مجله ریاضیات کاربردی واحد لاهیجان، سال هفتم، شماره ۳(پیاپی ۲۶)، پاییز۸۹، ص ص ۶۰-۵۵
شاپا ۶۰۸۳-۲۰۰۸

# یک قضیه مقایسه برای روش ژاکوبی بهبود یافته با پیش شرط کننده $(I+S_{\max})$

**زهرا لرکجوری[1*]، ناصر میکائیل وند [2]**
[1] گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه ازاد اسلامی، واحد قائمشهر
[2] گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد اردبیل

رسید مقاله: ۸۹/۱/۲۱
پذیرش مقاله: ۸۹/۵/۱۷

---

## چکیده

در سال ۲۰۰۲کوتاکموری و همکارانش روش گاوس ـ سایدل بهبود یافته را با پیش شرط $(I+S_{\max})$ارایه دادند (در [8] می بینید). در این مقاله، روش ژاکوبی بهبود یافته را برای این پیش شرط ارایه دهیم. با قضیه مقایسه نشان می دهیم این روش از روش تکراری ژاکوبی سریع تر است. مثال های عددی برای نمایش توانایی های روش پیشنهادی ارایه شده اند.

**کلمات کلیدی:** دستگاه خطی پیش شرطی شده، M- ماتریس، پیششرط سازی، همگرایی، قضیه مقایسه.

---

## ۱ مقدمه

دستگاه خطی زیر را در نظر می گیریم:

$$\mathrm{Ax} = \mathrm{b} \tag{۱}$$

که در آن $A \in R^{n\times n}$ و $b \in R^n$ معلوم و $X \in R^n$ نامعلوم است. برای سادگی، فرض می کنیم $A = I - L - U$ باشد که در آن $I$ ماتریس همانی و $-L$ و $-U$ به ترتیب قسمت های اکیداً پائین مثلثی و اکیداً بالا مثلثی $A$ هستند.

حال دستگاه پیش شرطی (۱) را در نظر می گیریم.

$$PAX = Pb \tag{۲}$$

که در آن $P$ یک پیش شرط کننده با اعداد حقیقی مثبت است.

---

*عهده دار مکاتبات
آدرس الکترونیکی: Zahralorkojry@yahoo.com

در سال۲۰۰۲، کوتاکموری[ ۸]، روش گاوس ـ سایدل بهبود یافته را با پیش شرط $P_m = I + S_{\max}$ ارایه داده است به طوری که

$$S_{\max} = (S_{ij}^m) = \begin{cases} a_{i,K_i} & i = 1,2,\ldots,n-1, \quad j > i \\ 0 & \text{سایرنقاط} \end{cases}$$

و

$$\mathrm{K_i} = \min\left\{ \mathrm{j} \middle| \max \left| \mathrm{a_{i,j}} \right| \right\} \qquad \text{برای} \qquad i < n$$

با اعمال پیش شرط کننده $P_m$ دستگاه (۲) به دستگاه

$$A_m X = b_m \tag{۳}$$

تبدیل می شود که در آن $A_m = (I + S_{\max})A$ و $b_m = (I + S_{\max})b$.

## ۲ روش پیشنهادی

ایده اصلی این روش، اعمال روش ژاکوبی بهبود یافته با پیش شرط $P_m = (I + S_{\max})$ است.

برای دستگاه $AX = b$، روش ژاکوبی را می توان با تجزیه $A$ به اعضای قطری و غیر قطری آن به شکل $A = I - (L + U)$ نوشت. روش ژاکوبی بهبود یافته را می توان با تجزیه $A_m$ به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \mathrm{A_m} &= (\mathrm{I} + \mathrm{S_{max}})\mathrm{A} \\ &= (\mathrm{I} - \mathrm{D'}) - (\mathrm{L} + \mathrm{U} - \mathrm{S_{max}} + \mathrm{E'} + \mathrm{F'} + \mathrm{S_{mzx}}\mathrm{U}) \\ &= \mathrm{M_m} - \mathrm{N_m} \end{aligned}$$

که در آن $\mathrm{D'}$، $\mathrm{E'}$ و $\mathrm{F'}$ به ترتیب قسمت های قطری، اکیداً پایین مثلثی و اکیداً بالا مثلثی $S_{\max}L$ هستند. بنابراین اگر $(i = 1,2,\ldots,n-1)$ و $a_{i,k_i}a_{k_i,i} \neq 1$ پس $(\mathrm{I} - \mathrm{D'})^{-1}$ وجود دارد و ماتریس تکرار روش ژاکوبی بهبود یافته برای $A_m$ به صورت زیر است:

$$\mathrm{M_m^{-1}N_m} = (\mathrm{I} - \mathrm{D'})^{-1}(\mathrm{L} + \mathrm{U} - \mathrm{S_{max}} + \mathrm{E'} + \mathrm{F'} + \mathrm{S_{max}}\mathrm{U})$$

**تعریف ۲-۱** تجزیه ی $A = M - N$ را تجزیه ژاکوبی گوئیم اگر $M = D$ و $N = E + F$ باشد که در آن $D$ ماتریس قطری و $E$ و $F$ به ترتیب قسمت های اکیداً پائین مثلثی و اکیداً بالا مثلثی $A$ هستند. اگر $M^{-1} = (D)^{-1} \geq 0$ و $N = E + F \geq 0$ و در آن صورت تجزیه ی $A$ را تجزیه ی همگرایی ژاکوبی گوئیم.

**لم ۲-۱** فرض کنید $T \geq 0$ . اگر $x > 0$ و $\alpha > 0$ وجود داشته باشد به طوری که $Tx \leq \alpha x$ در این صورت $\rho(T) \leq \alpha$ . به علاوه اگر $Tx < \alpha x$، $\rho(T) < \alpha$ برقرار است.

برهان. به[5] مراجعه شود.

**قضیه ۱** فرض کنید $A$ ماتریس $n \times n$ معکوس پذیرباشد به طوری که $A^{-1} \geq 0$ و $A = M - N$ تجزیه ی منظم باشد، در این صورت $\rho(M^{-1}N) < 1$ است.

برهان: به [1] مراجعه شود.

**تعریف ۲-۲** ماتریس $A$ را تحویل ناپذیر (ساده نشدنی)گوئیم اگر گراف جهت دار وابسته $A$ همبند قوی باشد.

**قضیه ۲** فرض کنید $A$ یک ماتریس $n \times n$ و برای هر $i \neq j$ ، $a_{ij} \leq 0$ باشد. در این صورت $A$ یک $M-$ ماتریس است اگر و تنها اگر به ازای هر $i = 1$،...، $n$، $a_{ii} > 0$ باشد.

برهان: به [1] مراجعه شود.

## ۳ قضیه مقایسه

در این بخش یک قضیه ی مقایسه بین روش تکراری ژاکوبی با روش پیش شرطی $P_m = I + S_{\max}$ را بیان می کنیم. قبل از آن، ثابت می کنیم که تجزیه ی ژاکوبی $A_m = M_m - N_m$ یک تجزیه ی همگرا است.

**قضیه ۳** فرض کنید $A = I - L - U$ یک $Z-$ ماتریس قطر غالب تحویل ناپذیر باشد. بنابراین $A_m = M_m - N_m$ یک تجزیه ی همگرای ژاکوبی است.

برهان. چون $a_{ii} = 1$ برای هر $i \neq j$، $a_{ij} \leq 0$ بنابراین طبق قضیه ی ۲، $A$ یک $M-$ ماتریس است و طبق تعریف $M-$ ماتریس $A^{-1} \geq 0$ .

عناصر $A_m$ به صورت زیر می باشند:

$$(a_{ij}^m) = \begin{cases} 1 - a_{i,k_i} a_{k_i,i} & i = j \\ a_{ij} - a_{i,k_i} a_{k_i,j} & i \neq j \end{cases}$$

پس عناصر روی قطر اصلی $A_m$ مثبت هستند و $M_m^{-1}$ وجود دارد و عناصر غیر قطر اصلی $A_m$ منفی هستند پس $A_m$ هم یک $Z-$ ماتریس است و طبق قضیه ی ۲، $A_m$ یک $M-$ ماتریس است و $A_m^{-1} \geq 0$.

چون $0 \leq a_{i,k_i} a_{k_i,i} < 1$ بنابراین $(\mathrm{I} - \mathrm{D}')^{-1} \geq 0$ و داریم:

$$\mathrm{M}_\mathrm{m}^{-1} = (\mathrm{I} - \mathrm{D}')^{-1} \geq 0$$

و چون $U \geq S_{\max} \geq 0$ پس $\mathrm{N_m} = \mathrm{L} + \mathrm{U} - \mathrm{S_{max}} + \mathrm{E}' + \mathrm{F}' + \mathrm{S_{max}}\mathrm{U} \geq 0$ بنابراین طبق قضیه ی ۱ و تعریف همگرایی ژاکوبی، تجزیه ی $A_m = M_m - N_m$ یک تجزیه ی همگرای ژاکوبی است.

**قضیه ٤** فرض کنید $A$ یک $Z-$ ماتریس قطر غالب تحویل ناپذیر باشد. در این صورت تجزیه ی $A=M-N$ و $A_m=M_m-N_m$ تجزیه همگرای ژاکوبی هستند و نامعادله ی زیر بر قرار است:

$$\rho(M_m^{-1}N_m)\le\rho(M^{-1}N)<1$$

برهان. مشابه اثبات قضیه ی ۱، $A^{-1}\ge 0$ و در تجزیه ی ژاکوبی $A=I-(L+U)$ داریم:

$$M^{-1}=(I^{-1})\ge 0$$

و همچنین

$$N=L+U\ge 0$$

بنابراین طبق قضیه ی ۱، $\rho(M^{-1}N)<1$ و $A=M-N$ یک تجزیه ی همگرایی ژاکوبی است و از قضیه ی ۳ تجزیه ی $A_m=M_m-N_m$ هم یک تجزیه ی همگرای ژاکوبی است. با قرار دادن $A=P_m^{-1}(M_m-N_m)$ داریم:

$$A=M-N=P_m^{-1}(M_m-N_m)$$

از این که $A=M-N$ تجزیه ی همگرا است، یک بردار مثبت $x$ طوری وجود دارد که $\rho(M^{-1}N)x=M^{-1}Nx$. بنابراین رابطه ی زیر برقرار است:

$$Ax=(M-N)x=M(I-M^{1}N)x=\frac{1-\rho(M^{-1}N)}{\rho(M^{-1}N)}Nx\ge 0$$

چون $M_m^{-1}\ge 0$ و $P_m\ge 0$ بنابراین $M_m^{-1}P_m\ge M_m^{-1}\ge M^{-1}$.

در نتیجه داریم:

$$\begin{aligned}(M_m^{-1}P_m-M^{-1})Ax&=M_m^{-1}P_m\left\{P_m^{-1}(M_m-N_m)\right\}x-(I-M^{-1}N)x\\&=(I-M_m^{-1}N_m)x-(I-M^{-1}N)x\\&=M^{-1}Nx-M_m^{-1}N_mx=\rho(M^{-1}N)x-M_m^{-1}N_mx\ge 0\end{aligned}$$

طبق لم (۲ ـ ۱) داریم:

$$\rho(M_m^{-1}N_m)\le\rho(M^{-1}N)$$

## ٤ مثال های عددی

**مثال ٤-١** ماتریس زیر را در نظر می گیریم:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -0.1 & -0.3 & -0.4 & -0.1 \\ -0.1 & 1 & -0.2 & 0 & -0.5 \\ -0.2 & -0.2 & 1 & -0.1 & -0.4 \\ -0.3 & -0.1 & 0 & 1 & -0.2 \\ -0.2 & -0.1 & -0.1 & -0.2 & 1 \end{pmatrix}$$

با محاسبه ی $M_m^{-1}$ داریم:

$$\rho(M_m^{-1}N_m)=0.645824<\rho(M^{-1}N)=0.742288$$

**مثال ٤-٢** فرض می کنیم ماتریس ضرایب $A$ به شکل زیر باشد:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -0.5 & -0.1 & 0 & 0 & -0.1 & -0.2 & 0 \\ -0.1 & 1 & -0.1 & 0 & -0.2 & -0.3 & 0 & -0.2 \\ -0.2 & -0.1 & 1 & -0.2 & 0 & -0.2 & -0.1 & -0.1 \\ 0 & -0.1 & -0.1 & 1 & -0.2 & -0.3 & -0.1 & -0.1 \\ -0.1 & 0 & -0.1 & 0 & 1 & -0.2 & -0.1 & -0.4 \\ -0.1 & -0.2 & 0 & -0.2 & 0 & 1 & -0.3 & -0.1 \\ 0 & -0.1 & -0.1 & -0.3 & 0 & -0.2 & 1 & -0.2 \\ 0 & -0.1 & -0.2 & 0 & -0.4 & -0.1 & -0.1 & 1 \end{pmatrix}$$

داریم:

$$\rho(M_m^{-1}N_m)=0.864319,\quad \rho(M^{-1}N)=0.9$$

بنابراین $\rho(M_m^{-1}N_m)<\rho(M^{-1}N)$ برقرار است.

## منابع

[۱] الهویرانلو، توفیق، خضرلو، معصومه؛ خضرلو، سعید؛ (۱۳۸۷)، روش های عددی در جبر خطی، تهران، چاپ اول-انتشارات دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات.

[2] O. Axelsson, (1994), Iterative Solution Methods, Cambridge University Press, Cambridge.

[3] A.Barman, R.J.Plemmons, (1994), Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences, SIAM, Philanelphia, PA.

[4] A.D.Gunawardena, S.K.Jain, L. Snyder, (1991), Modified Iterative Methods For Consistent Linear Systems, Linear Algebra Appl. 154-156-123-143.

[5] A.Frommer, D.B.Szyld, H-Splitting, (1992) and Two-Stage Iterative Methods, Numer. Math. 63-345-356.

[6] M.Neumann, R.J.Plemmons, (1987), Convergence of Parallel Multi splitting Iterative Methods for M-Matrices, Linear Algebra Appl.88/89, 559-573.

[7] R.S.Varga, (2000), Matrix Iterative Analysis, 2nd Edition, Springer, Berlin.

[8] H.Kotakemori, K.Harada, M. Morimoto, H.Niki, (2002), a Comparison Theorem for the Iterative Method with the Preconditioned $(I+S_{\max})$, J.Comput. Apll. Math. 145, 373-378.