مجله تحقیق در عملیات و کاربردهای آن، سال هشتم، شماره ۴ (پیاپی ۳۱)، زمستان ۹۰، ص ص ۷۰-۵۹
شاپا ۷۲۸۶-۲۲۵۱

شاخص بهره وری مالمکوئیست چند مرحله ای

محمد علی جهانتیغی*[1]، زهره مقدس[2]، محسن واعظ قاسمی[2]
[1]دانشگاه آزاد اسلامی، واحد زاهدان، گروه ریاضی، زاهدان، ایران
[2]دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات، تهران، گروه ریاضی، تهران، ایران

رسید مقاله: اول شهریور ۱۳۹۰
پذیرش مقاله: شانزدهم آذرماه ۱۳۹۰

چکیده

زیر واحدهای یک واحد تصمیم گیرنده که همان مراحل موجود آن واحد می باشند می توانند به صورت سری یا موازی به کار روند. این گونه مراحل موجود در واحد های تصمیم گیرنده در اغلب مسایل حقیقی کاربردهای بسیاری دارند. در نظر نگرفتن این زیر واحد ها و ارتباطات آن ها می تواند منجر به نتایج دور از واقعیت گردد. به منظور ارزیابی عملکرد یک واحد با زیر مجموعه های آن نسبت به گذشته و دیگران می توان از تکنیک های پیشرفت و پسرفت استفاده نمود که مهمترین تکنینک محاسبه پیشرفت و پسرفت یک واحد، شاخص بهره وری مالکوئیست می باشد. در این مقاله با در نظر گرفتن واحد های تصمیم گیرنده که شامل چند زیر واحد که به صورت سری به هم متصل هستند رویکرد شاخص بهره وری مالکوئیست بسط داده است. همچنین کارایی هر یک از این زیر واحد ها و کارایی تجمعی آن ها محاسبه و اندیس بهره وری مالمکوئیست برای هر زیر واحد و و اندیس بهره وری مالمکوئیست تجمعی معرفی می شوند.

کلمات کلیدی: شاخص بهره وری مالمکوئیست، تحلیل پوششی داده ها، مدل های چند مرحله ای، پیشرفت، پسرفت.

---

۱ مقدمه

مهمترین مساله برای مدیران در رابطه با واحدهای تصمیم گیرنده به منظور هدایت آن ها اطلاع از عملکرد واحد ها می باشد. پیچیدگی اطلاعات، حجم بسیار زیاد عملکرد، اثرات عوامل بیرونی، اثر واحدهای رقیب بر عملکرد، محدود بودن واحدها در رابطه با تصمیم گیری های مناسب، تغییرات ناگهانی خط مشی به علت برخوردهای انفعالی با مشکلات حاد (مانند بیکاری و...) از جمله عواملی است که مدیر بدون برخورد علمی نمی‌تواند از کارکرد واحدهای تحت امر، مطلع باشد و تصمیم گیری مناسبی را در جهت بهبود کارایی و بهره وری اتخاذ نماید. میزان پیشرفت با پسرفت یک واحد تصمیم گیرنده اولین بار با ایده تقسیم کارایی زمان حال به کارایی زمان گذشته مطرح گردید که به دلیل مشکلات زیاد، شاخص بهره وری مالمکوئیست که نشان دهنده پیشرفت و پسرفت واحدهای تصمیم گیرنده می باشد معرفی گردید.

*عهده دار مکاتبات
آدرس الکترونیکی: mohamadalijahantighi@yahoo.com

Archive of SID
www.SID.ir

در سال ۱۹۵۳ مالمکوئیست [۱] اندیسی را معرفی کرد که مبنای کار کیوز و همکاران در سال ۱۹۸۲ برای ساختن اندیس بهره وری شد. در حال حاضر در میان محققینی که به تحلیل عملکرد واحد ها می پردازند، اندازه گیری و تحلیل تغییرات بهره وری بسیار مورد توجه می باشد. مانیاداکیس و همکاران [۲] اندیس بهره وری ای که تعمیم یافته ی اندیس بهره وری مالمکوئیست بود را معرفی کردند. اندیس بهره وری هنگامی که قیمت ورودی ها مشخص و هدف تولید کننده ها به حداقل رسانیدن هزینه است قابل استفاده می باشد. به این منظور آن ها اندیس بهره وری را طوری توسعه دادند که نه تنها کارایی تکنیکی و تغییرات تکنولوژی بلکه کارایی تخصیصی و اثر تغیرات قیمت ورودی ها را نیز در نظر بگیرد. چن[۳] بر مبنای آن چه در تحلیل پوششی داده ها برای محاسبه این اندیس عنوان شده بود اندیس بهره وری مالمکوئیست غیر شعاعی که در آن نظر تصمیم گیرنده در رابطه با اولویت نیز در نظر گرفته شده بود را مطرح کرد. حسن این اندیس این است که می تواند با اسلک های غیر صفر ناکارایی ممکنه را بر طرف نماید. لین و همکاران[۴] ۱۱۷ شعبه بانک را در تایوان در نظر گرفته و با استفاده از تحلیل پوششی داده ها به ارزیابی عملکرد این واحد ها پرداختند. ونگ و همکاران [۵] فرآیند ساختار سلسله مراتبی را برای انتخاب سیاست های بانک به کار گرفتند. نتایج به دست آمده مبین این مطلب است که در انتخاب استراتژی، مدیریت ریسک و نسبت ها مالی بانک ها از مهم ترین ملاحظات می باشند. هوآنگ- ای وو و همکاران[۶] برای ارزیابی عملکرد بانک ها تصمیم گیری چند معیاره فازی را پیشنهاد دادند.

در این مقاله واحد های تصمیم گیرنده و زیر واحدهای آن ها که غالبا به صورت سری مطرح می شوند در نظر گرفته شده و عملکرد آن ها با زیر مجموعه های خود نسبت به گذشته و دیگران محاسبه شده است. در نیل به این هدف از مهمترین تکنینک محاسبه پیشرفت و پسرفت یک واحد که شاخص بهره وری مالکوئیست می باشد استفاده شده است. همچنین رویکرد شاخص بهره وری مالکوئیست بسط داده شده و برای محاسبه دو مرحله ای سری زیر واحدهای یک واحد تصمیم گیرنده با ورودی و خروجی های میانی مورد استفاده قرار گرفته است.

بخش های مختلف این مقاله به شرح ذیل است: در بخش اول به اختصار تحلیل پوششی داده ها معرفی خواهد شد در ادامه، در بخش دوم، به معرفی اندیس بهره وری مالمکوئیست خواهیم پرداخت. در بخش سوم شاخص بهره وری مالکوئیست چند مرحله ای با ورودی و خروجی میانی مورد بحث قرار میگیرد و در بخش چهارم به بیان نتایج و پیشنهادات خواهیم پرداخت.

۲ تحلیل پوششی داده ها

تحلیل پوششی داده ها، تکنیکی برای محاسبه کارایی نسبی مجموعه ای از واحدهای تصمیم گیرنده است که با استفاده از برنامه ریزی ریاضی انجام می گیرد، عبارت نسبی به این دلیل است که کارایی حاصل نتیجه مقایسه واحدها با یکدیگر است. وقتی گفته می شود واحد تصمیم گیرنده Pام کاراست یعنی این واحد خوب عمل می کند و از منابع به خوبی استفاده می کند. از آن جا که هدف پیدا نمودن مرز کارا یا تابع تولید است، که معمولا در دسترس نمی باشد، با پذیرفتن اصول موضوعه زیر مجموعه امکان تولید زیر ساخته می شود و مرز

Archive of SID

www.SID.ir

مجموعه به عنوان تقریبی از تابع تولید در نظر گرفته می شود. مجموعه امکان تولید T_c که در آن تکنولوژی با بازده به مقیاس ثلبت در نظر گرفته شده است به صورت زیر است:

$$T_c=\left\{(x,y): x\geq\sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_j \quad , \quad y\leq\sum_{j=1}^{n}\lambda_j y, \quad \lambda_j\geq 0 \qquad j=1,\dots,n\right\}$$

فرض کنید $DMUj \ (j=1,\cdots,n)$، n واحد متجانس هستند که با به کار بردن بردار ورودی $x_j \quad (j=1,\cdots,n)$ بردار خروجی $y_j \quad (j=1,\cdots,n)$، را تولید می نمایند. همچنین فرض کنید که $x_j\in R^{m\geq\circ} \ (j=1,\cdots,n)$ و $y_j\in R^{s\geq\circ} \quad (j=1,\cdots,n)$. اگر در T_c امکان تولیدی مانند (x,y) یافت نشود که غالب بر $(x_\circ,y_\circ)$ باشد, در این صورت $DMU_\circ$ کارای نسبی است. برای بررسی حالت اول مدل زیر که به مدل CCR معروف است حل می شود.

$$\begin{aligned}&Min \ \ \theta\\ &s.t. \ \ (\theta X_O, Y_O)\in T_C.\end{aligned} \tag{۱}$$

که در آن (x_o,y_o) بردار ورودی ها و خروجی های DMU_o است. مدل (۱) به مدل CCR با ماهیت ورودی در فرم پوششی مشهور است. با توجه به تعریف T_c، مدل (۱) به صورت زیر تبدیل می شود:

$$\begin{aligned}&Min \ \ \theta\\ &s.t. \quad X\lambda\leq\theta\ X_O,\\ &\qquad\ \ Y\lambda\geq Y_O,\\ &\qquad\ \ \lambda\geq 0.\end{aligned} \tag{۲}$$

توجه کنید که مدل (۲) همواره شدنی است و $0<\theta^*\leq 1$.

اگر $\theta^*=1$ در این صورت DMU_o کاراست در غیر این صورت ناکاراست. دوآل فرم پوششی که معروف بـه فرم مضربی است چنین می باشد:

$$\begin{aligned}&Max \quad U\ Y_o\\ &s.t. \quad U\ Y_j - V\ X_j\leq 0, \qquad j=1,\dots,n,\\ &\qquad\ \ V\ X_o=1,\\ &\qquad\ \ u\geq 0,\\ &\qquad\ \ v\geq 0.\end{aligned} \tag{۳}$$

۳ شاخص بهره وری مالمکوئیست

در تحلیل های اقتصادی یکی از شاخص هایی که در بررسی رشد بهره وری کل عوامل، همواره مورد توجه بوده است شاخص بهره وری مالمکوئیست می باشد.

Archive of SID
www.SID.ir

این شاخص ابتدا توسط مالم کوئیست[۱] به عنوان شاخص استاندارد معرفی شد و برای اولین بار توسط کیوز و همکاران[۷]، درتئوری تولید به کار گرفته شد. کیوز و همکاران [۷] برای محاسبه شاخص ها، ازتابع فاصله D(.) استفاده کرده و فرض نمودند که همه واحدها نسبت به مرز تولید زمان خود، کارا می باشند یعنی $D^k(x^k,y^k)\equiv 1$. در واقع، آن ها برای محاسبه رشد بهره وری یک DMU طی زمان t_1، t_2 به محاسبه نسبت تابع فاصله مشاهدات آن DMU در زمآن های مذکور نسبت به یکی از مرزهای کارایی زمان t_1، t_2 پرداخت و دو شاخص بهره وری را ارایه نمود. تابع فاصله فوق الذکر به صورت ذیل تعریف می شود:

$D^{t_2}(x^{t_1},y^{t_1})=Min\{\theta\big|$ بتواند با تکنولوژی زمان t^2 ، y^{t_1} را تولید کند $\theta x^{t_1}\}$

با توجه به یکسان بودن تعریف کارایی فنی فارل و تابع فاصله فوق الذکر، فار و همکاران [۸] از تکنیک های تحلیل پوششی داده ها برای محاسبه شاخص مالمکوئیست استفاده کردند و آن را به صورت میانگین هندسی شاخص های بهره وری مالمکوئیست ارایه شده توسط کیوز و همکاران ارایه نمودند

در این تحقیق برای محاسبه رشد بهره وری عوامل تولید واحد تصمیم گیرنده K درطی زمان t_1، t_2 از شاخص بهره وری مالمکوئیست فار استفاده می شود. این شاخص، با بهره گیری از مدل های تحلیل پوششی داده ها و براساس اندازه گیری تابع فاصله یا کارایی فنی مختصات مشاهدات واحد Kدر زمان t_1، t_2 نسبت به مرزهای تولید با تکنولوژی بازده به مقیاس ثابت زمآن های t_1، t_2 صورت می پذیرد.

فرض کنید تعداد واحد های تصمیم گیرنده برابر n می باشد و $x_j^{t_1}=(x_{1j}^{t_1},...,x_{mj}^{t_1})$ و $y_j^{t_1}=(y_{1j}^{t_1},...,y_{sj}^{t_1})$ به ترتیب بردارهای ورودی وخروجی واحد تصمیم گیرنده jام $(j\in\{1,...,n\})$ درزمان t_1 و $x_j^{t_2}=(x_{1j}^{t_2},...,x_{mj}^{t_2})$ و $y_j^{t_2}=(y_{1j}^{t_2},...,y_{sj}^{t_2})$ به ترتیب بردارهای ورودی وخروجی واحد مزبور در زمان t_2 می باشد. براساس شاخص بهره وری مالمکوئیست، رشد بهره وری واحد تصمیم گیرنده oام $(o\in\{1,...,n\})$ در زمان t_2 نسبت به t_1 از روش ذیل محاسبه می گردد.

$$M_o=\left[\frac{D_o^{t_1}(x_o^{t_2},y_o^{t_2})}{D_o^{t_1}(x_o^{t_1},y_o^{t_1})}\times\frac{D_o^{t_2}(x_o^{t_2},y_o^{t_2})}{D_o^{t_2}(x_o^{t_1},y_o^{t_1})}\right]^{1/2}$$

$$M_o=\frac{D_o^{t_2}(x_o^{t_2},y_o^{t_2})}{D_o^{t_1}(x_o^{t_1},y_o^{t_1})}\left[\frac{D_o^{t_1}(x_o^{t_2},y_o^{t_2})}{D_o^{t_2}(x_o^{t_2},y_o^{t_2})}\times\frac{D_o^{t_1}(x_o^{t_1},y_o^{t_1})}{D_o^{t_2}(x_o^{t_1},y_o^{t_1})}\right]^{1/2}$$

که در آن:

Archive of SID

www.SID.ir

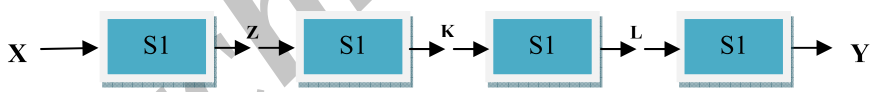
$$D_o^{t1}(X_o^{t1},Y_o^{t1})=Min\ \theta$$
$$s.t.$$
$$X^{t1}\lambda \le \theta\ X_o^{t1},$$
$$Y^{t1}\lambda \ge Y_o^{t1},$$
$$\lambda \ge 0. \tag{۴}$$

$$D_o^{t2}(X_o^{t1},Y_o^{t1})=Min\ \theta$$
$$s.t.$$
$$X^{t2}\lambda \le \theta\ X_o^{t1},$$
$$Y^{t2}\lambda \ge Y_o^{t1},$$
$$\lambda \ge 0. \tag{۵}$$

$D_o^{t1}(x_o^{t2},y_o^{t2})$ و $D_o^{t2}(x_o^{t2},y_o^{t2})$ نیز به طور مشابه محاسبه می شوند.
درصورتی که مقدار M_o بزرگتر از یک، کوچکتر ومساوی یک باشد، به ترتیب نشان دهنده افزایش،کاهش و عدم تغییر بهره وری واحد مورد نظر بوده است.

٤ شاخص بهره وری مالمکوئیست چند مرحله ای با ورودی و خروجی میانی

فرض کنید n واحد تصمیم گیرنده موجود است به طوری که هر واحد تصمیم گیرنده دارای چهار زیر واحد باشند که بصورت زیر می توان نشان داد.



شکل (۱)

بنابراین هر واحد تصمیم گیرنده دارای چهار مرحله یا زیر واحد می باشد و (X, Z, K, L, Y) بردار مختصات واحد تصمیم گیرنده می باشد. در این بردار X بردار ورودی، Y بردار خروجی و L,K,Z بردارهایی با نام تولیدات میانی می باشند. کارایی مرحله اول، دوم، سوم، چهارم و تجمعی از رابطه زیر حاصل می شوند.

$$e^1=\frac{WZ}{VX},\quad e^2=\frac{\overline{U}K}{WZ},\quad e^3=\frac{\overline{V}L}{\overline{U}K},\quad e^4=\frac{UY}{\overline{V}L},\quad e^a=\frac{UY}{VY} \tag{۶}$$

مدل مضربی جهت محاسبه کارایی نسبی واحد تصمیم گیرنده Pام به صورت زیر است.

Archive of SID
www.SID.ir

$$
\begin{aligned}
Max \quad & \frac{UY_p}{VX_p} \\
s.t. \quad & \frac{UY_j}{VX_j} \le 1, \quad j=1,\dots,n, \\
& \frac{WZ_j}{VX_j} \le 1, \quad j=1,\dots,n, \\
& \frac{\bar{U}K_j}{WZ_j} \le 1, \quad j=1,\dots,n, \\
& \frac{\bar{V}L_j}{\bar{U}K_j} \le 1, \quad j=1,\dots,n, \\
& \frac{UY_j}{\bar{V}L_j} \le 1, \quad j=1,\dots,n, \\
& U \ge 1\varepsilon, \quad V \ge 1\varepsilon, \quad W \ge 1\varepsilon, \\
& \bar{U} \ge 1\varepsilon, \quad \bar{V} \ge 1\varepsilon.
\end{aligned}
\qquad (۷)
$$

مدل خطی متناظر مدل (۷) به صورت زیر است.

$$
\begin{aligned}
Max \quad & UY_p \\
s.t. \quad & UY_j - VX_j \le 0, \quad j=1,\dots,n, \\
& WZ_j - VX_j \le 0, \quad j=1,\dots,n, \\
& \bar{U}K_j - WZ_j \le 0, \quad j=1,\dots,n, \\
& \bar{V}L_j - \bar{U}K_j \le 0, \quad j=1,\dots,n, \\
& UY_j - \bar{V}L_j \le 0, \quad j=1,\dots,n, \\
& VX_p = 1, \\
& U \ge 1\varepsilon, V \ge 1\varepsilon, W \ge 1\varepsilon, \\
& \bar{U} \ge 1\varepsilon, \bar{V} \ge 1\varepsilon.
\end{aligned}
\qquad (۸)
$$

بدیهی است دسته قیود اول در مدل (۳.۴) از مجموع دسته قیود دوم الی چهارم حاصل می شود و لذا زاید است و می تواند در مدل حذف گردد. با حذف این دسته قیود، دوآل آن به صورت زیر خواهد بود.

$$
\begin{aligned}
& Min \ \theta \\
& s.t. \quad X\lambda^1 \le \theta X_p, \\
& \quad Z\lambda^1 - Z\lambda^2 \ge 0, \\
& \quad K\lambda^2 - K\lambda^3 \ge 0, \\
& \quad L\lambda^3 - L\lambda^4 \ge 0, \\
& \quad Y\lambda^4 \ge Y_p, \\
& \quad \lambda^1 \ge 0, \ \lambda^2 \ge 0, \ \lambda^3 \ge 0, \ \lambda^4 \ge 0.
\end{aligned}
\qquad (۹)
$$

بدیهی است رابطه زیر بین کارایی مراحل یک واحد تصمیم گیرنده و تجمعی آن وجود دارد.

Archive of SID

www.SID.ir

$$e_p^a = e_p^1 . e_p^2 . e_p^3 . e_p^4$$

به کمک این رابطه می توان فهمید که یک واحد تصمیم گیرنده کارا است اگر و فقط اگر تمام مراحل آن واحد کارا باشد. حال فرض کنید برای همه واحدهای تصمیم گیرنده در دو مقطع زمانی داده وجود دارد.

$$(X_j^{t+1}, Z_j^{t+1}, K_j^{t+1}, L_j^{t+1}, Y_j^{t+1}) \quad ، \quad \left(X_j^t, Z_j^t, K_j^t, L_j^t, Y_j^t\right)$$

به ترتیب مختصات DMU_j در لحظه t ،t+1 باشد. در این صورت برای هر واحد تصمیم گیرنده و مراحل چهار کارایی می توان به دست آورد که به کمک آن ها بتوان شاخص بهره وری مالمکوئیست را محاسبه کرد.
کارایی واحد تصمیم گیرنده pام با مختصات لحظه t نسبت به مجموعه امکان تولید لحظه t از حل مسالهٔ زیر به دست می آید.

$$\begin{aligned}
\theta^t(t) = Max \quad & UY_p^t \\
s.t. \quad & WZ_j^t - VX_j^t \le 0, \ j = 1,\dots,n, \\
& \bar{U}Y_j^t - WZ_j^t \le 0, \ j = 1,\dots,n, \\
& \bar{V}L_j^t - \bar{U}K_j^t \le 0, \ j = 1,\dots,n, \\
& UY_j^t - \bar{V}L_j^t \le 0, \ j = 1,\dots,n, \\
& VX_p^t = 1, \\
& U \ge 0, \ V \ge 0, \ W \ge 0 \\
& \bar{U} \ge 0, \quad \bar{V} \ge 0.
\end{aligned} \qquad (۱۰)$$

فرض کنید $(V^*, \bar{U}^*, W^*, \bar{V}^*, U^*)$ جواب بهین مدل (۱۰) باشد کارایی مراحل اول الی چهارم و کارایی تجمعی واحد تصمیم گیرنده Pام در لحظه t نسبت به مجموعه امکان تولید لحظه t از رابطه زیر حاصل می شود.

$$e_p^{1,t}(t) = \frac{W^* Z_p^t}{V^* X_p^t}, \ e_p^{2,t}(t) = \frac{\bar{U}^* K_p^t}{W^* Z_p^t}, \ e_p^{3,t}(t) = \frac{\bar{V}^* L_p^t}{\bar{U}^* K_p^t}, \ e_p^{4,t}(t) = \frac{U^* Y_p^t}{\bar{V}^* L_p^t}, \ e_p^{a,t}(t) = \frac{U^* Y_p^t}{V^* Y_p^t}$$
(۱۱)

کارایی واحد p ام با مختصات لحظه t نسبت به مجموعه امکان تولید لحظه t+1 از مسالهٔ زیر به دست می آید.

www.SID.ir

$$\begin{aligned} \theta_p^{t+1}(t) = Max \quad & UY_p^t \\ s.t. \quad & WZ_j^{t+1} - VX_j^{t+1} \le 0, \quad j = 1,\dots,n, \\ & \bar{U}Y_j^{t+1} - WZ_j^{t+1} \le 0, \quad j = 1,\dots,n, \\ & VL_j^{t+1} - \bar{U}K_j^{t+1} \le 0, \quad j = 1,\dots,n, \\ & UY_j^{t+1} - \bar{V}L_j^{t+1} \le 0, \quad j = 1,\dots,n, \\ & VX_p^t = 1, \\ & U \ge 0, \quad V \ge 0, \quad W \ge 0, \\ & \bar{U} \ge 0, \quad \bar{V} \ge 0. \end{aligned} \tag{۱۲}$$

با فرض ($V^*, \bar{U}^*, W^*, \bar{V}^*, U^*$) به عنوان جواب بهین مساله (۱۲) کارایی مراحل اول الی چهارم و کارایی تجمعی واحد Pام در لحظه t نسبت به مجموعه امکان تولید در لحظه t از رابطه زیر حاصل می شود.

$$e_p^{1,t+1}(t) = \frac{W^* Z_p^t}{V^* X_p^t}, \quad e_p^{2,t+1}(t) = \frac{\bar{U}^* K_p^t}{W^* Z_p^t}, \quad e_p^{3,t+1}(t) = \frac{\bar{V}^* L_p^t}{\bar{U}^* K_p^t}, \quad e_p^{4,t+1}(t) = \frac{U^* Y_p^t}{\bar{V}^* L_p^t},$$
$$e_p^{a,t+1}(t) = \frac{U^* Y_p^t}{V^* Y_p^t} \tag{۱۳}$$

کارایی واحد تصمیم گیرنده pام با مختصات لحظه t+1 نسبت به مجموعه امکان تولید لحظه t از حل مسالهٔ زیر به دست می آید.

$$\begin{aligned} \theta_p^{t}(t+1) = Max \quad & UY_p^{t+1} \\ s.t. \quad & WZ_j^{t} - VX_j^{t} \le 0, \quad j = 1,\dots,n, \\ & \bar{U}Y_j^{t} - WZ_j^{t} \le 0, \quad j = 1,\dots,n, \\ & \bar{V}L_j^{t} - \bar{U}K_j^{t} \le 0, \quad j = 1,\dots,n, \\ & UY_j^{t} - VL_j^{t} \le 0, \quad j = 1,\dots,n, \\ & VX_p^{t+1} = 1, \\ & U \ge 0, \quad V \ge 0, \quad W \ge 0, \\ & \bar{U} \ge 0, \quad \bar{V} \ge 0. \end{aligned} \tag{۱۴}$$

فرض کنید ($V^*, \bar{U}^*, W^*, \bar{V}^*, U^*$) جواب بهین مساله (۱۴) باشد کارایی مراحل اول الی چهارم و کارایی تجمعی واحد Pام در لحظه t+1 نسبت به مجموعه امکان تولید لحظه t از رابطه زیر حاصل می شود.

Archive of SID
www.SID.ir

$$e_p^{1,t}(t+1)=\frac{W^*Z_p^{t+1}}{V^*X_p^{t+1}},\ e_p^{2,t}(t)=\frac{\overline{U}^*K_p^{t+1}}{W^*Z_p^{t+1}},\ e_p^{3,t}(t+1)=\frac{\overline{V}^*L_p^{t+1}}{\overline{U}^*K_p^{t+1}},e_p^{4,t}(t+1)=\frac{U^*Y_p^{t+1}}{\overline{V}^*L_p^{t+1}},$$
$$e_p^{a,t}(t+1)=\frac{U^*Y_p^{t+1}}{V^*Y_p^{t+1}} \qquad (۱۵)$$

کارایی واحد تصمیم گیرنده pام با مختصات لحظه t+1 نسبت به مجموعه امکان تولید لحظه t+1 از حل مسالهٔ زیر به دست می آید.

$$\begin{aligned}\theta_p^{t+1}(t+1)=Max\quad & UY_p^{t+1}\\ s.t.\quad & WZ_j^{t+1}-VX_j^{t+1}\le 0,\ j=1,\dots,n,\\ & \overline{U}Y_j^{t+1}-WZ_j^{t+1}\le 0,\ j=1,\dots,n,\\ & \overline{V}L_j^{t+1}-\overline{U}k_j^{t+1}\le 0,\ j=1,\dots,n,\\ & UY_j^{t+1}-\overline{V}L_j^{t+1}\le 0,\ j=1,\dots\dots,n,\\ & VX_p^{t+1}=1,\\ & U\ge 0,\ V\ge 0,\ W\ge 0,\\ & \overline{U}\ge 0,\ \overline{V}\ge 0.\end{aligned} \qquad (۱۶)$$

فرض کنید $(V^*,\overline{U}^*,W^*,\overline{V}^*,U^*)$ جواب بهین مساله (۱۶) باشد. در این صورت کارایی مراحل اول الی چهارم و کارایی تجمعی واحد Pام در لحظه t+1 نسبت به مجموعه امکان تولید لحظه t+1 از رابطه زیر حاصل می شود.

$$e_p^{1,t}(t+1)=\frac{W^*Z_p^{t+1}}{V^*X_p^{t+1}},\ e_p^{2,t}(t)=\frac{\overline{U}^*K_p^{t+1}}{W^*Z_p^{t+1}},\ e_p^{3,t}(t+1)=\frac{\overline{V}^*L_p^{t+1}}{\overline{U}^*K_p^{t+1}},\ e_p^{4,t}(t+1)=\frac{U^*Y_p^{t+1}}{\overline{V}^*L_p^{t+1}},$$
$$e_p^{a,t}(t+1)=\frac{U^*Y_p^{t+1}}{V^*Y_p^{t+1}}$$

(۱۷)

بنابراین شاخص بهره وری مالمکوئیست مرحله اول در زمان های t+1 نسبت به t از رابطه زیر به دست می آید.

$$\begin{aligned}M_P^1&=\left(\frac{\theta_P^{1,t}(t+1).\theta_p^{1,t+1}(t+1)}{\theta_p^{1,t}(t).\theta_p^{1,t+1}(t)}\right)^{1/2}\\ &=\frac{\theta_P^{1,t+1}(t+1)}{\theta_p^{1,t}(t)}.\left(\frac{\theta_P^{1,t}(t+1).\theta_p^{1,t}(t)}{\theta_p^{1,t+1}(t).\theta_p^{1,t+1}(t+1)}\right)^{1/2}\end{aligned} \qquad (۱۸)$$

در این حالت سه حالت زیر وجود خواهد داشت.

Archive of SID
www.SID.ir

الف) اگر $M_p^1 > 1$ آن گاه مولفه اول واحد تصمیم گیرنده p در لحظه t+1 نسبت به لحظه t پیشرفت دارد.

ب) اگر $M_p^1 < 1$ آن گاه مولفه اول واحد تصمیم گیرنده p در لحظه t+1 نسبت به لحظه t پسرفت دارد.

ج) اگر $M_p^1 = 1$ آن گاه مولفه اول واحد تصمیم گیرنده p در لحظه t+1 نسبت به لحظه t نه پیشرفت دارد نه پسرفت دارد.

شاخص بهره وری مالمکوئیست مرحله دوم در زمآن های t+1 نسبت به t از رابطه زیر به دست می آید.

$$M_P^2 = \left(\frac{\theta_P^{2,t}(t+1).\theta_p^{2,t+1}(t+1)}{\theta_p^{2,t}(t).\theta_p^{2,t+1}(t)} \right)^{1/2} = \frac{\theta_P^{2,t+1}(t+1)}{\theta_p^{2,t}(t)} . \left(\frac{\theta_P^{2,t}(t+1).\theta_p^{2,t}(t)}{\theta_p^{2,t+1}(t).\theta_p^{2,t+1}(t+1)} \right)^{1/2} \qquad (۱۹)$$

در این صورت سه حالت زیر وجود خواهد داشت.

الف) اگر $M_p^2 > 1$ آن گاه مولفه دوم واحد تصمیم گیرنده p در لحظه t+1 نسبت به لحظه t پیشرفت دارد.

ب) اگر $M_p^2 < 1$ آن گاه مولفه دوم واحد تصمیم گیرنده p در لحظه t+1 نسبت به لحظه t پسرفت دارد.

ج) اگر $M_p^2 = 1$ آن گاه مولفه دوم واحد تصمیم گیرنده p در لحظه t+1 نسبت به لحظه t نه پیشرفت دارد نه پسرفت دارد.

شاخص بهره وری مالمکوئیست مرحله سوم در زمآن های t+1 نسبت به t از رابطه زیر به دست می آید.

$$M_P^3 = \left(\frac{\theta_P^{3,t}(t+1).\theta_p^{3,t+1}(t+1)}{\theta_p^{3,t}(t).\theta_p^{3,t+1}(t)} \right)^{1/2} = \frac{\theta_P^{3,t+1}(t+1)}{\theta_p^{3,t}(t)} . \left(\frac{\theta_P^{3,t}(t+1).\theta_p^{3,t}(t)}{\theta_p^{3,t+1}(t).\theta_p^{3,t+1}(t+1)} \right)^{1/2} \qquad (۲۰)$$

Archive of SID

در این صورت سه حالت زیر وجود خواهد داشت.

الف) اگر $M_p^3 > 1$ آن گاه مولفه سوم واحد تصمیم گیرنده p در لحظه t+1 نسبت به لحظه t پیشرفت دارد.

ب) اگر $M_p^3 < 1$ آن گاه مولفه سوم واحد تصمیم گیرنده p در لحظه t+1 نسبت به لحظه t پسرفت دارد.

ج) اگر $M_p^3 = 1$ آن گاه مولفه سوم واحد تصمیم گیرنده p در لحظه t+1 نسبت به لحظه t نه پیشرفت دارد نه پسرفت دارد.

شاخص بهره وری مالمکوئیست مرحله چهارم در زمآن های t+1 نسبت به t از رابطه زیر به دست می آید.

www.SID.ir

$$M_P^4 = \left(\frac{\theta_P^{4,t}(t+1).\theta_p^{4,t+1}(t+1)}{\theta_p^{4,t}(t).\theta_p^{4,t+1}(t)} \right)^{1/2}$$
$$= \frac{\theta_P^{4,t+1}(t+1)}{\theta_p^{4,t}(t)} . \left(\frac{\theta_P^{4,t}(t+1).\theta_p^{4,t}(t)}{\theta_p^{4,t+1}(t).\theta_p^{4,t+1}(t+1)} \right)^{1/2} \tag{۲۱}$$

در این صورت سه حالت زیر وجود خواهد داشت.

الف) اگر $M_p^4 > 1$ آن گاه مولفه چهارم واحد تصمیم گیرنده p در لحظه t+1 نسبت به لحظه t پیشرفت دارد.

ب) اگر $M_p^4 < 1$ آن گاه مولفه چهارم واحد تصمیم گیرنده p در لحظه t+1 نسبت به لحظه t پسرفت دارد.

ج) اگر $M_p^4 = 1$ آن گاه مولفه چهارم واحد تصمیم گیرنده p در لحظه t+1 نسبت به لحظه t نه پیشرفت دارد نه پسرفت دارد.

شاخص بهره وری مالمکوئیست تجمعی در زمآن های t+1 نسبت به لحظه t از رابطه زیر به دست می آید.

$$M_P^a = \left(\frac{\theta_P^{a,t}(t+1).\theta_p^{a,t+1}(t+1)}{\theta_p^{a,t}(t).\theta_p^{a,t+1}(t)} \right)^{1/2} \tag{۲۲}$$
$$= \frac{\theta_P^{a,t+1}(t+1)}{\theta_p^{a,t}(t)} . \left(\frac{\theta_P^{a,t}(t+1).\theta_p^{a,t}(t)}{\theta_p^{a,t+1}(t).\theta_p^{a,t+1}(t+1)} \right)^{1/2}$$

در این حالت سه حالت زیر وجود خواهد داشت.

الف. اگر $M_p^a > 1$ آن گاه واحد تصمیم گیرندهٔ p ام (تجمعی) در لحظه t+1 نسبت به لحظه t پیشرفت دارد.

ب. اگر $M_p^a < 1$ آن گاه واحد تصمیم گیرندهٔ p ام (تجمعی) در لحظه t+1 نسبت به لحظه t پسرفت دارد.

ج. اگر $M_p^a = 1$ آن گاه واحد تصمیم گیرندهٔ p ام (تجمعی) در لحظه t+1 نسبت به لحظه t نه پیشرفت دارد نه پسرفت دارد.

۵ نتیجه گیری

فرموله کردن مدل های واقعی که در برگیرنده جزئیات خاصی هستند مستلزم بررسی روابط مختلف و متعددی می باشد تا بتوان تمام جزئیات آن را به منظور به دست آوردن نتایج معتبر در نظر گرفت. زیر واحدهای یک واحد تصمیم گیرنده که همان مراحل موجود آن واحد می باشند می توانند به صورت سری یا موازی به کار روند که هر دوی این حالات کاربرد های عملی فراوانی در مسائل حقیقی دارند.

در این مقاله به بررسی شاخص بهره وری مالمکوئیست در حالت سری بودن چند زیر واحد می باشد پرداخته شده است. با در نظر گرفتن مدل ارایه شده می توان میزان پیشرفت یا پسرفت واحدها را در دو دوره ارزیابی برای

Archive of SID
www.SID.ir

حالت شبکه ای محاسبه نمود. پیشنهادات بعدی برای پیشبرد هدف این مقاله در نظر گرفتن حالت اتصال موازی زیر واحد ها و بسط و توسیع مدل های معرفی شده می باشد.

منابع

[1] Malmquist, S., (1953). Index numbers and indifference surfaces. Trabajos de Estatistica, 4, 209–242.
[2] Maniadakis N., Thanassoulis E., (2004). A cost Malmquist productivity index. European Journal of Operation al Research, 154, 396–409.
[3] Chen, Y., (2003). A non-radial Malmquist productivity index with an illustrative application to Chinese major industries. Int. J. Production Economics, 83, 27–35.
[4] Lin, T. T., Lee, C. C., Chiu, T. S. F., (2009). Application of DEA in analyzing a bank's operating performance. Expert Systems with Applications, 36, 8883–8891.
[5] Wang, T. C., Lin, Y. L., (2009). Applying the consistent fuzzy preference relations to select merger strategy for commercial banks in new financial environments. Expert Systems with Applications, 36, 7019–7026.
[6] Wu, H. Y., Tzeng, G. H., Chen, Y. H., (2009). A fuzzy MCDM approach for evaluating banking performance based on Balanced Scorecard. Expert Systems with Applications, 6, 10135- 10147.
[7] Caves D.W., Christensen L. R. Diewert, W. E., (1982). The economic theory of index numbers and the measurement of input, output and productivity. Econometrica, 50, 1393–1414.
[8] Fare, R., Grosskopf, S., Lindgren, B., Ross, P., (1989). Productivity Developments in Swedish Hospitals: A Malmquist Output Index Approach, Southern Illinois University at Car-bondale. Department of Economics. Working Paper.
[9] Charnes A, Cooper W. W. W., Rhodes E., (1978). Measuring the efficiency of decision making units. European Journal of operational research. 2; 429-444.
[10] Grifell-Tatjé E., Lovell C. A. K., Pastor J. T., (1998). A Quasi-Malmquist Productivity Index. Journal of Productivity Analysis, 10, 7–20.

Archive of SID

www.SID.ir