مجله تحقیق در عملیات و کاربردهای آن، سال هشتم، شماره ۴ (پیاپی ۳۱)، زمستان ۹۰، ص ص ۵۷-۴۹
شاپا ۷۲۸۶-۲۲۵۱

روشی برای رتبه بندی گزینه ها به کمک مفهوم فازی و تحلیل پوششی داده ها

مجید ظرافت انگیز لنگرودی*
دانشگاه آزاد اسلامی، واحد فیروزکوه، گروه ریاضی، فیروزکوه، ایران

رسید مقاله: سوم شهریور ماه ۱۳۹۰
پذیرش مقاله: بیست و دوم آذر ماه ۱۳۹۰

چکیده
سیستم رأی گیری ترجیحی یکی از انواع مسایل تصمیم گیری چند معیاره است که در آن متخصصین گزینه ها را رتبه بندی می نمایند. انتخاب گزینه برتر در یک مسأله تصمیم گیری گروهی موضوع بسیاری از مطالعات اخیر می باشد. روش های متعددی برای تجمیع آراء رأی دهندگان و رتبه بندی گزینه ها در یک سیستم رأی گیری ترجیحی وجود دارند. این روش ها امتیازاتی را برای هر گزینه به دست می آورند که براساس آن رتبه بندی صورت می گیرد. در سال های اخیر محققین تحقیق در عملیات از تحلیل پوششی داده ها به منظور رتبه بندی گزینه ها در حوزه مسایل تصمیم گیری چند معیاره استفاده نموده اند. این مقاله ،به منظور معرفی یک روش ریاضی جدید برای انتخاب گزینه برتر در یک مسأله تصمیم گیری گروهی، مفهوم تحلیل پوششی داده ها و مفاهیم فازی را به کار می گیرد. مثال ارائه شده در مقاله چگونگی مکانیزم عمل و مزیت الگوریتم پیشنهادی را بر مدل های مشابه نشان می دهد.
کلمات کلیدی: رأی گیری ترجیحی، تحلیل پوششی داده ها، فازی.

---

۱ مقدمه
انتخاب گزینه برتر در یک مسأله تصمیم گیری گروهی موضوع بسیاری از مطالعات اخیر می باشد.در سیستم رأی گیری ترجیهی گروهی، هدف انتخاب m گزینه از میان n گزینه میباشد ($n>m$) که در آن هر تصمیم گیرنده یک رتبه بندی از گزینه ها را ارایه می دهد. به وضوح به سبب تفاوت در دیدگاه تصمیم گیرندگان، این رتبه بندی ها متفاوت خواهد بود. بعضی از روش های معمول، یک روش تجمیعی ساده را پیشنهاد می کنند که در آن ارزش هر گزینه از مجموع وزنی ارزش جایگاه ها به دست می آید. مشکل اساسی در این روش ها تعیین وزن های هر جایگاه است. شاید روش بردا[۱]، به سبب سادگی در محاسبات، یکی از متداول ترین روش های مورد اشاره بالا باشد.

---

*عهده دار مکاتبات
آدرس الکترونیکی: mzarafat24@gmail.om

اساساً و بدواً روش تحلیل پوششی داده‌ها برای مساله ارزیابی کارائی نسبی یک مجموعه از واحدهای تصمیم گیری[۲] مانند مدارس، بیمارستآن ها، شعبات بانک‌ها، دادگاه‌ها و غیره به کار گرفته شده است.
در سال های اخیر تحلیل پوششی داده ها به عنوان ابزاری قوی در خدمت رتبه بندی گزینه ها قرار گرفته است. اولین بار کوک و کرس [۳] مدل تحلیل پوششی داده ها را در یک مسأله رأی گیری ترجیهی به کار گرفتند. یکی ازضعف های این مدل این است که بعضی اوقات قادر نیست بین بعضی از گزینه ها تمیز قایل شود. از طرفی دیگر وزن ها در این مدل ها به راحتی قابل کنترل نیستند، حال آنکه این امر در مباحث رأی گیری بسیار حایز اهمیت میباشد. در مدل های مبتنی بر تحلیل پوششی داده ها برای ارزیابی، به تعداد گزینه ها مدل برنامه ریزی خطی حل می شود.
در این مقاله برای یافتن گزینه ارجح در یک تصمیم گیری گروهی ابتدا از تجمیع تمام داده ها که از نظرات رأی دهندگان در مورد جایگاه گزینه ها حاصل می شود، اعدادی فازی استخراج می کنیم و سپس به کمک مدل تحلیل پوششی داده های فازی [۴] عددی متناظر با هر یک از این اعداد فازی به دست می آید که در کنار یکدیگر خروجی های یک واحد مجازی به نام گزینه هدف را تشکیل می دهند. مقایسه هر گزینه با این گزینه هدف، با استفاده مدل کوک و کرس[۳]، معیار تمایز گزینه ها با یکدیگر خواهد بود.

۲. مقدمه ای بر مفاهیم فازی و رأی گیری ترجیحی

۱.۲ اعداد فازی LR

کاربرد اعداد فازی مستلزم محاسبات پیچیده و طولانی است و این برای اهداف عملی مناسب نیست زیرا هنگام استفاده از نظریه مجموعه های فازی مانند هر نظریه دیگری، در مواجهه با مسایل عملی، کارائی محاسباتی بسیار اهمیت دارد. دوبویس و پرید[۵] با معرفی اعداد فازی LR تا اندازه ای کار را آسان کرده اند. این اعداد نوع خاصی از اعداد فازی هستند که ویژگی آن ها در تابع عضویت آن هاست. همان طور که خواهیم دید اعمال جبری با این نوع اعداد فازی بسیار ساده و دارای یک الگوی مشخص است. این ویژگی باعث شده است که در بسیاری از کاربردهای نظریه مجموعه های فازی، از این نوع اعداد استفاده گردد.
تعریف۱ اگر عدد فازی $\widetilde{A}$ دارای تابع عضویتی به صورت

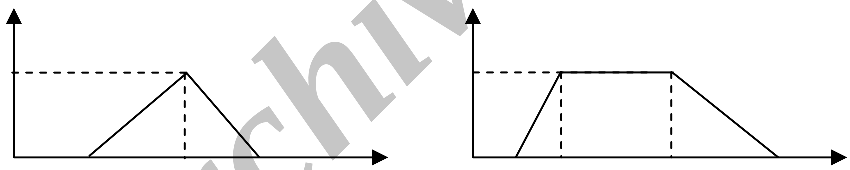
$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} L\left(\dfrac{\overline{x}-x^l}{x^m-x^l}\right) & x^l \le \overline{x} \le x^m \\ R\left(\dfrac{x^u-\overline{x}}{x^u-x^m}\right) & x^m \le \overline{x} \le x^u \end{cases} \qquad (۱)$$

باشد که در آن L و R توابعی غیر صعودی از R^+ به $[0,1]$ و $L(0) = R(0) = 1$، آن گاه $\widetilde{A}$ را یک عدد فازی LR نامیده و با نماد $\tilde{A} = (x^m, \alpha, \beta)_{LR}$ نشان می دهیم. x^m را مقدار نمائی یا میانی و $\alpha = x^m - x^l$ و $\beta = x^u - x^m$ را به ترتیب پهنای چپ و پهنای راست $\widetilde{A}$ می نامیم.

تعریف۲ اگر $\tilde{A} = (x^m, \alpha, \beta)_{LR}$ و $L = R$، $\tilde{A}$را یک عدد فازیLنامیده و با نماد $\tilde{A} = (x^m, \alpha, \beta)_L$ نشان می‌دهیم.

دسته خاصی از اعداد فازیLR، اعداد فازی مثلثی و ذوزنقه ای هستند. یک عدد فازی مثلثی به صورت $\tilde{A} = (x^m, \alpha, \beta)$ یا به اختصار $\tilde{A} = (m, \alpha, \beta)$ نمایش داده می شود که در آن x^m مقدار میانی و α و βبه ترتیب گستره چپ و راست عدد نامیده می شود. بطور مشابه، عدد فازی ذوزنقه ای به صورت $\tilde{A} = (x^{m_1}, x^{m_2}, \alpha, \beta)$ یا به اختصار $\tilde{A} = (m_1, m_2, \alpha, \beta)$ تعریف می شود که x^{m_1}و x^{m_2} مقادیر میانی و αو β به ترتیب گستره چپ و راست عدد هستند. مثالی از این اعداد در شکل ۱ نشان داده شده است.

۲-۲ مدل کوک و کرس



شکل ۱. اعداد فازی مثلثی و ذوزنقه‌ای

کوک و کرس[۳] برای نخستین بار از مدل اصلاح شده تحلیل پوششی داده ها در یک مساله رأی گیری ترجیحی استفاده نمودند. خروجی ها در این مدل را تعداد آراء در جایگاه های رتبه ای تشکیل می دهند و ورودی همه واحدهای تصمیم گیری، عدد ۱ می باشد. مدل پیشنهادی توسط کوک و کرس به صورت زیر است:

$$
\begin{aligned}
&Max \quad \sum_{j=1}^{n} u_j v_{pj} \\
&\text{s.t.} \\
&\qquad \sum_{j=1}^{n} u_j v_{ij} \le 1, \qquad i = 1, 2, \ldots, m, \\
&\qquad u_j - u_{j+1} \ge d(j, \varepsilon), \quad j = 1, 2, \ldots, n-1, \\
&\qquad u_n \ge d(n, \varepsilon).
\end{aligned}
\tag{۲}
$$

در مدل فوق v_{ij} تعداد دفعاتی است که کاندیدای i در جایگاه رتبه ای j قرار می گیرد و u_j وزن جایگاه j را نشان می دهد. به وضوح $u_j \geq u_{j+1}$ ، و بنابراین قید $u_j - u_{j+1} \geq d(j,\varepsilon)$ ترجیح جایگاه رتبه ای j بر j+۱ را نشان می دهد. نماد $d(j,\varepsilon)$ تابعی است غیرافزایشی از ε که تابع شدت تمایز نامیده می شود.
هاشیموتو [۶] با افزودن قید $u_j - 2u_{j+1} + u_{j+2} \geq 0$ ، $j =$ ۱ ، ۲، ...، n-۲ به مدل کوک و کرس [۳] تلاش نمود تا مشکل این مدل را در تفکیک واحدهای کارا حل نماید.

۳ گزینه ارجح در یک مسأله رأی گیری ترجیحی گروهی

در این بخش یک الگوریتم چهار مرحله ای برای تعیین گزینه ارجح به صورت زیر پیشنهاد می گردد:

گام ۱. تعریف اعداد فازی برای رتبه بندی مجموعه ای از گزینه ها در یک مسأله ترجیحی گروهی

در یک مسأله ترجیحی هر کاندیدا ی $j\ (j = 1, 2, ..., n)$ با رأی تعدادی رأی دهنده در جایگاه رتبه ای اول (v_{1j})، دوم (v_{2j}) ، ...، جایگاه رتبه ای mام (v_{mj}) قرار می گیرد ([۳] را ببینید). فرض کنیم v_{rj} تعداد آرایی باشد که در آن رأی دهندگان گزینه j را در جایگاه r قرار می دهند.

گزینه فازی را به صورت اعداد مثلثی $\tilde{v}_{r(n+1)} = (m_r, \alpha_r, 0)_{LR}\ \forall r$، که در آن m_r و α_r به ترتیب مقدار میانی و گسترش چپ عدد فازی $\tilde{v}_{r(n+1)}$ هستند تعریف می کنیم. توابع عضویت زیر را در نظر بگیرید:

$$\mu_{\tilde{v}_{r(n+1)}}(\overline{v}_{r(n+1)}) = \begin{cases} L\left(\dfrac{\overline{v}_{r(n+1)} - v^l_{r(n+1)}}{v^m_{r(n+1)} - v^l_{r(n+1)}}\right) & v^l_{r(n+1)} \leq \overline{v}_{r(n+1)} \leq v^m_{r(n+1)} \quad \forall r \\ 0 & otherwise \end{cases} \tag{۳}$$

در فرمول فوق $v^l_{r(n+1)} = \min\{v_{rj}\}_{j=1,2,...,n}$ و $v^m_{r(n+1)} = \max\{v_{rj}\}_{j=1,2,...,n}$ به ترتیب مقدار میانی و کمترین مقدار در بازه عدد فازی فوق هستند. با فرض $L(x) = x$ تابع فوق، تابع عضویت یک عدد مثلثی خواهد بود. از این پس، در تمام این فصل، منظور از عدد فازی مثلثی، چنین عددی است.

گام۲. استفاده از تحلیل پوششی داده های فازی به منظور یافتن گزینه هدف

در این گام با در نظر گرفتن عدد فازی مثلثی (۳) در مدل برنامه ریزی خطی فازی زیر و حل آن، گزینه ای مجازی، که از این پس گزینه هدف نامیده می شود، تولید می گردد:

$$
\begin{aligned}
& Min \quad Z = \Omega_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} d(n+k,\varepsilon)\lambda_{n+k} \\
& s.t. \\
& \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \le 1 + \Omega_{n+1}, \\
& \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_{1j} - \lambda_{n+1} \ge \tilde{v}_{1(n+1)} - \Omega_{n+1}, \\
& \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \tilde{v}_{rj} + \lambda_{n+k} - \lambda_{n+k+1} \ge \tilde{v}_{r(n+1)} - \Omega_{n+1}, \quad k = 1,\dots,n-1, \\
& \quad \lambda_j \ge 0, \\
& \quad \Omega_{n+1} \quad free.
\end{aligned} \tag{۴}
$$

هدف از حل مدل (۴) یافتن واحدی است که از تجمیع مقادیر ستاده حاصل می گردد و مقایسه هر واحد تصمیم گیری با آن معیاری برای ارزیابی آن ها خواهد بود.

چگونگی طراحی ساختار مدل (۴) ،نمادهای به کار گرفته شده در آن و همچنین روش حل مدل بطور مبسوط در [۴] شرح داده شده است. فرض کنیم $r=$ ۱ ، ۲، ...، n عناصر گزینه هدف باشند.

گام ۳. ارزیابی گزینه ها در یک مقایسه زوجی

مدل کوک و کرس[۳] را به این صورت به کار می گیریم که در یک مقایسه زوجی هر گزینه با گزینه مجازی هدف، مقایسه می گردد. اینکار با حذف داده های گزینه مورد ارزیابی از قیود انجام می گیرد. با اینکار در حقیقت، قیود برای تمام گزینه ها در ارزیابی زوجی، یکسان خواهد بود. مقایسه با یک مجموعه قیود ثابت ارزیابی منصفانه تری را موجب خواهد شد. با استفاده از مدل (۲) مدل برنامه ریزی خطی زیر برای همه گزینه ها اجراء می شود:

$$
\begin{aligned}
& Max \quad z_p = \sum_{r=1}^{n} u_r v_{pr} \\
& \text{s.t.} \\
& \quad \sum_{r=1}^{n} u_r v_r^* \le 1, \\
& \quad u_r - u_{r+1} \ge d(r,\varepsilon), \quad r = 1,2,\dots,n-1, \\
& \quad u_n \ge d(n,\varepsilon).
\end{aligned} \tag{۵}
$$

بدیهی است که تعداد قیود در مدل فوق کمتر از مدل اصلی کوک و کرس است، بویژه وقتی که تعداد گزینه ها قابل توجه باشد، به تعداد این گزینه ها به مسأله، قید اضافه می گردد. در مدل (۵) بدون توجه به تعداد گزینه ها، به

جای قیود متناظر با گزینه ها، تنها قید $\sum_{r=1}^{n} u_r v_r^* \leq 1$ را خواهیم داشت و این امر از لحاظ محاسباتی از اهمیت بسزایی برخوردار می باشد.

٤ مثال توضیحی

در این مثال چگونگی به کار گیری روش پیشنهادی برای رتبه بندی ۴ گزینه توضیح داده می شود. ۲۰ رأی دهنده از دید خود این گزینه ها را رتبه بندی نمودند که نظرات آن ها در جدول ۱ دیده می شود.

جدول ۱. نظرات رأی دهندگان در مورد چهار گزینه

رتبه بندی				رأی دهنده
٤	۳	۲	۱	
۱	۴	۳	۲	۱
۲	۴	۱	۳	۲
۴	۱	۲	۳	۳
۴	۳	۱	۲	۴
۱	۳	۲	۴	۵
۳	۱	۲	۴	۶
۴	۱	۳	۲	۷
۳	۲	۴	۱	۸
۲	۴	۳	۱	۹
۱	۴	۲	۳	۱۰
۱	۳	۳	۴	۱۱
۴	۳	۲	۱	۱۲
۴	۲	۳	۱	۱۳
۲	۳	۴	۱	۱۴
۱	۳	۲	۴	۱۵
۲	۱	۳	۴	۱۶
۳	۱	۲	۴	۱۷
۱	۲	۴	۳	۱۸
۱	۳	۴	۲	۱۹
۴	۱	۳	۲	۲۰

گام **۱.** در جدول ۲ تعداد دفعات قرار گرفتن گزینه ها در جایگاه ها و در سطر آخر، اعداد فازی متناظر با آن ها دیده می شوند.

جدول ۲. تعداد دفعات قرار گرفتن گزینه ها در جایگاه ها و اعداد فازی متناظر با آن ها

گزینه	رتبه ۱	رتبه ۲	رتبه ۳	رتبه ٤
۱	۵	۲	۶	۷
۲	۵	۷	۴	۴
۳	4	۷	۶	۳
۴	۶	۴	۴	۶
Fuzzy group $(m,\alpha,0)_{LR}$	(۰و۲و۶)	(۰و۵و۷)	(۰و۲و۶)	(۰و۴و۷)

توابع عضویت مرتبط با هر خروجی فازی به صورت زیر محاسبه می گردند:

$$\mu_{\tilde{v}_{15}}(\overline{v}_{15}) = \frac{1}{2}(\overline{v}_{15} - 4) \quad \overline{v}_{15} \in [4,6] \qquad \mu_{\tilde{v}_{25}}(\overline{v}_{25}) = \frac{1}{5}(\overline{v}_{25} - 2) \quad \overline{v}_{25} \in [2,7]$$

$$\mu_{\tilde{v}_{35}}(\overline{v}_{35}) = \frac{1}{2}(\overline{v}_{35} - 4) \quad \overline{v}_{35} \in [4,6] \qquad \mu_{\tilde{v}_{45}}(\overline{v}_{45}) = \frac{1}{4}(\overline{v}_{45} - 3) \quad \overline{v}_{45} \in [3,7]$$

گام ۲. به کارگیری تحلیل پوششی داده ها به منظور یافتن گزینه هدف

در این گام از اعداد فازی گام ۱ ، با استفاده از تحلیل پوششی داده های فازی، مقادیری غیر فازی استخراج می گردد. برای این منظور از حل مدل (۴) خواهیم داشت:

رتبه	۱	۲	۳	۴
$M(\tilde{v}_r) = \mathrm{x}^m + \frac{1}{4}(v^l_{r(n+1)} - v^m_{r(n+1)})$	۵/۶۲	۵/۰۶	۵/۶۲	۶/۲۵

بنابراین گزینه مجازی تولید شده در این گام به صورت زیر خواهد بود.

$$(M(\tilde{v}_1), M(\tilde{v}_2), M(\tilde{v}_3), M(\tilde{v}_4)) = (۵/۶۲, ۵/۰۶, ۵/۶۲, ۶/۲۵) \quad (۶)$$

گام ۳. مقایسه هر گزینه با گزینه هدف تولید شده در گام ۲

در این گام هریک از گزینه ها بطور جداگانه با گزینه مجازی (۶) مقایسه می گردند. به عنوان مثال مدل برنامه ریزی خطی متناظر با گزینه اول به صورت زیر است:

$$
\begin{aligned}
& Max\ \ z_1 = 5u_1 + 2u_2 + 6u_3 + 7u_4 \\
& s.t. \\
& 5.62u_1 + 5.06u_2 + 5.62u_3 + 6.25u_4 \le 1, \\
& u_1 - u_2 \ge \varepsilon, \\
& u_2 - u_3 \ge \varepsilon, \\
& u_3 - u_4 \ge \varepsilon, \\
& \qquad u_4 \ge \varepsilon.
\end{aligned}
\tag{۷}
$$

با فرض ۰/۰۱۸۱۳۲ = ε و $d(\mathrm{r},\varepsilon) = \varepsilon$ مقدار بهینه $z_1^* =$ ۰/۸۱۶ برای مدل فوق به دست می آید. جدول زیر مقادیر بهینه و رتبه هر گزینه مورد بررسی در این مثال را نشان می دهد:

جدول۳. رتبه بندی گزینه ها توسط مدل پیشنهادی و روش کوک و کرس [۳]

رتبه	مدل پیشنهادی $d(i,\varepsilon) = \varepsilon$	رتبه	مدل کوک و کرس $(d(i,\varepsilon) = \varepsilon)$	گزینه
	$\varepsilon_{\max}$ =0.01۸۱۳۲		$\varepsilon_{\max}$ =0.01639344	
۴	۰/۸۱۶	۴	۰/۸۴۹	۱
۱	۰/۹۶۱	۱	۱	۲
۲	۰/۹۴۳	۲	۰/۹۸۱	۳
۳	۰/۹۰۷	۳	۰/۹۴۳	۴

با مقایسه نتیجه مدل پیشنهادی با روش کوک و کرس در جدول ۳ تفاوتی در رتبه بندی مشاهده نمی شود ولی همانطور که اشاره شد، یکی از مزیت های مدل پیشنهادی کارایی محاسباتی آن ، مخصوصاً برای مسایل با ابعاد بزرگ، است.

۵ نتیجه گیری

برای تجمیع آراء رأی دهندگان و رتبه بندی گزینه ها در یک سیستم رأی گیری ترجیحی روش های متعددی پیشنهاد شده است، که در آن تلاش می شود امتیازی را برای هر گزینه حاصل نموده و براساس آن رتبه بندی منصفانه ای به دست آید. این مقاله در یک الگوریتم چهار مرحله ای، در ابتدا گزینه هدف را با استفاده از تحلیل پوششی داده های فازی محاسبه می نماید. سپس از ادغام مدل کوک و کرس و روشی برای رتبه بندی واحدهای تصمیم گیری کارا موسوم به اندرسن و پترسن[۷] و با استفاده از مقایسه زوجی هر گزینه با مرز کارایی ایجاد شده توسط قید حاصل از گزینه هدف، که برای همه گزینه ها یکسان است، الگوریتمی کارا برای رتبه بندی گزینه ها در یک تصمیم گیری ارائه گردید. در این مقاله مفهوم فازی برای داده هایی به کارگرفته شد که ماهیتاَ غیر فازی هستند.

منابع

[1] Hwang, C. L., Lin, M. J., (1987). Group decision making under multiple criteria, Lecture Notes in Economics and Mathematics System. No.281, Springer Verag, Berlin
[2] Charnes, A., Cooper, W. W., Rhodes, E., (1978). Measuring efficiency of decision making units. European Journal of Operational Research 2, 429-444.
[3] Cook, W. D., Kress, M., (1990). A data envelopment model for aggregating preference rankings, Management Science 36(11), 1302-1310.
[4] Zerafat Angiz, L. M., Emrouznejad, A., Mustafa, A., Al-Eraqi, A. S., (2010). Aggregating preference ranking with fuzzy data envelopment analysis. Knowledge-Based Systems 23, 512–519.
[5] Dubois, D., Prade, H., (1979). Fuzzy real algebra: Some results. Fuzzy Sets and Systems 2, 327-348.
[6] Hashimoto, A.,(1997). A ranked voting system using a DEA/AR exclusion model: A note. European Journal of Operational Research 97(3), 600–604.
[7] Andersen, P., Petersen, N. C., (1993). A procedure for ranking efficient units in data envelopment analysis. Management Science 39 (10), 1261–1294.