مجله تحقیق در عملیات و کاربردهای آن، سال هشتم، شماره ۴ (پیاپی ۳۱)، زمستان ۹۰، ص ص ۱۰۵-۹۳
شاپا ۷۲۸۶-۲۲۵۱

# تخصیص مجدد منابع با حفظ پایداری مرزهای کارآ در مناطق

سهراب کرد رستمی*[1]، علیرضا امیر تیموری[2]، سمانه فاضلی سندیانی[1]
[1] دانشگاه آزاد اسلامی، واحد لاهیجان، گروه ریاضی کاربردی، لاهیجان، ایران
[2] دانشگاه آزاد اسلامی، واحد رشت، گروه ریاضی کاربردی، رشت، ایران

رسید مقاله: چهاردهم مهرماه ۱۳۸۸
پذیرش مقاله: اول آبان ماه ۱۳۸۹

## چکیده

در مقاله پاچکوا [۱] تخصیص مجدد مقید شده منابع، میان واحدهای مستقل یک واحد تجمعی با هدف بهینه کردن کل مصرف ورودی و تولید خروجی آن واحد، مورد تحلیل و بررسی قرار گرفته است. در این مقاله چند مدل تخصیص مجدد، مشابه مدل های ارایه شده در مقاله پاچکوا [۱] پیشنهاد می شود. با این تفاوت که این مدل ها می توانند نقطه تصویر هر یک از واحدهای مستقل مربوط به واحد تجمعی تحت بررسی را در هر منطقه، با حفظ پایداری مرزهای کارآ ارایه دهند و علاوه بر جریان بهینه ورودی، جریان بهینه خروجی را نیز در تخصیص مجدد نشان دهند. همچنین، کاربردی از مدل های پیشنهادی بر روی داده های بانک، انجام شده است.

**کلمات کلیدی:** تحلیل پوششی داده ها، تخصیص مجدد، واحد تجمعی.

## ۱ مقدمه

در بسیاری از کاربردهای تحلیل پوششی داده ها، اغلب با حالتی سر و کار داریم که همه $DMU$ها تحت چتر یک تصمیم گیرنده مرکزی $(DM)$ هستند، به طوری که $DM$ بر آن ها نظارت می‌کند. این نوع وضعیت وقتی اتفاق می افتد که همه واحدها متعلق به یک سازمان می باشند به طوری که سازمان به واحدها، منابع لازم را برای به دست آوردن ورودی هایشان می دهد. بسیاری از کابردهای متعارف $DEA$ از قبیل شعبه های بانک در این گروه قرار دارند. یک واحد تجمعی را که شامل واحدهای مستقل در مناطق مختلف است در نظر بگیرید. حتی اگر همه واحدهای مستقل در مناطق خودشان کارآ باشند، چنین واحد تجمعی ممکن است ناکارآ باشد. این به دلیل آن است که تخصیص منابع در بین واحدهای مستقل به صورت بهینه انجام نشده است. بنابراین یک تخصیص مجدد منابع میان واحدهای مستقل نیاز است تا به این ترتیب، واحد تجمعی به کارآیی کامل برسد.

*عهده دار مکاتبات
آدرس الکترونیکی: Krostami@guilan.ac.ir

لوزانو و ویلا [۲] دو مدل شعاعی وغیر شعاعی تخصیص منابع متمرکز را معرفی کردند، به طوری که هدف آن ها بهینه کردن کل مصرف منابع یک سازمان بود. به دنبال آن اسمیلد و پارادی و پاستور[۳] مدل تخصیص منابع متمرکز برای $DMU$های ناکارآ $(CRAI-BCC)$ را مطرح کردند. آن ها پیشنهاد کردند که برای بهینه کردن کل مصرف منابع یک سازمان، تنها اصلاح واحدهای ناکارآ، در نظر گرفته شود.

پاچکوا [۱]، با در نظرگرفتن چند واحد تجمعی و چند منطقه و با فرض این که هر واحد تجمعی، تنها شامل یک واحد مستقل در هر منطقه باشد، چند مدل تخصیص مجدد منابع، ارایه داد. به طوری که در این مدل ها علاوه بر تراکنش های درون سازمانی، تراکنش های سازمان های دیگر هم مد نظر قرار می گیرد. دراین مقاله چند مدل تخصیص مجدد، مشابه مدل های ارایه شده در مقاله پاچکوا [۱] پیشنهاد می شود. با این تفاوت که این مدل ها می توانند نقطه تصویر هر یک از واحدهای مستقل مربوط به واحد تجمعی تحت بررسی را در یک منطقه، با حفظ پایداری مرزهای کارآ ارایه دهند و علاوه بر جریان بهینه ورودی، جریان بهینه خروجی را نیز در تخصیص مجدد نشان دهند. این مقاله به صورت زیر، سازماندهی شده است:

دربخش ۲ مرور کوتاهی بر مدل های تخصیص مجدد پاچکوا [۱] انجام می گیرد. در بخش ۳ روش های پیشنهادی در مورد تخصیص مجدد مطرح می شود. در بخش چهار یک مطالعه کاربردی روی داده های چند بانک انجام می شود و نتایج حاصل، مورد تحلیل و بررسی قرار می گیرد. نتیجه گیری نیز در بخش آخر بیان می شود.

## ۲ مروری بر مدل های تخصیص مجدد

$T$ فرض کنید منطقه جغرافیایی مختلف داده شده باشد. به طوری که درهرمنطقه $t$، $t \in \{1,\dots,T\}$، $n^t$ واحد تولیدی وجود داشته باشد و هر $DMU$ در منطقه $t$، $t \in \{1,\dots,T\}$، $p^t$ خروجی مختلف را با استفاده از $q^t$ ورودی مختلف تولید کند و فرض کنید $q=\max_t\{q^t\}$، $p=\max_t\{p^t\}$.
با فرض این که ورودی $0$ و خروجی $0$ ممکن باشد، می توان گفت که هر $DMU$ با استفاده از $q$ ورودی، $P$ خروجی را می تواند تولید کند. با استفاده از $DEA$ کارآیی $DMU_0^t$ انتخاب شده در منطقه $t$ می تواند با مدل زیرارزیابی شود.

مدل $CCR$ – ماهیت خروجی [۴]

$$\begin{aligned} &Max\ \ \Phi \\ &s.t.\ \ \ \Phi Y_0^t - Y^t\lambda^t + s^{t+} = 0, \\ &\qquad X^t\lambda^t + s^{t-} = X_0^t, \\ &\qquad \lambda^t \in R_+^{n^t},\ \ \ s^{t+} \in R_+^p,\ \ \ s^{t-} \in R_+^q,\ \ \ \Phi\ \ free. \end{aligned} \tag{۱}$$

در حالت بهینه، تابع هدف، کارآیی $DMU_0^t$ و ترکیب بهینه $\left(X^t\lambda^{t*}, Y^t\lambda^{t*}\right)$، نقطه تصویر $DMU_0^t$ را روی مرز کارآ ارایه می دهد.

فرض کنید یک واحد تجمعی $\left(\bar{X}_0,\bar{Y}_0\right)=\left(\sum_t X_0^t,\sum_t Y_0^t\right)$ ترکیبی از تنها یک $DMU_0^t$ در هر منطقه $t$، $t=1,\dots,T$ باشد، کارآیی این واحد می تواند با حل مدل $DEA$ تجمعی زیر به دست آید:

$$
\begin{aligned}
& lex\ \max\left\{\Phi,1s^{t+}+1s^{t-}\right\} \\
& s.t.\quad \Phi\overline{Y}_0-\sum_t Y^t\alpha^t+s^+=0, \\
& \qquad \sum_t X^t\alpha^t+s^-=\overline{X}_0, \\
& \qquad \alpha^t\in R_+^{n^t},\quad s^+\in R_+^P,\quad s^-\in R_+^q,\quad \Phi\ \ free.
\end{aligned}
\tag{۲}
$$

در مدل بالا فرض بر این است که به راحتی بتوان روی ورودی ها تخصیص مجدد انجام داد. این برنامه به غیر از کارآیی واحد تجمعی $\left(\bar{X}_0,\bar{Y}_0\right)$، نقطه مرجع واحد تجمعی $\left(\bar{X}_0,\bar{Y}_0\right)$ و نقطه مرجع هر یک از واحدهای مستقل $\left(X_0^t,Y_0^t\right)$، $t=1,\dots,T$ را به ترتیب به وسیله ترکیب های بهینه $t=1,\dots,T$، $\left(\sum_t X^t\alpha^{t*},\sum_t Y^t\alpha^{t*}\right)$ , $\left(X^t\alpha^{t*},Y^t\alpha^{t*}\right)$ ارایه می دهد.

گاهی اوقات در بعضی ورودی ها تخصیص مجدد ممکن نیست یا پر هزینه است، به ویژه در کوتاه مدت، که پاچکوا [۱] برای حل این مشکل مدل زیر را ارایه داده است:

$$
\begin{aligned}
& lex\ \max\ \left\{\Phi;1s^++1s^-\right\} \\
& s.t.\quad \Phi\overline{Y}_0-\sum_t Y^t\alpha^t+s^+=0, \\
& \qquad \sum_t X^t\alpha^t+s^-=\overline{X}_0, \\
& \qquad \left(x_0^t\right)_i+\sum_{r=1,\dots,T}\gamma_{rt}^i-\sum_{s=1,\dots,T}\gamma_{ts}^i-\left(z^t\right)_i=\left(X^t\alpha^t\right)_i,\quad t=1,\dots,T,\quad i=1,\dots,q, \\
& \qquad \gamma_{rs}^i\le b_{rs}^i,\quad i=1,\dots,q,\quad r,s=1,\dots,T, \\
& \qquad \alpha^t\in R_+^{n^t},\quad \gamma_{rs}^i\ge 0,\quad s^+\in R_+^p,\quad s^-,z^+\in R_+^q,\quad \Phi\ \ free.
\end{aligned}
\tag{۳}
$$

به طوری که $\gamma_{rt}^i$ مقدار ورودی $i$–ام منتقل شده از واحد مستقل $r$ به واحد $t$ و $b_{rs}^i$ حداکثر مقدار این انتقال را نشان می دهد.

مدل بالا در حالت بهینه جریان بهینه ورودی ها را به وسیله بردار $\gamma_{rs}=\left(\gamma_{rs}^1,\dots,\gamma_{rs}^q\right)$ نشان می دهد. فرض کنید $\tilde{\Phi}$ فاکتور شعاعی بهینه را برای مدل (۳) ارایه دهد. دو محدودیت اول، محدودیت های معمولی ورودی و خروجی برای مدل $DEA$ تجمعی هستند. محدودیت سوم تخصیص مجدد ورودی را نشان می دهد. بنابراین

ورودی ها در نقطه مرجع کارآ، می توانند با حرکت ورودی ها میان واحدها، با بردارهای ارایه شده $\gamma_{rs}=\left(\gamma_{rs}^{1},...,\gamma_{rs}^{q}\right)$ به دست آیند. به علاوه بهبود کارآیی با بردار متغیر کمکی $z=\left(z^{1},...,z^{T}\right)$ به دست می آید. سرانجام مجموعه محدودیت پایانی مراقب است که حدود تخصیص مجدد برقرار باشد.
در رابطه با مدل های مطرح شده چند مسأله وجود دارد که در زیر به آن ها اشاره می کنیم.

i) اگر در منطقه $t$، $t=1,...,T$ بیش از یک واحد مستقل مربوط به واحد تجمعی موجود باشد، آن گاه مدل های ارایه شده (۳) و(۲) *تنها* نشان می دهند که مجموع واحدهای مستقل مربوط به واحد تجمعی تحت بررسی در منطقه $t$ ، $t=1,...,T$ باید به ایده آل $\left(X^{t}\alpha^{t*},Y^{t}\alpha^{t*}\right)$ برسند. این مدل ها، قادر به ارایه تصویر جداگانه هر یک از واحدهای مستقل، روی مرز کارآ نیستند.
*ii*) در مدل های ارایه شده توجهی به حفظ پایداری مرزها کارآ نمی شود. چون در این مدل ها هیچ قیدی روی ورودی ها و خروجی های $DMU_{0}^{t}$ ، $t\in\{1,...,T\}$ وجود ندارد. بنابراین امکان دارد که ورودی یک واحد مستقل، بیشتر یا خروجی آن، کمتر شود. برای مثال در *مدل* (۲) ممکن است، تصویر یک واحد کارآ یک نقطه دیگر روی مرز شود که از افزایش ورودی و کاهش خروجی به دست آمده است.
*iii*) در مدل ارایه شده (۳) فقط تخصیص مجدد مقید شده ورودی ها در نظر گرفته شده و در حالت بهینه تنها جریان بیهنه ورودی قابل مشاهده است و در رابطه با چگونگی تخصیص خروجی ها بحث نشده است.
بنابراین، یک جایگزین برای مدل های ارایه شده قبل پیشنهاد می کنیم که اگر چه ارتباط نزدیکی با آن ها دارد، از مشکلات مذکور جلوگیری به عمل می آورد.

## ۳ مدل های پیشنهادی برای تخصیص مجدد

### ۳-۱ حالتی که تخصیص مجدد کاملا آزاد است

در مدل های ارایه شده در مقاله پاچکوا [۱] فرض بر این بود که واحد تجمعی $\left(\bar{X}_{0},\bar{Y}_{0}\right)$ فقط شامل یک واحد مستقل از هر منطقه $t$ ، $t=1,...,T$ باشد و با یک مدل $DEA$ تجمعی، کارآیی آن ارزیابی شد. این مدل ها علاوه بر نقطه ایده آل واحد تجمعی، نشان می دادند که کل واحدهای مستقل مربوط به واحد تجمعی تحت بررسی در یک منطقه باید به چه ایده آلی برسند. اما قادر به ارایه نقطه ایده آل برای هر کدام از واحدهای مستقل درآن منطقه نبودند.
مدل های پیشنهادی، تعمیم حالت های قبلی هستند و می توانند، این مشکل را برطرف سازد. در این مدل ها فرض براین است که واحد تجمعی در یک منطقه بیش از یک واحد مستقل داشته باشد.

با توجه به فرضیات بالا واحد تجمعی $\left(\bar{X}_0,\bar{Y}_0\right)=\left(\sum_{k=1}^{k_0}X_0^k,\sum_{k=1}^{k_0}Y_0^k\right)$ را در نظر بگیرید، که شامل $k_0$ واحد مستقل است. با استفاده از مدل $CCR$ با ماهیت خروجی، کارآیی واحدهای مستقل $DMU_0^k$، $k=1,...,k_0$ که در محیط $t_k$، $t_k=1,...,T$ واقع شده به صورت زیر ارزیابی می شود:

$$\begin{aligned}
& Max\ \ \Phi \\
& s.t. \quad \Phi Y_0^k - Y^k\lambda^k + s^{k+} = 0, \\
& \qquad X^k\lambda^k + s^{k-} = X_0^k, \\
& \qquad \lambda^k \in R_+^{n'_k}, \quad s^{k+} \in R_+^p, \quad s^{k-} \in R_+^q, \quad \Phi\ \ free.
\end{aligned} \tag{۴}$$

فرض کنید $\Phi_0^k$، مقدار تابع هدف مدل (۴) در حالت بهینه باشد. در این صورت $\Phi_0^k$ کارآیی $DMU_0^k$، $k=1,...,k_0$ را در مقایسه با $DMU$ های مستقل دیگر که در محیط $t_k$، $t_k=1,...,T$ واقع شده اند، نشان می دهد و ترکیب بهینه $\left(X^k\lambda^{k*},Y^k\lambda^{k*}\right)$ تصویر $DMU_0^k$ را روی مرز کارآیی در منطقه $t_k$ ارایه می دهد.

ابتدا برای ارزیابی کارآیی واحد تجمعی $\left(\bar{X}_0,\bar{Y}_0\right)=\left(\sum_{k=1}^{k_0}X_0^k,\sum_{k=1}^{k_0}Y_0^k\right)$ مدل زیر را پیشنهاد می کنیم و سپس آن را توضیح خواهیم داد:

مدل پیشنهادی اول (مدل شعاعی با ماهیت خروجی) :

$$\begin{aligned}
& lex\max\left\{\Phi\ ;\ \left(\sum_{i=1,...,q}s_i+\sum_{o=1,...,p}l_o\right)\right\} \\
& s.t. \\
& \quad \sum_{k=1}^{k_0}\sum_{j\in J_K}\lambda_{jk}X_{ji}+s_i=(\bar{X}_0)_i, \qquad i=1,...,q, \\
& \quad \sum_{k=1}^{k_0}\sum_{j\in J_K}\lambda_{jk}Y_{jo}-l_o=\Phi(\bar{Y}_0)_O, \quad o=1,...,p, \\
& \quad \lambda_{jk}\ge 0, \quad x_{ji},y_{jo}\in R^+, \quad \Phi\ \ free.
\end{aligned} \tag{۵}$$

با فرض این که $t_k$ ، $k=1,...,k_0$ منطقه ای باشد که $DMU_0^k$ ، $k=1,...,k_0$ در آن واقع است، مجموعه $J_k$ به صورت زیر تعریف می شود:

$J_k=\left\{J\,\middle|\,DMU_j\in t_k\right\}$ قرار می دهیم $\left|J_k\right|=J'_k$

فرمول بندی مدل (۵) با جمع بستن محدودیت های مدل های $CCR$ که برای تحلیل کارآیی $DMU_0^k$ ، $k=1,...,k_0$ ارایه شده اند، به دست آمده است. در این مدل ، $i=1,...,q$ اندیس ورودی ها، $o=1,...,p$ اندیس خروجی ها، $x_{ji}$ مقدار ورودی $i$-ام مصرف شده توسط $DMU_j$ ، $y_{jo}$

مقدار خروجی $o$–ام تولید شده توسط $DMU_j$ ، $\Phi$ افزایش شعاعی کل خروجی، $s_i$ متغیر کمکی متناظر ورودی $i$–ام، $L_o$ متغیر کمکی متناظرخروجی $o$–ام و $\left(\lambda_{k1},\lambda_{k2},\ldots,\lambda_{kJ'_k}\right)$ بردار تصویر کننده، برای $DMU_0^k$ می باشد. وقتی که مدل حل می شود، بردار $\left(\lambda^*_{k1},\lambda^*_{k2},\ldots,\lambda^*_{kJ'_K}\right)$ ، $k=1,\ldots,k_0$ نقطه ایده آل را برای $DMU_0^k$ روی مرز کارآیی در منطقه $t_k$ تعریف می کند. ورودی ها و خروجی های تصویر $DMU_0^k$ روی مرز کارآ به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\hat{X}_{ki}=\sum_{j\in J_K}\lambda^*_{jk}X_{ki}$$

$$\hat{Y}_{ko}=\sum_{j\in J_K}\lambda^*_{jk}Y_{ko}$$

**قضیه ۱.** برای هر $DMU_0^k$ نقطه متناظر آن یعنی $\left(\hat{x}_{k1},\hat{x}_{k2},\ldots,\hat{x}_{kq},\hat{y}_{k1},\hat{y}_{k2},\ldots,\hat{y}_{kp}\right)$ پارتو کارآست.

**اثبات**. این قضیه به وسیله برهان خلف به صورت زیر ثابت می شود:

فرض کنیم که نقطه مذکور پارتو کارآ نباشد، در این صورت یک بردار $\left(\lambda_{k1},\lambda_{k2},\ldots,\lambda_{kJ'_k}\right)$ وجود خواهد داشت به طوری که نقطه متناظر با آن بردار به صورت زیر تعریف می شود:

$$\tilde{X}_{ki}=\sum_{j\in J_K}\lambda_{jk}X_{ki}\le\hat{X}_{ki},\qquad i=1,\ldots,q,$$

$$\hat{Y}_{ko}=\sum_{j\in J_K}\lambda_{jk}Y_{ko}\ge\hat{Y}_{ko},\qquad o=1,\ldots,p.$$

و در حداقل یک ورودی $i$ یا یک خروجی $o$ نامساوی قبل به طور اکید برقرار است. فرض کنید که در ورودی $i'$ نامساوی اکید باشد. در این صورت

$$\tilde{X}_{ki'}=\sum_{j\in J_K}\lambda_{jk}X_{ki'}<\hat{X}_{ki'},\quad i=1,\ldots,q,$$

بنابراین، بردار متناظر $\left(\lambda_{k1},\lambda_{k2},\ldots,\lambda_{kJ'_k}\right)$ برای $DMU_0^k$ به جای بردار $\left(\lambda^*_{k1},\lambda^*_{k2},\ldots,\lambda^*_{kJ'_K}\right)$ منجر به یک جواب شدنی برای مدل با مقدار تابع هدف زیر می شود:

$$\sum_{i=1}^{q}s^*_i+\sum_{o=1}^{p}l^*_o+\sum_{i=1}^{q}\left(\hat{X}_{ki}-\tilde{X}_{ki}\right)+\sum_{o=1}^{p}\left(\tilde{Y}_{ko}-\hat{Y}_{ko}\right)>\sum_{i=1}^{q}s^*_i+\sum_{o=1}^{p}l^*_o$$

که این مقدار تابع هدف، بیشتر از مقدار تابع هدف بهینه اولیه است که با فرض مساله در تناقض است. بنابراین اثبات کامل می شود.

درمدل های تخصیص مجدد (۲) و (۵) وهمچنین در بعضی حالت ها مدل (۳)، هیچ محدودیتی روی ورودی و خروجی زیر واحد ها وجود ندارد. بنابراین افزایش کارآیی واحد تجمعی ممکن است با افزایش ورودی و کاهش خروجی زیر واحد ها همراه باشد که این باعث وجود چند مساله می شود:

i. با اصلاح نقاط کارآ ممکن است مرزهای کارآ ناپایدار شود. در دوره زمانی انتقال ورودی وخروجی، مرزهای کارآ شدیداَ نامشخص است. برای مثال در یک محیط، یک زیر واحد نا کارآ با اصلاح نقاط کارآ ممکن است کارآ شود.

ii. پذیرفتنی نیست که نیاز باشد، یک واحد کارآ روی مرز کارآ حرکت کند و در همان زمان به عنوان یک مرجع برای واحد های دیگر انتخاب شود.

بنابراین برای حفظ پایداری مرزهای کارآ در $T$ محیط، مدل زیر را پیشنهاد می کنیم. به طوری که این مدل، با اضافه کردن دو مجموعه محدودیت روی ورودی و خروجی مدل پیشنهادی (۵) به دست آمده است.

با فرض این که $DMU_0^k$ ، $k=1$،...، $k_0$ در محیط $t_k$ واقع شده باشد، مجموعه $J_K$ , $E$ در مدل (۶) به صورت زیر تعریف می شود:

$$E=\{k \mid \text{پارتو کارا باشد } t_k \text{ در محیط } DMU_0^k\}$$

$$J_k=\left\{j \,\middle|\, DMU_j \in t_k\right\}$$

مدل پیشنهادی دوم ( مدل شعاعی با ماهیت خروجی ):

$$\begin{aligned}
& lex\max\left\{\Phi\ ;\ \left(\sum_{i=1,\dots,q} s_i+\sum_{o=1,\dots,p} l_o\right)\right\}\\
s.t\quad & \sum_{k=1}^{k_0}\sum_{j\in J_K}\lambda_{jk}X_{ji}+s_i=(\overline{X}_0)_i, \qquad i=1,\dots,q,\\
& \sum_{k=1}^{k_0}\sum_{j\in J_K}\lambda_{jk}Y_{jO}-l_o=\Phi(\overline{Y}_0)_O, \qquad o=1,\dots,p,\\
& \sum_{j\in J_K}\lambda_{jk}X_{ji}=(X_0^k)_i, \quad \forall k\in E, \quad i=1,\dots,q,\\
& \sum_{j\in J_K}\lambda_{jk}Y_{jo}=(Y_0^k)o, \quad \forall k\in E, \quad o=1,\dots,p,\\
& s_i,l_o,\lambda_{jk}\ge 0, \quad \Phi\ free.
\end{aligned} \tag{۶}$$

در این مدل، $i=1$،...،$q$ اندیس ورودی، $o=1$،...،p اندیس خروجی، $x_{ji}$ مقدار ورودی

i–ام مصرف شده توسط $DMU_j$ ، $y_{jo}$ مقدار خروجی تولید شده توسط $DMU_j$ ، $\Phi$ افزایش شعاعی کل خروجی ، $S_i$ متغیر کمکی متناظر ورودی i– ام، $L_O$ متغیر کمکی متناظر خروجی

o– ام و $\left(\lambda_{k1},\lambda_{k2},\ldots,\lambda_{kJ'_k}\right)$ بردار تصویر کننده برای $DMU_0^k$ می باشد. این برنامه همواره شدنی است. چون حداقل یک جواب شدنی به صورت زیر دارد :

اگر $\lambda_{jk}$ متناظر با $DMU_0^k$ باشد آن گاه: $\lambda_{jk}=1$، $\forall j\in J_k$ $\forall k=1$،...، $k_0$ و در غیر این صورت

$,\lambda_{jk}=0$

$$\begin{aligned}&\forall i=1,\ldots,q\,, && s_i=0,\\&\forall o=1,\ldots,p\,, && l_o=0,\\&\Phi=1.\end{aligned}$$

دو مجموعه محدودیت پایانی در مدل فوق از اصلاح نقاط کارآ ممانعت می کند وبا این کارمرز های کارآ پایداری خود را در حین تخصیص مجدد حفظ می کنند.

وقتی که مدل حل می شود، بردارمتناظر $\left(\lambda_{k1}^*,\lambda_{k2}^*,\ldots,\lambda_{kJ'_K}^*\right)$ برای $DMU_0^k$

$k=$ ۱، ...، $k_0$ نقطه ایده آل را روی مرز کارآیی در منطقه $t_k$ تعریف می کند.

ورودی ها و خروجی های تصویر $DMU_0^k$ روی مرز کارآ به صورت زیر محاسبه می شوند.

قضیه ۱. به طور مشابه در نقاط زیر صادق است.

$$\begin{aligned}\hat{x}_{ki}&=\sum_{j\in J_K}\lambda_{jk}^*x_{ki}\,,\\\hat{y}_{ko}&=\sum_{j\in J_K}\lambda_{jk}^*y_{ko}\,,\end{aligned}$$

### مقایسه کارآیی در دو مدل پیشنهادی (۵) و (۶)

اگر $\hat{\Phi}$ و $\tilde{\Phi}$ به ترتیب مقداربهینه تابع هدف در مدل (۵) و (۶) باشد در این صورت $\tilde{\Phi}\le\hat{\Phi}$ است. همان طور که در فصل قبل اشاره شد علت این امر آن است که فضای شدنی در مدل (۶) به دلیل مجموعه محدودیت اضافی محدود تراز مدل (۵) است.

### ۳-۲ حالتی که تخصیص مجدد مقید است

در مدل (۶) فرض بر این است که روی کل ورودی ها و خروجی های واحدهای ناکارآ می تواند تخصیص مجدد انجام شود و هیچ محدودیتی روی مقدار ورودی و خروجی تخصیص داده شده بین واحدهای ناکارآ وجود ندارد. حال ممکن است، شرایطی وجود داشته باشد که بعضی ورودی ها یا خروجی نتوانند تخصیص داده شوند یا محدودیت روی مقدار ورودی ها و خروجی های تخصیص داده شده بین واحدهای ناکار وجود داشته باشد. مدل زیر را که حالت خاصی از مدل (۶) است، برای حل چنین مساله- ای ارایه می دهیم:

$$
\begin{aligned}
& lex\ \max\left\{\Phi;(\sum_{i=1}^{q}s_i+\sum_{o=1}^{p}l_o)\right\} \\
& s.t.\quad \sum_{k=1}^{k_0}\sum_{j\in J_K}\lambda_{jk}X_{ji}+s_i=(\overline{X}_0)_i\,,\qquad i=1,\ldots,q, \\
& \qquad \sum_{k=1}^{k_0}\sum_{j\in J_K}\lambda_{jk}Y_{jO}-l_o=\Phi(\overline{Y}_0)_O\,,\quad o=1,\ldots,p\,, \\
& \qquad \sum_{j\in J_K}\lambda_{jk}X_{ji}=\left(X_0^{\,k}\right)_i,\qquad i=1,\ldots,q,\quad o=1,\ldots,p,\qquad \forall k\in E, \\
& \qquad \sum_{j\in J_K}\lambda_{jk}Y_{jo}=\left(Y_0^{\,k}\right)_O,\qquad i=1,\ldots,q\,,\quad o=1,\ldots,p\,,\quad \forall k\in E, \\
& \qquad \left(X_0^{\,K}\right)_i+\sum_{r=1,\ldots,k_0}\gamma_{rk}^i-\sum_{s=1,\ldots,k_0}\gamma_{ks}^i-\left(z_k\right)_i=\sum_{j\in J_K}\lambda_{jk}X_{ji}\,,\quad i=1,\ldots,q\,,\quad k\in\{1,\ldots,k_0\}, \\
& \qquad \left(Y_0^{\,K}\right)_o+\sum_{r=1,\ldots,k_0}\gamma_{rk}^o-\sum_{s=1,\ldots,k_0}\gamma_{ks}^o-\left(z_k\right)_o=\sum_{j\in J_K}\lambda_{jk}Y_{jo}\,,\quad o=1,\ldots,p\,,\quad k\in\{1,\ldots,k_0\}, \\
& \qquad \gamma_{rs}^i\le b_{rs}^i\,,\quad i\in\{1,\ldots,q\},\quad r,\,s\in\{1,\ldots,k_0\}, \\
& \qquad \gamma_{rs}^o\le b_{rs}^o\,,\quad o\in\{1,\ldots,p\},\quad r,\,s\in\{1,\ldots,k_0\}, \\
& \qquad s_i\,,l_o\,,\gamma_{rk}^o\,,\gamma_{rk}^i\,,z_k\ge 0,\quad \Phi\ free.
\end{aligned}
\tag{۷}
$$

در مدل بالا $\gamma_{rs}^i$، $\gamma_{rs}^o$ ، $\forall k=1$ $s=1$،...، $k_0$ به ترتیب مقدار ورودی i−ام و مقدار خروجی o−ام را که از زیر واحد r به زیر واحد s منتقل می شود. این برنامه همواره شدنی است، چون حداقل یک جواب شدنی به صورت زیر دارد:

اگر $\lambda_{jk}$ متناظر با $DMU_0^k$ باشد آن گاه: $\lambda_{jk}=1$، $\forall j\in J_k$، $\forall k$ و در غیر این صورت $\lambda_{jk}=0$ و

$$
\begin{aligned}
& \forall r,s=1,\ldots,k_0 && \gamma_{rs}^i=0,\ \ \gamma_{rs}^o=0, \\
& \forall k=1,\ldots,k_0 && z_k=0, \\
& \forall i=1,\ldots,q && s_i=0, \\
& \forall o=1,\ldots,p && l_o=0, \\
& \Phi=1.
\end{aligned}
$$

## ٤ یک مطالعه کاربردی روی بانک ها

داده های جدول ۱ مربوط به بیست و چهار شعبه بانک واقع در شش منطقه جغرافیایی با شرایط رقابتی مختلف و با دو ورودی و دو خروجی می باشد به طوریکه ورودی ها شامل تعداد پرسنل و هزینه جاری و خروجی ها شامل منابع و مصارف است.

بانک $A$ شامل دوازده شعبه در این شش منطقه می باشد و اندازه کارآیی هر یک از شعبه های $A$ در شش منطقه تحت مدل $CCR$ با ماهیت خروجی، در جدول ۲ نشان داده شده است.

در ادامه، مدل پیشنهادی اول و دوم روی این مجموعه از داده ها با هدف افزایش کارآیی بانک $A$ به کار برده می شود. اندازه کارآیی واحد تجمعی $A$ ، که شامل دوازده شعبه است و تصویر هر یک از واحدهای مستقل ( شعبه های $A$ ) واقع شده در این شش منطقه روی مرز کارآ تحت این دو مدل به ترتیب در جدول ۳ و $4$ آورده شده است .( متغیر k به عنوان شمارنده شعبه های $A$ واقع شده در شش منطقه و $\left(\bar{X}_0,\bar{Y}_0\right)$ به عنوان واحد تجمعی و $\left(X_0^k, Y_0^k\right)$ عنوان شعبه $A$ در نظر گرفته شده است.)

**جدول ۱.** داده های ۲۴ شعبه بانک واقع شده در ۶ منطقه

| منطقه | شماره شعبه $A$ | شماره شعبه | نام شعبه | ورودی | خروجی | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | تعداد پرسنل | هزینه جاری | منابع | مصارف |
| ۱ | | ۱ | $B$ | ۷ | ۲۱۳۶ | ۴۶۲۹۲ | ۵۴۲۲۸ |
| | K=1 | ۲ | $A$ | ۵ | ۲۷۷۲ | ۵۶۸۵۷ | ۱۱۵۹۴ |
| | | ۳ | $C$ | ۵ | ۱۸۳۶ | ۲۸۹۱۹ | ۴۶۷۸۵ |
| | K=2 | ۴ | $A$ | ۱۱ | ۱۶۴۴ | ۳۷۸۳۷ | ۳۵۸۸۴ |
| ۲ | | ۵ | B | ۶ | ۱۹۶۰ | ۲۶۵۴۲ | ۳۰۱۳ |
| | K=3 | ۶ | A | ۸ | ۱۳۲۸ | ۲۸۳۹۰ | ۲۲۶۹ |
| | | ۷ | C | ۴ | ۶۴۱ | ۲۷۷۰۹ | ۵۰۶۳ |
| | K=4 | ۸ | A | ۶ | ۲۷۹۹ | ۲۷۳۹۱ | ۸۱۱ |
| 3 | | ۹ | $B$ | ۷ | ۲۰۷۸ | ۳۳۵۳۷ | ۲۸۴۹۸ |
| | K=5 | ۱ | $A$ | ۱۱ | ۲۳۹۱ | ۳۸۹۶۶ | ۱۵۳۴۲ |
| | K=6 | ۱۱ | $A$ | ۷ | ۲۲۶۸ | ۳۵۸۸۹ | ۸۳۴۰۴ |
| | | ۱۲ | $C$ | ۶ | ۲۳۸۱ | ۳۳۰۷۵ | ۱۲۱۴۲ |
| ۴ | | ۱۳ | $B$ | ۵ | ۱۰۹۶ | ۲۱۲۰۷ | ۲۱۵۱۳ |
| | K=7 | ۱۴ | A | ۷ | ۲۲۳۸ | ۳۸۰۴۲ | ۱۵۲۶۴ |
| | | ۱۵ | C | ۵ | ۱۲۳۱ | ۲۶۱۳۴ | ۱۳۸۷۶ |
| | K=8 | ۱۶ | A | ۴ | ۷۳۶ | ۲۷۳۳۰ | ۹۱۲۷ |
| ۵ | | ۱۷ | $B$ | ۶ | ۱۳۹۷ | ۲۸۶۶۴ | ۵۸۳۸۳ |
| | K=9 | ۱۸ | $A$ | ۵ | ۲۰۱۶ | ۳۳۰۲۱ | ۸۸۵۳ |
| | | ۱۹ | $C$ | ۵ | ۴۳۸ | ۲۶۵۰۰ | ۱۲۷۰۳ |
| | K=10 | ۲۰ | $A$ | ۱۳ | ۲۷۶۷ | ۵۶۶۵۵ | ۵۳۷۷۳ |
| ۶ | | ۲۱ | B | ۶ | ۱۰۴۱ | ۳۰۳۸۷ | ۱۱۲۹۰ |
| | K=11 | ۲۲ | A | ۵ | ۱۶۰۵ | ۲۸۴۷۹ | ۶۴۹۰ |
| | K=12 | ۲۳ | A | ۷ | ۴۳۳۷ | ۷۴۲۴۸ | ۲۵۶۶۹ |
| | | ۲۴ | C | ۵ | ۲۴۹ | ۲۱۷۹۵ | ۳۴۶۰ |

**جدول ۲.** کارآیی هر یک از شعبه های $A$

| شعبه های A $(DMU^k_0)$ | کارآیی $(\phi^k_0)$ |
|---|---|
| $(x^1_0,y^1_0) = ((2772\quad 5), (11594\quad 56857))$ | ۱ |
| $(x^2_0,y^2_0) = ((1644\quad 1), (35884\quad 37837))$ | ۱ |
| $(x^3_0,y^3_0) = ((1328\quad 8), (2269\quad 28390))$ | ۱ |
| $(x^4_0,y^4_0) = ((2799\quad 6), (811\quad 27391))$ | ۱/۹۱۸۵ |
| $(x^5_0,y^5_0) = ((2391\quad 11), (15342\quad 38966))$ | ۱ |
| $(x^6_0,y^6_0) = ((2268\quad 7), (83404\quad 35889))$ | ۱ |
| $(x^7_0,y^7_0) = (2238\quad 7), (15264\quad 38042))$ | ۱/۱۸۸۵ |
| $(x^8_0,y^8_0) = (736\quad 4), (9127\quad 27330))$ | ۱ |
| $(x^9_0,y^9_0) = (2016\quad 5), (8853\quad 33021))$ | ۱ |
| $(x^{10}_0,y^{10}_0) = (2767\quad 13), (53773\quad 56655))$ | ۱/۲۳۶۵ |
| $(x^{11}_0,y^{11}_0) = (1605\quad 5), (6490\quad 28479))$ | ۱/۲۸۷۴ |
| $(x^{12}_0,y^{12}_0) = (4337\quad 7), (25669\quad 74248))$ | ۱ |

در جدول ۲ شعبه هایی که اندازه کارآیی آن ها یک است پارتو کارآ هستند و بقیه شعبه ها ناکارآمحسوب می شوند.

همچنین در جدول ۲ کارآیی هریک از شعبه های $A$ در مقایسه با شعبه های هم منطقه ای خود محاسبه شده است. چنین مقایسه ای به این علت صورت می گیرد که هر منطقه تکنولوژی خاص خود را دارد و مقایسه دو شعبه در دو منطقه مختلف با دو تکنولوژی مختلف منطقی نیست.



**جدول ۳.** نقطه تصویر هر یک از شعبه های $A$ و واحد تجمعی را با استفاده از مدل پیشنهادی اول نشان می دهد

| شعبه های A و واحد تجمعی | نقاط مرجع |
|---|---|
| $(x^1_0, y^1_0)$ | $(x^1\alpha^{*1}, y^1\alpha^{*1}) = ((16618\quad 30), (69504\quad 340847))$ |
| $(x^2_0, y^2_0)$ | $(x^2\alpha^{*2}, y^2\alpha^{*2}) = ((0\quad 0), (0\quad 0))$ |
| $(x^3_0, y^3_0)$ | $(x^3\alpha^{*3}, y^3\alpha^{*3}) = ((8652\quad 54), (374009\quad 430835))$ |
| $(x^4_0, y^4_0)$ | $(x^4\alpha^{*4}, y^4\alpha^{*4}) = ((0\quad 0), (0\quad 0))$ |
| $(x^5_0, y^5_0)$ | $(x^5\alpha^{*5}, y^5\alpha^{*5}) = ((1631\quad 5), (59990\quad 25814))$ |
| $(x^6_0, y^6_0)$ | $(x^6\alpha^{*6}, y^6\alpha^{*6}) = ((0\quad 0), (0\quad 0))$ |
| $(x^7_0, y^7_0)$ | $(x^7\alpha^{*7}, y^7\alpha^{*7}) = ((0\quad 0), (0\quad 0))$ |
| $(x^8_0, y^8_0)$ | $(x^8\alpha^{*8}, y^8\alpha^{*8}) = ((0\quad 0), (0\quad 0))$ |
| $(x^9_0, y^9_0)$ | $(x^9\alpha^{*9}, y^9\alpha^{*9}) = ((0\quad 0), (0\quad 0))$ |
| $(x^{10}_0, y^{10}_0)$ | $(x^{10}\alpha^{*10}, y^{10}\alpha^{*10}) = ((0\quad 0), (0\quad 0))$ |
| $(x^{11}_0, y^{11}_0)$ | $(x^{11}\alpha^{*11}, y^{11}\alpha^{*11}) = ((0\quad 0), (0\quad 0))$ |
| $(x^{12}_0, y^{12}_0)$ | $(x^{12}\alpha^{*12}, y^{12}\alpha^{*12}) = ((0\quad 0), (0\quad 0))$ |
| $(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$ | $(\sum_k x^k\alpha^{*k}, \sum_k y^k\alpha^{*k}) = ((22613\quad 89), (503503\quad 797496))$ |

جدول ۳ نقطه ی تصویر هر یک از شعبه های را روی مرز کارآی متناظر با منطقه ای که شعبه در آن جا واقع شده است، نشان می دهد. به طوری که این نقاط با استفاده ازاجرای مدل (۵) روی داده های جدول ۱ و بدون توجه به ناپایدار شدن مرزهای کارآ در حین تخصیص مجدد ورودی و خروجی به دست آمده اند. نقطه

تصویر با ورودی و خروجی صفر نشان دهنده این مطلب است که شعبه متناظربا شعبه های دیگر بانک $A$ ادغام شده است.

**جدول ٤.** نقطه تصویر هر یک از شعبه های $A$ و واحد تجمعی را با استفاده از مدل پیشنهادی دوم نشان می دهد.

| شعبه های A و واحد تجمعی | نقاط مرجع |
|---|---|
| $(x^1_0, y^1_0)$ | $(x^1\alpha^{*1}, y^1\alpha^{*1}) = ((2772 \quad 5), (11594 \quad 56857))$ |
| $(x^2_0, y^2_0)$ | $(x^2\alpha^{*2}, y^2\alpha^{*2}) = ((1644 \quad 11), (35884 \quad 37837))$ |
| $(x^3_0, y^3_0)$ | $(x^3\alpha^{*3}, y^3\alpha^{*3}) = ((4364 \quad 27), (188637 \quad 217298))$ |
| $(x^4_0, y^4_0)$ | $(x^4\alpha^{*4}, y^4\alpha^{*4}) = ((2799 \quad 6), (27391 \quad 48115))$ |
| $(x^5_0, y^5_0)$ | $(x^5\alpha^{*5}, y^5\alpha^{*5}) = ((2391 \quad 11), (15342 \quad 38966))$ |
| $(x^6_0, y^6_0)$ | $(x^6\alpha^{*6}, y^6\alpha^{*6}) = ((2268 \quad 7), (83404 \quad 35889))$ |
| $(x^7_0, y^7_0)$ | $(x^7\alpha^{*7}, y^7\alpha^{*7}) = ((0 \quad 0), (0 \quad 0))$ |
| $(x^8_0, y^8_0)$ | $(x^8\alpha^{*8}, y^8\alpha^{*8}) = ((736 \quad 4), (9127 \quad 27330))$ |
| $(x^9_0, y^9_0)$ | $(x^9\alpha^{*9}, y^9\alpha^{*9}) = ((2016 \quad 5), (8853 \quad 33021))$ |
| $(x^{10}_0, y^{10}_0)$ | $(x^{10}\alpha^{*10}, y^{10}\alpha^{*10}) = ((0 \quad 0), (0 \quad 0))$ |
| $(x^{11}_0, y^{11}_0)$ | $(x^{11}\alpha^{*11}, y^{11}\alpha^{*11}) = ((3574 \quad 6), (21154 \quad 61189))$ |
| $(x^{12}_0, y^{12}_0)$ | $(x^{12}\alpha^{*12}, y^{12}\alpha^{*12}) = ((4337 \quad 7), (25669 \quad 74248))$ |
| $(\overline{x}_., \overline{y}_0)$ | $(\sum_k x^k\alpha^{*k}, \sum_k y^k\alpha^{*k}) = ((۲۶۹۰۱ \quad 89), (۴۲۷۰۵۵ \quad ۶۳۰۷۵۰))$ |

جدول ۴ نقطه ی تصویر هر یک از شعبه های $A$ را روی مرز کارآی متناظر با منطقه ای که شعبه در آن جا واقع شده است نشان می دهد، به طوری که این نتایج با استفاده از اجرای مدل (۶) روی داده های جدول ۱ حاصل شده است. در مدل (۶) به حفظ پایداری مرزهای کارآ در حین تخصیص مجدد ورودی وخروجی توجه شده است. در این جدول نیز نقطه تصویر با ورودی و خروجی صفر نشان دهنده این مطلب است که شعبه متناظربا شعبه های دیگر بانک $A$ ادغام شده است.

در مثال فوق با استفاده از مدل پیشنهادی (۵) و (۶) خواهیم داشت: $\hat{\phi}$=۱/۵۶۷۷ $\tilde{\phi}$ = ۱/۲۳۹۹

در این مثال هر منطقه به دلیل شرایط خاص خود از قبیل ساختار جمعیت و شرایط جغرافیایی تکنولوژی خاص خود را دارد. برای مثال فرض کنید، دوشعبه در دو منطقه کم جمعیت و پر جمعیت واقع شده باشد، اگر این دو با ورودی های یکسان خروجی های متفاوت ارایه دهند، در این صورت نمی توانیم بگوییم شعبه ای که خروجی هایش کمتر است از نظر عملکرد ضعیف است. بنابر این درمرحله اول در جدول ۱ کارآیی هر شعبه $A$ در مقایسه با شعب هم منطقه ای آن به دست آمده است.

در مرحله دوم برای افزایش کارآیی واحد تجمعی به ترتیب از مدل (۵) و (۶) استفاده شده است. در هر دو مدل، واحد تجمعی با تمام $DMU$ های موجود مقایسه می شود. چون هدف تنها افزایش تولید خروجی و کاهش مصرف ورودی واحد تجمعی است، به طوری که تکنولوژی مناطق مختلف نادیده گرفته می شود. از طرفی چون در مدل (۵) برخلاف مدل (۶) به حفظ پایداری مرزهای کارآ در حین تخصیص مجدد توجهی نشده است و واحدهای کارآ هم در این مدل می توانند اصلاح شوند، در نتیجه محدوده فضای شدنی آن از فضای شدنی مدل(۶) بزرگتراست و افزایش کارآیی واحد تجمعی، دراین مدل بیشتر صورت می گیرد. همان طورکه در جدول ۳ مشاهده می کنیم برای افزایش کارآیی واحد تجمعی با استفاده از مدل (۵)، ۹ واحد تصمیم گیرنده منحل شده است و ورودی ها و خروجی های آن ها به واحدهای دیگر تخصیص داده شده است که این کار

حتی با اصلاح واحدهای کارآ مانند $DMU_0^2$ و $DMU_0^4$ *صورت گرفته است*. در حالی که با توجه به جدول ۴ می بینیم که با استفاده از مدل (۶)، تنها ۲ شعبه منحل شده است و واحدهای کارآ تغییری نکرده اند، واضح است که علت این امر وجود دو مجموعه قیود اضافی در مدل (۶) است که موجب حفظ پایداری مرزهای کارآ می شود.

امروزه در فرآیند خصوصی سازی بانک ها مشاهده می کنیم که مدیران بانک ها (واحد های تجمعی) چون تنها به فکر کسب سود هستند، بنابراین سعی می کنند، با ادغام شعبه ها ورودی و خروجی شعبه های کم بازده را به شعبه هایی تخصیص دهند که سود بیشتری تولید می کنند. برای مثال، می توان با تخصیص ورودی ویا حتی خروجی شعبه ای که در منطقه کم جمعیت قرار گرفتـــه وسود دهی کمی دارد به شعبه های دیگر، باعث افزایش تولید خروجی و کاهش مصرف ورودی واحد تجمعی شد.

## ۵ نتیجه گیری

هدف اصلی در این مقاله، اصلاح مدل های تخصیص مجدد مطرح شده، در مقاله پاچکوا [1] بوده است. به طوری که ابتدا در مدل پیشنهادی اول، توانستیم نقطه ایده ال هریک از واحدهای مستقل را در یک منطقه به دست آوریم. در مرحله دوم با اضافه کردن مجموعه قیود به مدل پیشنهادی اول، یک مدل جدید را ارایه دادیم. به طوری که در مدل جدید، درحین تخصیص مجدد مرزهای کارآ پایدار باقی می ماند. سپس مجدداً مدل دوم را با افزودن یک سری قیدها تعمیم دادیم، به طوری که که مدل نهایی در حالت تخصیص مجدد مقید شده، جریان بهینه ورودی و خروجی را که با حفظ پایداری مرزهای کارآ به دست می آیند، ارایه می دهد. در پایان نیز یک مطالعه کاربردی روی داده های چند بانک انجام دادیم و با فرض این که تخصیص مجدد روی شاخص های ورودی و خروجی کاملاً امکان پذیر باشد، داده ها را به وسیله دو مدل پیشنهادی اول اجرا و نتایج را تحلیل ومقایسه کردیم.

## منـــابع


[1] Elena V. P., (2009). Restricted reallocation of resources,. European journal of operational Research 196, 1049-1057.

[2] Lozano, S, Villa, G., Centralized resourse allocation using data envel- opment analysis. Journal of Productivity Analysis, 22, 143-16.

[3] Asmild, M., Paradi J., Pastor, J., (2009). Centralized resources allocation BCC mod- els . OMEGA; 37, 40-49.

[4] Charnes, A., Cooper, W. W, Rhodes, E., (1978). Measuring the efficiency of decision making units. European Journal of Operational Research. 2, 429-44. Elena V.Pachkova. Restricted.