این مقادیر با استفاده از دو مدل زیر محاسبه می‌شوند [۳]:

$$\begin{aligned} u_o^+ = \text{Max} \quad & u_o \\ \text{s.t.} \quad & V^t X_p = 1, \\ & U^t Y_j - V^t X_j + u_o \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad j \neq p \\ & U^t Y_p - V^t X_p + u_o = 0, \\ & U \geq 0, \quad V \geq 0. \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} u_o^- = \text{Min} \quad & u_o \\ \text{s.t.} \quad & V^t X_p = 1, \\ & U^t Y_j - V^t X_j + u_o \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad j \neq p \\ & U^t Y_p - V^t X_p + u_o = 0, \\ & U \geq 0, \quad V \geq 0. \end{aligned} \quad (10)$$

ضریب زاویه ابرصفحه متناظر با u_o^+ و u_o^- به ترتیب از روابط $\rho^+ = \frac{1}{1-u_o^+}$ و $\rho^- = \frac{1}{1-u_o^-}$ به دست

می‌آید. میانگین این دو ضریب زاویه برابر است با:

$$\rho = \frac{\rho^- + \rho^+}{2} \quad (11)$$

و این شیب همان شیب ابرصفحه بین دو ابرصفحه u_o^- و u_o^+ است. در مرحله بعد بردار نرمال ابرصفحه بین دو ابرصفحه u_o^- و u_o^+ را به دست می‌آوریم. برای این کار نیاز به دو نقطه داریم که یکی از این نقاط همان نقطه (X_p, Y_p) است (چون ابرصفحه‌های u_o^- و u_o^+ در نتیجه ابرصفحه بین آن‌ها نیز از نقطه (X_p, Y_p) عبور می‌کنند. پس بردار نرمال ابرصفحه حاصله نیز از نقطه (X_p, Y_p) عبور می‌کند) برای یافتن نقطه دوم به صورت زیر عمل می‌کنیم. شیب ابرصفحه بین دو ابرصفحه u_o^- و u_o^+ برابر ρ است. لذا، با توجه به اینکه بردار

نرمال، عمود بر ابرصفحه است شیب بردار نرمال برابر $-\frac{1}{\rho}$ است. از طرفی می دانیم شیب برابر $\tan \theta = \frac{\beta}{\alpha}$ که β ضریب Y و α ضریب X است. پس داریم:

$$-\frac{1}{\rho} = \tan \theta = \frac{\beta}{\alpha} \Rightarrow -\frac{1}{\rho} = \frac{\beta}{\alpha} \Rightarrow \beta\rho = -\alpha \Rightarrow \beta = -\frac{\alpha}{\rho}$$

پس نقطه دوم به صورت زیر به دست می آید:

$$(\alpha X_p, \beta Y_p) = (\alpha X_p, -\frac{\alpha}{\rho} Y_p) \quad (12)$$

برای یافتن بردار عمود بر ابرصفحه بین دو ابرصفحه u_0^+ و u_0^- تفاضل دو نقطه فوق را محاسبه می کنیم:

$$(X_p, Y_p) - (\alpha X_p, -\frac{\alpha}{\rho} Y_p) = (-V, U) \quad (13)$$

مرحله بعد یافتن مقدار α است. برای این کار مقادیر ورودی و خروجی های بزرگترین MPSS را که در مراحل قبلی پیدا کرده بودیم به جای (X_p, Y_p) و مقدار شیب ابرصفحه بین دو ابرصفحه u_0^+ و u_0^- را به جای ρ در رابطه (13) قرار می دهیم، و بعد از یافتن مقدار $(-V, U)$ آن را در رابطه زیر قرار می دهیم:

$$\frac{U^T Y}{V^T X} = 1 \quad (14)$$

بعد از یافتن مقدار α و قرار دادن آن در رابطه (13) و یافتن $(-V, U)$ ، به کمک رابطه (8) کارایی تک تک واحدهای تصمیم گیری را محاسبه می کنیم.

به طور خلاصه می توان روش پیشنهادی را به صورت الگوریتم زیر بیان نمود:

۱- یافتن بزرگترین MPSS

۲- یافتن u_0^+ و u_0^-

۳- یافتن ρ^+ و ρ^-

۴- محاسبه $\rho = \frac{\rho^- + \rho^+}{2}$

۵- محاسبه $-\frac{1}{\rho}$

۶- محاسبه $\beta = -\frac{\alpha}{\rho}$

$$7- \text{ محاسبه } (X_p, Y_p) - (\alpha X_p, -\frac{\alpha}{\rho} Y_p) = (-V, U)$$

۸- محاسبه α

۹- تعیین کارایی به کمک رابطه (۸) برای تک تک واحدهای تصمیم گیری

۴ مثال های عددی

در این بخش دو مثال عددی، یکی برای حالت یک ورودی و یک خروجی و دیگری برای حالت چند ورودی و چند خروجی ارائه شده و توانمندی روش بررسی می شود.

مثال ۴-۱ ورودی و خروجی شش واحد تصمیم گیری در جدول زیر آمده است:

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| I | ۱ | ۲ | ۴ | ۶ |
| O | ۲ | ۴ | ۶ | ۷ |

جدول ۱. داده های مثال ۴-۱

همه واحدهای تصمیم گیری را با فرم مضربی مدل CCR در ماهیت ورودی مورد ارزیابی قرار می دهیم و نتایج جدول ۲ حاصل می گردد.

| | A | B | C | D |
|------------|-----|------|------|------|
| θ^* | ۱ | ۱ | ۰/۷۵ | ۰/۵۸ |
| u^* | ۰/۵ | ۰/۲۵ | ۰/۱۲ | ۰/۰۸ |
| v^* | ۱ | ۰/۵ | ۰/۲۵ | ۰/۱۶ |

جدول ۲. نتایج مدل CCR برای مثال ۴-۱

با توجه به نتایج به دست آمده، واحد تصمیم گیری B بزرگترین MPSS مساله است. چون خروجی واحد تصمیم گیری B از واحد تصمیم گیری A بزرگتر است. پس از بین آن ها واحد تصمیم گیری B را انتخاب می کنیم. با توجه به شکل زیر شیب دو خط AB و BC را محاسبه می کنیم. برای درک بهتر، شکل ۱ را در نظر بگیرید.

حال شیب دو خط گذرنده از بزرگترین MPSS مساله یعنی همان واحد تصمیم گیری B را محاسبه می کنیم. برای این کار نیاز به معادله خطوط AB و BC داریم که به صورت زیر است:

$$y - 4 = \frac{4-2}{2-1}(x-2) \Rightarrow y - 4 = 2(x-2) \Rightarrow y = 2x \Rightarrow m_1 = 2$$

$$y - 6 = \frac{6-4}{4-2}(x-4) \Rightarrow y - 6 = x - 4 \Rightarrow y = x + 2 \Rightarrow m_2 = 1$$

و لذا شیب خط مابین دو خط AB و BC به صورت زیر به دست می آید:

$$m = \frac{m_1 + m_2}{2} = \frac{2+1}{2} = 1.5$$

و شیب بردار نرمال عمود بر این خط از رابطه زیر محاسبه می کنیم:

$$-\frac{1}{m} = -0.6666$$

از طرفی شیب خط از رابطه $\tan \theta = \frac{\beta}{\alpha}$ محاسبه می شود (نسبت ضلع مقابل به ضلع مجاور) پس داریم:

$$-\frac{1}{m} = \frac{\beta}{\alpha} \Rightarrow -0.6666 = \frac{\beta}{\alpha} \Rightarrow \beta = -0.6666\alpha$$

برای به دست آوردن بردار نرمال نیاز به دو نقطه داریم که اولین نقطه همان نقطه گذرنده از بزرگترین MPSS است یعنی نقطه $(X_p, Y_p) = (2, 4)$ و نقطه دوم را به صورت زیر می نویسیم:

$$(\alpha X_p, \beta Y_p) = (2\alpha, -2/6666\alpha)$$

حال بردار نرمال مورد نظر از تفاضل این دو نقطه به دست می آید و این بردار نرمال را به عنوان مجموعه اوزان مشترک در نظر می گیریم:

$$(-v, u) = (2, 4) - (2\alpha, -2/6666\alpha) = (2-2\alpha, 4+2/6666\alpha)$$

در مرحله بعدی مقدار α را محاسبه می کنیم، با توجه به این که واحد تصمیم گیری B بزرگترین MPSS مساله است پس کارایی آن باید برابر یک باشد پس داریم:

$$eff = \frac{(4+2/6666\alpha) \times 4}{-(2-2\alpha) \times 2} = \frac{16+10/6666\alpha}{-4+4\alpha} = 1 \Rightarrow -4+4\alpha = 16+10/6666\alpha$$

$$\Rightarrow 6/6666\alpha = -20 \Rightarrow \alpha = -3/0004$$

بعد از یافتن α مقدار آن را در رابطه $(-v, u)$ قرار می دهیم:

$$(-v, u) = (8/0008, -4/0002)$$

در مرحله بعد، با استفاده از این مجموعه اوزان مشترک کارایی تک تک واحدهای تصمیم گیری را به دست می آوریم.

| | | | | |
|------------|------|------|------|------|
| | A | B | C | D |
| θ^* | ۰/۹۹ | ۰/۹۹ | ۰/۷۴ | ۰/۵۸ |

جدول ۳. کارایی واحدهای تصمیم گیری مثال ۴-۱

مثال ۴-۲ مدل BCC اصلاح شده را برای ۴۲ واحد تصمیم گیری اجرا می کنیم. هر واحد تصمیم گیری دارای چهار ورودی و سه خروجی است که اطلاعات آن از دبیرستان های شهر بابل در شمال ایران جمع آوری شده است. ورودی و خروجی هایی که در این مثال استفاده می کنیم در جدول (۴) آمده است. بعد از اجرای مدل های (۹) و (۱۰) جدول ۴ حاصل می شود که در آن مقادیر u_0^+ و u_0^- مشخص شده است.

| | ورودی ها و خروجی ها | | | | | | | CCR کارایی مدل | $u_0^- \leq u \leq u_0^+$ | نتایج روش پیشنهادی |
|-----|---------------------|------|------|------|------|------|------|----------------|-----------------------------|--------------------|
| | O1 | O2 | O3 | I1 | I2 | I3 | I4 | | | |
| B01 | 0.94 | 0.46 | 0.22 | 0.95 | 1.00 | 0.78 | 0.57 | 1.00 | $-4.78 \leq u^* \leq 0.48$ | 0.585 |
| B02 | 0.59 | 0.73 | 0.27 | 0.56 | 0.64 | 0.64 | 0.72 | 1.00 | $-1.72 \leq u^* \leq 0.55$ | 0.6931 |
| B03 | 0.14 | 0.53 | 0 | 0.59 | 0.44 | 0.66 | 0.59 | 0.878 | 0.83 | 0.2866 |
| B04 | 0.28 | 0.52 | 0.02 | 0.50 | 0.44 | 0.65 | 0.82 | 0.901 | 0.79 | 0.3559 |
| B05 | 0.62 | 0.58 | 0.07 | 0.54 | 0.64 | 0.72 | 0.45 | 1.00 | $-2.02 \leq u^* \leq 0.943$ | 0.605 |
| B06 | 0.34 | 0.70 | 0 | 0.44 | 0.44 | 0.62 | 0.69 | 1.00 | $-0.10 \leq u^* \leq 0.80$ | 0.4871 |
| B07 | 0.48 | 0.59 | 0.04 | 0.49 | 0.52 | 0.67 | 0.49 | 1.00 | $-0.06 \leq u^* \leq 0.67$ | 0.5575 |
| B08 | 0.39 | 0.60 | 0.02 | 0.74 | 0.41 | 0.62 | 0.63 | 1.00 | $0.28 \leq u^* \leq 0.70$ | 0.4514 |
| B09 | 0.28 | 0.51 | 0.12 | 0.42 | 0.41 | 0.58 | 0.46 | 1.00 | $0.30 \leq u^* \leq 1.00$ | 0.5257 |
| B10 | 0.23 | 0.44 | 0.02 | 0.37 | 0.44 | 0.76 | 0.48 | 1.00 | $0.60 \leq u^* \leq 1.00$ | 0.3523 |
| B11 | 0.51 | 0.25 | 0.17 | 0.65 | 0.60 | 0.70 | 0.49 | 0.962 | 0.59 | 0.4622 |
| B12 | 0.20 | 0.90 | 0.46 | 0.45 | 0.53 | 0.87 | 0.91 | 1.00 | $-0.70 \leq u^* \leq 0.82$ | 0.6064 |
| B13 | 0.43 | 0.67 | 0.11 | 0.56 | 0.56 | 0.56 | 0.54 | 1.00 | $-1.14 \leq u^* \leq 1.00$ | 0.5854 |
| B14 | 0.96 | 0.53 | 0.95 | 1.00 | 0.95 | 0.85 | 0.69 | 1.00 | $-3.21 \leq u^* \leq 0.62$ | 0.8592 |
| B15 | 0.59 | 0.50 | 0.96 | 0.70 | 0.68 | 0.77 | 0.68 | 1.00 | $0.19 \leq u^* \leq 0.59$ | 0.8855 |
| B16 | 0.50 | 0.38 | 0.07 | 0.58 | 0.71 | 0.80 | 0.46 | 0.955 | 0.86 | 0.4267 |
| B17 | 0.51 | 0.56 | 0 | 0.65 | 0.44 | 0.65 | 0.75 | 1.00 | $-0.68 \leq u^* \leq 0.79$ | 0.4736 |
| B18 | 0.19 | 0.61 | 0.11 | 0.65 | 0.44 | 0.92 | 0.64 | 0.79 | 0.31 | 0.3575 |
| B19 | 0.14 | 0.68 | 0 | 0.43 | 0.30 | 0.58 | 0.76 | 1.00 | $-0.16 \leq u^* \leq 1.00$ | 0.3805 |
| B20 | 0.60 | 0.49 | 0.07 | 0.59 | 0.74 | 0.73 | 0.53 | 0.934 | 0.65 | 0.5064 |
| B21 | 0.27 | 0.50 | 0.02 | 0.48 | 0.3 | 0.63 | 0.72 | 1.00 | $-0.02 \leq u^* \leq 0.97$ | 0.392 |
| B22 | 0.55 | 0.55 | 0.04 | 0.71 | 0.71 | 0.60 | 0.71 | 0.985 | 0.74 | 0.4607 |
| B23 | 0.60 | 0.38 | 0.06 | 0.78 | 0.86 | 0.75 | 0.55 | 0.889 | 0.77 | 0.4089 |
| B24 | 0.14 | 0.89 | 0.22 | 0.57 | 0.41 | 0.75 | 1.00 | 1.00 | $-1.32 \leq u^* \leq 0.61$ | 0.4647 |
| B25 | 0.64 | 0.65 | 0.17 | 0.50 | 0.64 | 0.62 | 0.74 | 1.00 | $0.80 \leq u^* \leq 0.86$ | 0.654 |
| B26 | 0.50 | 0.62 | 0.09 | 0.69 | 0.68 | 0.74 | 0.60 | 0.852 | $-0.19 \leq u^* \leq -0.38$ | 0.4892 |
| B27 | 0.18 | 0.62 | 0.13 | 0.46 | 0.44 | 0.73 | 0.71 | 0.906 | 0.77 | 0.4106 |
| B28 | 0.16 | 0.56 | 0.02 | 0.43 | 0.27 | 0.76 | 0.41 | 1.00 | $-0.69 \leq u^* \leq 1.00$ | 0.3988 |
| B29 | 0.25 | 0.62 | 0.02 | 0.56 | 0.49 | 0.65 | 0.71 | 0.886 | 0.89 | 0.3748 |
| B30 | 1.00 | 0.65 | 1.00 | 0.75 | 0.92 | 0.73 | 0.80 | 1.00 | $-0.80 \leq u^* \leq 0.75$ | 1.0002 |
| B31 | 0.47 | 0.52 | 0.28 | 0.44 | 0.62 | 0.70 | 0.84 | 1.00 | $0.42 \leq u^* \leq 0.85$ | 0.5565 |
| B32 | 0.67 | 0.66 | 0.11 | 0.66 | 0.80 | 0.62 | 0.82 | 1.00 | $-0.09 \leq u^* \leq 0.68$ | 0.5507 |
| B33 | 0.66 | 0.73 | 0.26 | 0.59 | 0.74 | 0.69 | 0.77 | 1.00 | $-1.01 \leq u^* \leq -0.33$ | 0.6626 |
| B34 | 0.84 | 0.48 | 0.14 | 0.85 | 0.92 | 0.69 | 0.54 | 1.00 | $-0.36 \leq u^* \leq 0.76$ | 0.569 |
| B35 | 0.49 | 0.68 | 0.31 | 0.48 | 0.48 | 0.72 | 0.63 | 1.00 | $-0.82 \leq u^* \leq 0.72$ | 0.7228 |
| B36 | 0.53 | 0.48 | 0.19 | 0.77 | 0.71 | 0.81 | 0.52 | 0.906 | $0.63 \leq u^* \leq 0.72$ | 0.4914 |
| B37 | 0.09 | 0.33 | 0 | 0.36 | 0.44 | 0.92 | 0.41 | 1.00 | $0.78 \leq u^* \leq 1.00$ | 0.1938 |
| B38 | 0.17 | 0.61 | 0.13 | 0.36 | 0.41 | 1.00 | 0.68 | 1.00 | $0.53 \leq u^* \leq 1.00$ | 0.3863 |
| B39 | 0.23 | 1.00 | 0.36 | 0.42 | 0.44 | 0.95 | 0.97 | 1.00 | $-1.15 \leq u^* \leq 0.85$ | 0.6036 |
| B40 | 0.20 | 0.61 | 0.12 | 0.61 | 0.83 | 0.89 | 0.68 | 0.757 | 0.2 | 0.3162 |
| B41 | 0.13 | 0.80 | 0.12 | 0.57 | 0.41 | 0.89 | 0.89 | 0.873 | 0.08 | 0.3788 |
| B42 | 0.09 | 0.86 | 0.02 | 0.42 | 0.41 | 0.91 | 0.81 | 1.00 | $0.17 \leq u^* \leq 0.67$ | 0.3557 |

جدول ۴. نتایج مدل های ۸ و ۹

به عنوان مثال نتایج حاصل در جدول (۴) را برای B_{30} به صورت زیر می توان به دست آورد.
بزرگترین حاصل جمع خروجی متعلق به B_{30} است پس داریم:

$$u_1^+ = 0.75 \quad , \quad u_1^- = -0.8$$

و لذا داریم:

$$\rho^+ = \frac{1}{1-u_1^+} = \frac{1}{1-0.75} = \frac{1}{0.25} = 4$$

$$\rho^- = \frac{1}{1-u_1^-} = \frac{1}{1-(-0.8)} = \frac{1}{1.8} = 0.5555$$

و میانگین دو شیب فوق را به دست می آوریم:

$$\rho = \frac{\rho^+ + \rho^-}{2} = \frac{4 + 0.5555}{2} = 2.2777$$

و با توجه به رابطه $(-V, U) = \left(\alpha X_p, -\frac{\alpha}{\rho} Y_p \right)$ داریم:

$$(-V, U) = \left(0.75 - 0.75\alpha, 0.92 - 0.92\alpha, 0.73 - 0.73\alpha, 0.8 - 0.8\alpha, 1 + \frac{1}{2.2777}\alpha, 0.65 + \frac{0.65}{2.2777}\alpha, 1 + \frac{1}{2.2777}\alpha \right)$$

حال بردار نرمال فوق را در رابطه (۱۳) قرار می دهیم

$$\frac{\left(1 + \frac{1}{2.2777}\alpha \right) \times 1 + \left(0.65 + \frac{0.65}{2.2777}\alpha \right) \times 0.65 + \left(1 + \frac{1}{2.2777}\alpha \right) \times 1}{-(0.75 - 0.75\alpha) \times 0.75 - (0.92 - 0.92\alpha) \times 0.92 - (0.73 - 0.73\alpha) \times 0.73 - (0.8 - 0.8\alpha) \times 0.8} = 1$$

با توجه به رابطه فوق $\alpha = 3/2959$ است، با قرار دادن این مقدار در بردار نرمال فوق، بردار نرمال زیر به دست می آید:

$$(-V, U) = (-1/7219, -2/1122, -1/676, -1/8367, 2/447, 1/5905, 2/447)$$

بردار نرمال فوق همان مجموعه اوزان مشترک است، حال با استفاده از آن رابطه (۸) را برای تک تک واحدهای تصمیم گیری اجرا می کنیم نتیجه حاصله در جدول (۴) آمده است

۵ نتیجه گیری

یکی از مزایای روش مذکور این است که مانند روش‌های قبلی یافتن مجموعه اوزان مشترک نیازی به تعیین کران نیست و چون تعیین کران کار سخت و گاهی نشدنی است در نتیجه این روش بسیار ساده‌تر از روش‌های قبلی است و از نظر محاسباتی نیز بسیار ساده است و دارای تعبیر هندسی ساده و قابل فهمی است. روش جدید علاوه بر یافتن کارایی واحدهای تصمیم‌گیری، آن‌ها را رتبه بندی نیز می‌کند و این از جمله مزایای دیگر این روش است.

منابع

- [1] Banker, R., 1984, Estimating Most Productive Scale Size Using Data Envelopment Analysis, *European Journal of Operational Research*, 35-44.
- [2] Banker, R. Charnes, and W. W. Cooper, 1984, Some Methods for Estimating Technical and Scale Inefficiencies in Data Envelopment Analysis, *Management Science*.
- [3] Banker, R, Thrall, M., 1988, Estimation of Returns to Scale Using Data Envelopment Analysis, *European Journal of Operational Research* 74 – 84.
- [4] Charnes, A. Cooper W. W. and Rhodes, E., 1978, Measuring the Efficiency of Decision Making Units. *EJOR*, 2, 429-444.
- [5] Chaparro, F.P., Jimenez, J.S., Smith, p., 1997, On the Role of Weight Restrictions in Data Envelopment Analysis, *Journal of Productivity Analysis, Manufactured in the Netherlands*.
- [6] Dyson, R.G., Thanassoulis, E., 1998, Reducing Weight Flexibility in Data Envelopment Analysis, *School of Industrial and Business Studies, University of Warwick*.
- [7] Franklin Liu, F.H. and Peng, H.H., 2008, Ranking of units on the DEA frontier with common weights. *Computers & Operations Research*, 35, 1624-1637.
- [8] Hosseinzadehl Lotfi, F., Jahanshahloo, G.R., Memariani, A., 2000, A Method for Finding Common Set of Weights by Multiple Objective Programming in Data Envelopment Analysis, *Southwest Journal of Pure and Applied Mathematics*.
- [9] Jahanshahloo, G., Alirezaee, M., Saati M., S. and Mehrabian, S., 1997, The Role of Bounds on Multipliers in DEA; with an Empirical Study. *Journal of Sciences, Islamic Azad University*, 19-22, 331-347.
- [10] Kuosmanen T., Cherchye, L. and Sipilainen, T., 2006, The law of one price in data envelopment analysis: Restricting weight flexibility across firms. *European Journal of Operational Research*, 170, 735-757.
- [11] Podinovski, V.V., 2007, Computation of efficient targets in DEA models with production trade-offs and weight restrictions. *European Journal of Operational Research*, 181, 586-591.
- [12] Rool, Y., Cook, W.D., Golany, B., 1991, Controlling Factor Weights in Data Envelopment Analysis. *IIE Trans.*, 23, 2-9.
- [13] Rool, Y., Golany, B., 1993, Alternate Methods of Treating Factor Weight in DEA. *Omega*, 21, 99-109.
- [14] Saati, S., 2008, Determining a Common Set of Weights in DEA by Solving a Linear Programming. *Journal of Industrial Engineering International*, 4, 51-56.