مجله تحقیق در عملیات و کاربردهای آن، سال نهم، شماره چهارم (پیاپی ۳۵)، زمستان ۹۱، ص ص ۲۵-۹
شاپا ۷۲۸۶-۲۲۵۱

مساله برنامه‌ریزی درجه دوم با ضرایب فازی: یک روش حل مبتنی بر اصل گسترش

سید هادی ناصری[*1]، فاطمه طالشیان جلودار[2]، نعمت اله تقی نژاد[3]، فرزانه خلیلی[4]
۱- استادیار دانشگاه مازندران گروه ریاضی ، بابلسر، ایران
۲و۴- دانشجوی کارشناسی ارشد دانشگاه مازندران، گروه ریاضی ، بابلسر، ایران
۳- دانشجوی دکتری دانشگاه مازندران، گروه ریاضی ، بابلسر، ایران

رسید مقاله: ۲۰ اردیبهشت ۱۳۹۱
پذیرش مقاله: ۳۰ شهریور ۱۳۹۱

چکیده

برنامه ریزی درجه دوم رده خاصی از مسایل برنامه‌ریزی غیرخطی است که در آن تابع هدف از نوع درجه دوم و قیود خطی می‌باشند. مدل‌های متداول برنامه‌ریزی درجه دوم نیازمند پارامترهایی معین با مقادیری ثابت هستند. این مدل به طور گسترده برای حل مسایل دنیای واقعی به کار برده می‌شوند. از طرف دیگر دسته گسترده‌ای از مسایل که در زندگی روزمره با آن‌ها سروکار داریم و براساس حل مدل ریاضی ساخته شده از آن تصمیم‌گیری می‌کنیم، مفاهیمی نادقیق و یا مجموعه‌هایی با کران‌های تقریبی می‌باشند. بنابراین مقادیر پارامترهایی که در این مدل‌ها استفاده می‌شوند بر اساس پیش‌بینی شرایط آینده تخمین زده می‌شوند، و همواره دارای ابهام و عدم قطعیت می‌باشند. در نتیجه مدل‌سازی این مسایل به صورت مساله برنامه‌ریزی درجه دوم با داده‌های فازی یکی از موضوعات مورد توجه محققین در حوزه تحقیق در عملیات است. در این مقاله روشی برای حل مسایل برنامه‌ریزی درجه دوم فازی پیشنهاد می‌شود که در آن ضرایب هزینه، ضرایب محدودیت‌ها و بردار سمت راست اعداد فازی هستند. روش مورد نظر برای بهینه‌سازی تابع هدف با به‌کارگیری از مفاهیم فازی، مساله برنامه‌ریزی درجه دوم فازی را به مسایل درجه دوم متداولی تبدیل می‌کند که با استفاده از الگوریتم متداول همچون SQP قابل حل می‌باشند و به‌ترتیب کران‌های بالا و پایین تابع هدف فازی را در هر سطح α، $\alpha\in[0,1]$، نتیجه می‌دهد. علاوه بر این روش پیشنهاد شده برای حل مسایل کلی‌تری توسعه داده می‌شود که در آن علاوه بر ضرایب هزینه، ضرایب محدودیت‌ها و بردار سمت راست، ضرایب درجه دوم نیز اعداد فازی می‌باشند. در نهایت برای تشریح فرآیند حل و نشان دادن کارایی روش پیشنهاد شده یک مساله بهینه‌سازی فازی ارایه می‌گردد. نتایج به‌دست آمده گزارش می‌شود.

کلمات کلیدی: برنامه‌ریزی درجه دوم، اعداد فازی، برنامه‌ریزی درجه دوم فازی، تابع عضویت، α-برش، اصل گسترش

* عهده دار مکاتبات
آدرس الکترونیکی: nasseri@umz.ac.ir

۱ مقدمه

برنامه‌ریزی درجه دوم یکی از مدل‌های ریاضی در تحقیق در عملیات است که برای بهینه‌سازی استفاده از منابع محدود طراحی شده و کاربردهای قابل توجهی در زمینه‌های مختلف علمی دارد که منجر به توسعه‌ی نتایج متعدد مفید شده است. از جمله: مدیریت مالی [۱]، انتخاب portfolio [۳،۲]، مهندسی نقشه‌کشی [۵،۴]، مطالعه‌ی ملکولی [۶] و اقتصاد [۷].

مطالعات فراوان در این زمینه منجر به توسعه و گسترش الگوریتم‌های کارا و با کفایت برای حل مسایل برنامه-ریزی درجه دومی شده‌است که در آن‌ها پارامترها مقادیری ثابت و معین هستند. در حالی که در کاربردهای دنیای واقعی این تصور برقرار نمی‌باشد. زیرا مدل‌های برنامه‌ریزی درجه دوم اغلب برای فعالیت‌ها در دوره آتی فرموله می‌شوند. از این رو مقادیر پارامترهایی که در این مدل‌ها استفاده می‌شوند بر اساس پیش‌بینی شرایط آینده است که حتماً دارای درجه‌ای عدم قطعیت می‌باشد و نیز مواردی وجود دارد که نمی‌توان داده‌ها را بدون خطا جمع‌آوری کرد. بنابراین توجه به مدل‌سازی و حل این‌گونه مسایل از اهمیت خاصی برخوردار است. در چنین مواردی که تعدادی از پارامترها نادقیق یا نامعین می‌باشند، با تخصیص برخی مقادیر قطعی به پارامترهای نادقیق مساله را تبدیل به مساله متداول درجه دوم می‌نماییم. البته این ساده‌سازی اغلب نتایج غلطی را ارایه می‌دهد. یک راه دیگر برای پردازش پارامترهای نادقیق توزیع احتمالات است. اما توزیع احتمالات نیاز به ساختار قابل پیش-بینی از قبل و مطابق با قواعد دارد که در نمونه‌های واقعی غیرممکن است. برای این که به‌طور کمی با اطلاعات نادقیق در تصمیم‌گیری سروکار داشته باشیم، زاده مفهوم فازی را معرفی کرد [۸]. نظریه فازی به‌طور گسترده در بهینه‌سازی مسایل خطی و غیر خطی به‌کار گرفته می‌شود [۶، ۱۶-۹]. در این مقاله رده خاصی از مسایل برنامه‌ریزی درجه دوم فازی که در آن برخی از پارامترهای ورودی مساله به‌صورت اعداد فازی می‌باشند مورد بررسی قرار گرفته می‌شود. در بخش بعد به ماهیت مسایل برنامه‌ریزی درجه دوم و مسایل برنامه‌ریزی درجه دوم فازی می‌پردازیم. در بخش ۳، روشی دو مرحله‌ای برای حل مسایل برنامه‌ریزی درجه دوم فازی ارایه می‌شود که قادر به محاسبه‌ی مقدار فازی هدف می‌باشد. در مرحله اول این روش یک زوج از مسایل دو سطحی برای یافتن کران‌بالا و کران پایین مقدار هدف فازی فرموله می‌شود، سپس در مرحله دوم مسایل دو سطحی به مسایل متداول یک سطحی تبدیل خواهند شد. در ادامه با ارایه مثال عددی در بخش ۴، نشان داده می‌شود که چگونه می‌توان مفهوم فوق را به مسایل برنامه‌ریزی درجه دوم با پارامترهای فازی اعمال کرد. بخش ۵ نیز به نتیجه‌گیری اختصاص دارد.

۲ تعریف مساله

مساله برنامه‌ریزی درجه‌ی دوم یک مساله بهینه‌سازی شامل تابع هدف غیرخطی و قیود خطی می‌باشد که شکل کلی آن به‌صورت زیر است [۱۷]:

$$\begin{aligned} & Min \quad z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j+\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} q_{ij} x_i x_j \\ & s.t. \\ & \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i=1,\ldots,m, \\ & \qquad x_j \geq 0, \quad j=1,\ldots,n. \end{aligned} \tag{1}$$

که در آن $X=(x_j \;:\; j=1,\ldots,n)$ بردار متغیرهای تصمیم‌گیری است که باید تعیین شوند و بقیه‌ی پارامترها، مقادیری هستند که در مساله داده شده‌اند: $C=(c_j : j=1,\ldots,n)$ بردار ضرایب هزینه، $b=(b_i \;: i=1,\ldots,m)^T$ بردار سمت راست، $Q=(q_{ij})_{m\times n}$ ماتریس درجه دوم، $A=(a_{ij})_{m\times n}$ ماتریس ضرایب محدودیت‌ها می‌باشند. در این مقاله ماتریس Q متقارن و نیمه‌معین مثبت درنظر گرفته می‌شود. با استفاده از این نمادگذاری می‌توان مساله بالا را به‌صورت ماتریسی زیر نمایش داد:

$$\begin{aligned} & Min \quad z=Cx+\frac{1}{2} x'Qx \\ & s.t. \\ & \qquad Ax \leq b, \\ & \qquad x \geq 0. \end{aligned} \tag{2}$$

که در آن هدف پیدا کردن متغیرهای تصمیم‌گیری تحت قیود می‌باشد به‌طوریکه تابع هدف min شود. مقادیر بهینه متغیرهای تصمیم‌گیری $x_j \geq 0$، $j=1,\ldots,n$ تابعی از پارامترهای a_{ij}، b_i و c_j، $j=1,\ldots,n$ و $i=1,\ldots,m$ هستند. بنابراین با تغییر هر یک از این پارامترها، متغیرهای تصمیم‌گیری و در نتیجه مقدار بهینه تابع هدف متناسب با آن تغییر خواهد کرد. بنابراین زمانی که برخی از پارامترها در مساله اعداد فازی باشند، مقدار بهینه تابع هدف نیز فازی خواهد بود و مساله برنامه‌ریزی متداول درجه دوم تعریف شده در (۱) تبدیل به مساله برنامه‌ریزی درجه دوم فازی می‌شود که شکل کلی آن به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned} & Min \quad \tilde{z}=\sum_{j=1}^{n} \tilde{C}_j \tilde{x}_j+\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \tilde{Q}_{ij} \tilde{x}_i \tilde{x}_j \\ & s.t. \\ & \qquad \sum_{j=1}^{n} \tilde{A}_{ij} \tilde{x}_j \leq \tilde{B}_i, \quad i=1,\ldots,m, \\ & \qquad \tilde{x}_j \geq 0, \quad j=1,\ldots,n. \end{aligned} \tag{3}$$

که در آن $\tilde{x}_j$، $j=1$،...، n، متغیرهـای تصـمیم‌گیـری در حالـت‌هـای فـازی مـی‌باشـند. $\tilde{A}_{ij}$، $\tilde{B}_i$، $\tilde{C}_j$ و $\tilde{Q}_{ij}$، اعدادی فازی می‌باشند که توابع عضویت آن ها به‌ترتیب $\mu_{\tilde{A}_{ij}}$، $\mu_{\tilde{B}_i}$، $\mu_{\tilde{C}_j}$ و $\mu_{\tilde{Q}_{ij}}$ در زیر تعریف شده‌اند:

$$
\begin{aligned}
\mu_{\tilde{A}_{ij}} &= \left\{ \left(a_{ij}, \mu_{\tilde{A}_{ij}}\left(a_{ij}\right) \right) \middle| a_{ij} \in S\left(\tilde{A}_{ij}\right) \right\} \\
\mu_{\tilde{B}_{i}} &= \left\{ \left(b_{i}, \mu_{\tilde{B}_{i}}\left(b_{i}\right) \right) \middle| b_{i} \in S\left(\tilde{B}_{i}\right) \right\} \\
\mu_{\tilde{C}_{j}} &= \left\{ \left(c_{j}, \mu_{\tilde{C}_{j}}\left(c_{j}\right) \right) \middle| c_{j} \in S\left(\tilde{C}_{j}\right) \right\} \\
\mu_{\tilde{Q}_{ij}} &= \left\{ \left(q_{ij}, \mu_{\tilde{Q}_{ij}}\left(q_{ij}\right) \right) \middle| q_{ij} \in S\left(\tilde{Q}_{ij}\right) \right\}
\end{aligned} \tag{۴}
$$

در روابط (۴)، $S\left(\tilde{A}_{ij}\right)$، $S\left(\tilde{B}_i\right)$، $S\left(\tilde{C}_j\right)$ و $S\left(\tilde{Q}_{ij}\right)$ به‌ترتیب تکیـه‌گـاه‌هـای اعـداد فـازی $\tilde{A}_{ij}$، $\tilde{B}_i$، $\tilde{C}_j$ و $\tilde{Q}_{ij}$ هستند. در این جا به جای بررسی ایـن حالـت کلـی، مسـاله برنامـه‌ریـزی درجـه دوم فـازی را در دو حالـت ساده‌تر زیر مورد بررسی قرار خواهیم داد:

۱. مساله برنامه‌ریزی درجه دوم فازی که در آن ضرایب هزینه، ضـرایب محـدودیت‌هـا و بـردار منـابع اعـدادی فازی می‌باشند.

$$
\begin{aligned}
& Min \quad \tilde{z} = \sum_{j=1}^{n} \tilde{C}_j x_j + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} q_{ij} x_i x_j \\
& s.t. \\
& \qquad \sum_{j=1}^{n} \tilde{A}_{ij} x_j \leq \tilde{B}_i, \quad i=1,\dots,m, \\
& \qquad x_j \geq 0, \quad j=1,\dots,n.
\end{aligned} \tag{۵}
$$

۲. مساله برنامه‌ریزی درجه دوم فازی که در آن علاوه بر ضرایب هزینه، ضرایب محـدودیت‌هـا و بـردار منـابع، ضرایب درجه دوم نیز مقادیری فازی می‌باشند.

$$
\begin{aligned}
& Min \quad \tilde{z} = \sum_{j=1}^{n} \tilde{C}_j x_j + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \tilde{Q}_{ij} x_i x_j \\
& s.t. \\
& \qquad \sum_{j=1}^{n} \tilde{A}_{ij} x_j \leq \tilde{B}_i, \ i=1,\dots,m, \\
& \qquad x_j \geq 0, \quad j=1,\dots,n.
\end{aligned} \tag{۶}
$$

از آن‌جایی که در مدل‌های اخیر برخی از پارامترهای ورودی مساله مقادیری فازی می‌باشند، مقدار بهینه تابع هدف نیز فازی خواهد بود. در بخش بعد با یافتن مقادیر کران بالا و کران پایین تابع هدف در هر سطح α، $\alpha \in [0,1]$ مقدار بهینه فازی را برای هریک از مسایل (۵) و (۶) محاسبه می‌نماییم.

۳ روش حل

در این بخش ابتدا روشی برای حل مساله برنامه‌ریزی درجه دوم فازی (۵) ارایه می‌کنیم و سپس آن را به مسایل کلی‌تر بیان شده توسط مدل (۶) تعمیم می‌دهیم. در این روش ابتدا برای هر مساله برنامه‌ریزی درجه دوم فازی یک زوج از مسایل دوسطحی فرموله می‌شود که به‌ترتیب کران بالا و کران پایین مقدار بهینه فازی را در هر سطح α، $\alpha \in [0,1]$ نتیجه می‌دهند. سپس با به‌کارگیری قضیه دوگانی و در نظر گرفتن قیود مساله داخلی و خارجی به‌طور هم‌زمان هر یک از این مسایل دوسطحی به یک مساله متداول یک‌سطحی تبدیل می‌شود. در نهایت با حل مسایل یک‌سطحی اخیر، جواب مساله برنامه‌ریزی درجه دوم فازی به‌دست می‌آید.

۳-۱ یافتن مسایل دو سطحی

از آن‌جایی که در مدل (۵) پارامترهای a_{ij}، b_i و c_j مقادیری فازی می‌باشند، مقدار بهینه تابع هدف نیز فازی خواهد بود. بر اساس اصل گسترش زاده تابع عضویت مقدار بهینه فازی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu_{\tilde{z}}(z) = \sup_{a,b,c} Min \left\{ \mu_{\tilde{A}_{ij}}(a_{ij}), \mu_{\tilde{B}_i}(b_i), \mu_{\tilde{C}_j}(c_j),\ \forall i,j \middle| z = Z(a,b,c) \right\} \tag{۷}$$

که در آن $z = Z(a,b,c)$، تابع مساله درجه دوم متداول است که در (۱) تعریف شده‌است. بر اساس رابطه (۷) برای این که $\mu_{\tilde{z}}(z) = \alpha$ باشد، باید $\mu_{\tilde{A}_{ij}}(a_{ij}) \geq \alpha$ ، $\mu_{\tilde{B}_i}(b_i) \geq \alpha$ و $\mu_{\tilde{C}_j}(c_j) \geq \alpha$ باشند. هم‌چنین باید حداقل یکی از $\mu_{\tilde{A}_{ij}}$، $\mu_{\tilde{B}_i}$ و $\mu_{\tilde{C}_j}$ برابر α باشند. برای پیدا کردن تابع عضویت $\mu_{\tilde{z}}$، کافی است تابع سمت راست و تابع سمت چپ را که به‌ترتیب معادل کران بالای تابع هدف z_α^u و کران پایین تابع هدف z_α^l در سطح α می‌باشند، بیابیم. چون Z_α^u، حداکثر $Z(a,b,c)$ و z_α^l کمینه $Z(a,b,c)$ می‌باشند داریم:

$$\begin{aligned} z_\alpha^u = Max \{ Z(a,b,c) \big| & (A_{ij})_\alpha^l \leq a_{ij} \leq (A_{ij})_\alpha^u \ , \\ & (B_i)_\alpha^l \leq b_i \leq (B_i)_\alpha^u \ ,\ (C_j)_\alpha^l \leq c_i \leq (C_j)_\alpha^u,\ \forall i,j \} \end{aligned} \tag{۸}$$

$$\begin{aligned} z_\alpha^l = Min \{ Z(a,b,c) \big| & (A_{ij})_\alpha^l \leq a_{ij} \leq (A_{ij})_\alpha^u \ , \\ & (B_i)_\alpha^l \leq b_i \leq (B_i)_\alpha^u \ ,\ (C_j)_\alpha^l \leq c_i \leq (C_j)_\alpha^u,\ \forall i,j \} \end{aligned} \tag{۹}$$

در نتیجه مقادیر a_{ij}، b_i و c_j که بیشترین مقدار را به تابع هدف می‌دهند از مساله برنامه‌ریـزی دوسـطحی زیـر بـه دست می‌آیند:

$$z_\alpha^u = \begin{array}{l} Max \\ \quad (A_{ij})_\alpha^l \le a_{ij} \le (A_{ij})_\alpha^u \\ \quad (B_i)_\alpha^l \le b_i \le (B_i)_\alpha^u \\ \quad (C_j)_\alpha^l \le c_j \le (C_j)_\alpha^u \\ \quad \forall i,j \end{array} \quad \begin{cases} Min \quad z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_{ij} x_i x_j \\ s.t. \\ \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = 1,\dots,m, \\ \qquad x_j \ge 0, \qquad j = 1,\dots,n. \end{cases} \tag{10}$$

هم‌چنین برای یافتن مقادیر a_{ij}، b_i و c_j که کمترین مقدار تابع هدف را تولید می‌کننـد، یـک مسـاله ریاضـی دو سطحی با قرار دادن min به جای max در مساله (۱۰) فرموله می‌شود که به‌صورت زیر است:

$$z_\alpha^l = \begin{array}{l} Min \\ \quad (A_{ij})_\alpha^l \le a_{ij} \le (A_{ij})_\alpha^u \\ \quad (B_i)_\alpha^l \le b_i \le (B_i)_\alpha^u \\ \quad (C_j)_\alpha^l \le c_i \le (C_j)_\alpha^u \end{array} \quad \begin{cases} Min \quad z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_{ij} x_i x_j \\ s.t. \\ \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = 1,\dots,m, \\ \qquad x_j \ge 0, \qquad j = 1,\dots,n. \end{cases} \tag{11}$$

به‌طور مشابه حالت قبل با استفاده از اصل گسترش زاده تابع عضویت مقدار هدف $\tilde{Z}$ ، برای مدل (۶) به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu_{\tilde{Z}}(z) = \sup_{a,b,c} Min \left\{ \mu_{\tilde{A}_{ij}}(a_{ij}), \mu_{\tilde{B}_i}(b_i), \mu_{\tilde{C}_j}(c_j), \mu_{\tilde{Q}_{ij}}(q_{ij}) \;\; \forall i,j \,\middle|\, z = Z(a,b,c) \right\} \tag{12}$$

به‌وضوح مقادیر متفاوت a_{ij}، b_i، c_j و q_{ij}، مقادیر متفاوت تابع هدف را تولید می‌کند. برای یافتن بازه مقدار هدف فازی در یک سطح α، کافی است که کران بالا و کران پایین تابع هدف در مدل (۶) به‌دست آورده شود.

$$z_\alpha^u = Max \left\{ Z(a,b,c) \middle| (A_{ij})_\alpha^l \le a_{ij} \le (A_{ij})_\alpha^u \;,\; (B_i)_\alpha^l \le b_i \le (B_i)_\alpha^u \;, \right. \\ \left. (C_j)_\alpha^l \le c_i \le (C_j)_\alpha^u, (Q_{ij})_\alpha^l \le q_{ij} \le (Q_{ij}), \; \forall i,j \right\} \tag{13}$$

$$z_\alpha^l = Min \left\{ Z(a,b,c) \middle| (A_{ij})_\alpha^l \le a_{ij} \le (A_{ij})_\alpha^u \;,\; (B_i)_\alpha^l \le b_i \le (B_i)_\alpha^u \;, \right. \\ \left. (C_j)_\alpha^l \le c_i \le (C_j)_\alpha^u, (Q_{ij})_\alpha^l \le q_{ij} \le (Q_{ij}), \; \forall i,j \right\} \tag{14}$$

بدیهی است که مقادیر a_{ij}، b_i، c_j و q_{ij}، که بیشترین مقدار و کمترین مقدار تابع هدف را تولید می‌کنند به ترتیب از مسایل برنامه‌ریزی دوسطحی (۱۵) و (۱۶) به‌دست می‌آیند:

$$
\begin{aligned}
z_\alpha^u = \ & Max \\
& (A_{ij})_\alpha^l \le a_{ij} \le (A_{ij})_\alpha^u \\
& (Q_{ij})_\alpha^l \le q_{ij} \le (Q_{ij})_\alpha^u \\
& (B_i)_\alpha^l \le b_i \le (B_i)_\alpha^u \\
& (C_j)_\alpha^l \le c_j \le (C_j)_\alpha^u \\
& \forall i, j
\end{aligned}
\quad
\begin{cases}
Min \quad z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_{ij} x_i x_j \\
s.t. \\
\quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = 1,\ldots,m, \\
\quad x_j \ge 0, \qquad j = 1,\ldots,n.
\end{cases}
\tag{۱۵}
$$

$$
\begin{aligned}
z_\alpha^l = \ & Min \\
& (A_{ij})_\alpha^l \le a_{ij} \le (A_{ij})_\alpha^u \\
& (Q_{ij})_\alpha^l \le q_{ij} \le (Q_{ij})_\alpha^u \\
& (B_i)_\alpha^l \le b_i \le (B_i)_\alpha^u \\
& (C_j)_\alpha^l \le c_j \le (C_j)_\alpha^u \\
& \forall i, j
\end{aligned}
\quad
\begin{cases}
Min \quad z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_{ij} x_i x_j \\
s.t. \\
\quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = 1,\ldots,m, \\
\quad x_j \ge 0, \qquad j = 1,\ldots,n.
\end{cases}
\tag{۱۶}
$$

در هر یک از مسایل (۱۰) و (۱۱)، مساله داخلی مقدار هدف را برای هر a_{ij}، b_i و c_j، مشخص شده از مساله خارجی، محاسبه می‌کند. در حالی که مساله خارجی مقادیر a_{ij}، b_i و c_j، را تعیین می‌کند که کوچکترین مقدار تابع هدف را تولید می‌کند. هم‌چنین در هر یک از مسایل (۱۵) و (۱۶)، مساله داخلی مقدار هدف را برای هر a_{ij}، b_i، c_j و q_{ij}، مشخص شده از مساله خارجی، محاسبه می‌کند. درحالی که مساله خارجی مقادیر a_{ij}، b_i، c_j و q_{ij}، را تعیین می‌کند که کوچکترین مقدار تابع هدف را تولید می‌کند. این مسایل در شکل اخیر قابل حل نیستند. در ادامه چگونگی تبدیل این مسایل به مسایل متداول یک‌سطحی مورد بحث قرار خواهد گرفت.

۳-۲ تبدیل مسایل دوسطحی به مسایل یک‌سطحی

۳-۲-۱ کران بالا

۳-۲-۱-۱ پیش از این نشان داده شد که برای پیدا کردن کران بالای مقدار هدف مساله برنامه‌ریزی درجه دوم (۵)، کافی است مساله ریاضی دوسطحی (۱۰) حل شود. در حالی که حل مدل (۱۰) به دلیل هم‌نوع نبودن توابع هدف مسایل داخلی و خارجی (یکی کمینه‌سازی و دیگری بیشینه‌سازی) ساده نمی‌باشد. بنابراین با دوگان‌گیری از مساله داخلی، توابع هدف را هم‌نوع می‌کنیم. دوگان لاگرانژی مساله (۱)، به‌صورت زیر است [۱۸]:

$$\theta(\lambda,\xi)=\underset{\lambda,\xi\geq 0}{Max}\ \inf\left\{\sum_{j=1}^{n}c_jx_j+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}q_{ij}x_jx_i+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j-b_i\right)-\sum_{j=1}^{n}\xi_jx_j\right\} \tag{17}$$

از آن جا که ماتریس Q، در (۱) متقارن و نیمه‌معین مثبت می‌باشد، برای λ و ξ داده شده تابع

$$\sum_{j=1}^{n}c_jx_j+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}q_{ij}x_jx_i+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j-b_i\right)-\sum_{j=1}^{n}\xi_jx_j$$

محدب است. بنابراین شرط لازم و کافی برای کمینه‌سازی این است که گرادیان صفر باشد. یعنی:

$$c_j+\sum_{i=1}^{n}q_{ij}x_i+\sum_{i=1}^{m}a_{ij}\lambda_i-\xi_j=0,\ j=1,\dots,n \tag{18}$$

بنابراین دوگان مساله داخلی به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
&Max\quad Z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}q_{ij}x_jx_i+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j-b_i\right)-\sum_{j=1}^{n}\xi_jx_j\\
&s.t.\\
&\qquad c_j+\sum_{i=1}^{n}q_{ij}x_i+\sum_{i=1}^{m}a_{ij}\lambda_i-\xi_j=0,\ j=1,\dots,n,\\
&\qquad \lambda_i,\xi_j\geq 0,\quad i=1,\dots,m,\quad j=1,\dots,n.
\end{aligned} \tag{19}$$

با توجه به رابطه (۱۸) داریم:

$$\sum_{j=1}^{n}c_jx_j+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j-\sum_{j=1}^{n}\xi_jx_j=-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}q_{ij}x_ix_j$$

باجایگذاری رابطه‌ی بالا در (۱۹) دوگان لاگرانژی مساله داخلی به‌صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned}
&Max\quad Z=-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}q_{ij}x_jx_i-\sum_{i=1}^{m}b_i\lambda_i\\
&s.t.\\
&\qquad \sum_{i=1}^{n}q_{ij}x_i+\sum_{i=1}^{m}a_{ij}\lambda_i-\xi_j=-c_j,\quad j=1,\dots,n,\\
&\qquad \lambda_i,\xi_j\geq 0,\quad i=1,\dots,m,\qquad j=1,\dots,n.
\end{aligned} \tag{20}$$

بر اساس قضیه دوگانی اگر مساله‌ای بیکران باشد، دوگان آن نشدنی است. به‌علاوه اگر هر دو مساله شدنی باشند آن گاه هر دوی آن‌ها جواب‌های بهینه یکسان دارند. به بیان دیگر مدل (۱۰) می‌تواند به‌صورت زیر بازنویسی شود:

$$
\begin{array}{ll}
& Max \\
& \quad (A_{ij})_\alpha^l \le a_{ij} \le (A_{ij})_\alpha^u \\
z_\alpha^u = & \quad (B_i)_\alpha^l \le b_i \le (B_i)_\alpha^u \\
& \quad (C_j)_\alpha^l \le c_j \le (C_j)_\alpha^u \\
& \quad \forall i,j
\end{array}
\left\{
\begin{array}{l}
Max \quad Z = -\frac{۱}{۲}\sum_{i=۱}^{n}\sum_{j=۱}^{n} q_{ij} x_j x_i - \sum_{i=۱}^{m} b_i \lambda_i \\
s.t. \\
\qquad \sum_{i=۱}^{n} q_{ij} x_i + \sum_{i=۱}^{m} a_{ij}\lambda_i - \xi_j = -c_j ,\ j = ۱,...,n, \\
\qquad \lambda_i , \xi_j \ge ۰, \quad i = ۱,...,m, \quad j = ۱,...,n.
\end{array}
\right.
\tag{۲۱}
$$

حال هر دو مساله داخلی و خارجی عملگر بیشینه‌سازی دارند و می‌توان آن را با درنظر گرفتن قیود به‌طور هم‌زمان به یک مساله یک‌سطحی به‌صورت زیر تبدیل کرد:

$$
\begin{array}{l}
z_\alpha^u = \underset{x,\lambda,\xi}{Max} \quad Z = -\frac{۱}{۲}\sum_{i=۱}^{n}\sum_{j=۱}^{n} q_{ij} x_j x_i - \sum_{i=۱}^{m} b_i \lambda_i \\
s.t. \\
\quad \sum_{i=۱}^{n} q_{ij} x_i + \sum_{i=۱}^{m} a_{ij}\lambda_i - \xi_j = -c_j ,\ j = ۱,...,n, \\
\quad (A_{ij})_\alpha^l \le a_{ij} \le (A_{ij})_\alpha^u , \quad j = ۱,...,n, \quad i = ۱,...,m, \\
\quad (B_i)_\alpha^l \le b_i \le (B_i)_\alpha^u , \quad j = ۱,...,n, \\
\quad (C_j)_\alpha^l \le c_j \le (C_j)_\alpha^u , \quad j = ۱,...,n, \\
\quad \lambda_i , \xi_j \ge ۰, \ j = ۱,...,n, \quad i = ۱,...,m,
\end{array}
\tag{۲۲}
$$

چون $\lambda_i \ge ۰$، $i=۱،...،m$ داریم:

$$(B_i)_\alpha^l \lambda_i \le b_i \lambda_i \le (B_i)_\alpha^u \lambda_i ,\ j = ۱,...,n$$

بنابراین برای دست یافتن به بیشترین مقدار تابع هدف باید پارامترهای b_i، $i=۱،...،m$، کران پایین خود را اختیار کنند. به‌علاوه برای تبدیل این مدل به مساله برنامه‌ریزی درجه دوم متداول باید تعداد عوامل غیرخطی کاهش داده شود. در نتیجه با ضرب رابطه $(A_{ij})_\alpha^l \le a_{ij} \le (A_{ij})_\alpha^u$ در λ_i برای هر $i=۱،...،m$ و تغییر متغیر $a_{ij}\lambda_i = r_{ij}$، مساله (۱۰) به‌صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$
\begin{aligned}
& z_{\alpha}^{u} = \underset{x,\lambda,\xi}{Max} \quad Z = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_{ij} x_j x_i - \sum_{i=1}^{m}\left(B_i\right)_{\alpha}^{l} \lambda_i \\
& s.t. \\
& \qquad \sum_{i=1}^{n} q_{ij} x_i + \sum_{i=1}^{m} r_{ij} - \xi_j = -c_j, \ j = 1,\dots,n, \\
& \qquad \left(A_{ij}\right)_{\alpha}^{l} \le a_{ij} \le \left(A_{ij}\right)_{\alpha}^{u}, \qquad j = 1,\dots,n, \quad i = 1,\dots,m, \\
& \qquad \left(C_j\right)_{\alpha}^{l} \le c_j \le \left(C_j\right)_{\alpha}^{u}, \qquad j = 1,\dots,n, \\
& \qquad \lambda_i, \xi_j \ge 0, \quad j = 1,\dots,n, \quad i = 1,\dots,m.
\end{aligned}
\tag{۲۳}
$$

این مساله یک مساله درجه دوم متداول است که جواب بهینه آن کران بالای جواب مساله فازی درجه دوم (۵) است.

۳-۲-۱-۲ برای پیدا کردن کران بالای مقدار هدف مساله برنامه‌ریزی درجه دوم مدل (۶)، کافی است مساله ریاضی دوسطحی (۱۵) حل شود. به وضوح برای $x_i x_j \ge 0$، رابطه زیر برقرار است:

$$
\left(Q_{ij}\right)_{\alpha}^{l} x_i x_j \le q_{ij} x_i x_j \le \left(Q_{ij}\right)_{\alpha}^{u} x_i x_j, \ \left(C_j\right)_{\alpha}^{l} x_j \le c_j x_j \le \left(C_j\right)_{\alpha}^{u} x_j
\tag{۲۴}
$$

بنابراین حداکثر مقدار تابع هدف در (۱۵) زمانی حاصل خواهد شد که پارامترهای c_j به ازای هر j، q_{ij} به ازای هر i, j به ترتیب کران‌های بالای خود $\left(C_j\right)_{\alpha}^{u}$ و $\left(Q_{ij}\right)_{\alpha}^{u}$ را اختیار کنند. یعنی مدل (۱۵) به‌صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$
\begin{array}{ll}
\begin{array}{l}
Max \\
\quad \left(A_{ij}\right)_{\alpha}^{l} \le a_{ij} \le \left(A_{ij}\right)_{\alpha}^{u} \\
z_{\alpha}^{u} = \left(B_i\right)_{\alpha}^{l} \le b_i \le \left(B_i\right)_{\alpha}^{u} \\
\qquad \forall i, j
\end{array}
&
\left\{
\begin{array}{l}
Min \quad z = \sum_{j=1}^{n}\left(C_j\right)_{\alpha}^{u} x_j + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(Q_{ij}\right)_{\alpha}^{u} x_i x_j \\
s.t. \\
\qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = 1,\dots,m, \\
\qquad x_j \ge 0, \qquad j = 1,\dots,n.
\end{array}
\right.
\end{array}
$$

در مدل اخیر نیز توابع هدف هم‌نوع نمی‌باشند. در نتیجه همانند قسمت قبل با دوگان‌گیری از مساله داخلی و تبدیل آن به مساله از نوع بیشینه‌سازی می‌توان توابع هدف را هم‌نوع نمود. بنابراین مساله برنامه‌ریزی درجه دوم (۱۵) به‌صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$z^{u}_{\alpha}=\underset{\substack{\left(A_{ij}\right)^{l}_{\alpha}\le a_{ij}\le\left(A_{ij}\right)^{u}_{\alpha}\\ \left(B_{i}\right)^{l}_{\alpha}\le b_{i}\le\left(B_{i}\right)^{u}_{\alpha}\\ \forall i,j}}{Max}\begin{cases}\underset{x,\lambda,\xi}{Max}\ z=-\sum_{i=1}^{m}b_{i}\lambda_{i}-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(Q_{ij}\right)^{u}_{\alpha}x_{i}x_{j}\\ s.t.\\ \qquad\sum_{i=1}^{n}\left(Q_{ij}\right)^{u}_{\alpha}x_{i}+\sum_{i=1}^{m}a_{ij}\lambda_{i}-\xi_{j}=-c_{j},\quad j=1,\dots,n,\\ \qquad\lambda_{i},x_{j}\ge 0,\quad i=1,\dots,m,\quad j=1,\dots,n.\end{cases}\tag{۲۵}$$

حال عملگرهای هر دو مساله داخلی و خارجی از نوع بیشینه‌سازی می‌باشند. بنابراین با درنظر گرفتن قیود به‌طور هم‌زمان، مساله دوسطحی اخیر به مساله‌ای یک‌سطحی به‌صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned}&Z^{u}_{\alpha}=\underset{x,\lambda,\xi}{Max}\quad z=-\sum_{i=1}^{m}b_{i}\lambda_{i}-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(Q_{ij}\right)^{u}_{\alpha}x_{i}x_{j}\\ &s.t.\\ &\qquad\sum_{i=1}^{n}\left(Q_{ij}\right)^{u}_{\alpha}x_{i}+\sum_{i=1}^{m}a_{ij}\lambda_{i}-\xi_{j}=-c_{j},\ j=1,\dots,n,\\ &\qquad\left(A_{ij}\right)^{l}_{\alpha}\le a_{ij}\le\left(A_{ij}\right)^{u}_{\alpha},\\ &\qquad\left(B_{i}\right)^{l}_{\alpha}\le b_{i}\le\left(B_{i}\right)^{u}_{\alpha},\\ &\qquad\lambda_{i},x_{j}\ge 0,\quad i=1,\dots,m,\quad j=1,\dots,n.\end{aligned}\tag{۲۶}$$

از آن‌جا که $\lambda_i \ge 0$ داریم:

$$\left(B_{i}\right)^{l}_{\alpha}\lambda_{i}\le b_{i}\lambda_{i}\le\left(B_{i}\right)^{u}_{\alpha}\lambda_{i},\forall i=1,\dots,m$$

برای دست یافتن به بیشترین مقدار تابع هدف، پارامترهای b_i به‌ازای $i=1,\dots,m$ باید کران پایین خود را اختیار کنند. به‌علاوه می‌توان با ضرب $\left(A_{ij}\right)^{l}_{\alpha}\le a_{ij}\le\left(A_{ij}\right)^{u}_{\alpha}$ در λ_i، $i=1,\dots,m$ و قرار دادن $a_{ij}\lambda_i=r_{ij}$ عامل غیرخطی $a_{ij}\lambda_i$ را از بین برد.

$$\begin{aligned}&Z^{u}_{\alpha}=\underset{x,\lambda,\xi}{Max}\ z=-\sum_{i=1}^{m}\left(B_{i}\right)^{l}_{\alpha}\lambda_{i}-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(Q_{ij}\right)^{u}_{\alpha}x_{i}x_{j}\\ &\text{s.t.}\\ &\qquad\sum_{i=1}^{n}\left(Q_{ij}\right)^{u}_{\alpha}x_{i}+\sum_{i=1}^{m}r_{ij}-\xi_{j}=-\left(C_{j}\right)^{u}_{\alpha},\quad j=1,\dots,n,\\ &\qquad\left(A_{ij}\right)^{l}_{\alpha}\lambda_{i}\le r_{ij}\le\left(A_{ij}\right)^{u}_{\alpha}\lambda_{i},\\ &\qquad\lambda_{i},x_{j}\ge 0,\quad i=1,\dots,m,\quad j=1,\dots,n.\end{aligned}\tag{۲۷}$$

این مساله یک مساله درجه دوم متداول است که مقدار بهینه آن یک بهینه‌ی سراسری است. جواب بهینه Z^{u}_{α} کران بالای جواب مساله فازی درجه دوم (۶) است.

۳-۲-۲ کران پایین

۳-۲-۲-۱ چون هر دو مساله داخلی و خارجی در (۱۱) عملگر کمینه‌سازی دارند می‌توان با درنظر گرفتن قیود آن به‌طور هم‌زمان آن را به مساله متداول یک‌سطحی تبدیل کرد:

$$\begin{aligned}
& \mathrm{Z}_{\alpha}^{\mathrm{u}} = Min \quad z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_{ij} x_i x_j \\
& s.t. \\
& \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i ,\ i = 1,\dots,m \\
& \qquad \left(A_{ij}\right)_{\alpha}^{l} \le a_{ij} \le \left(A_{ij}\right)_{\alpha}^{u}, \quad i = 1,\dots,m, \quad j = 1,\dots,n, \\
& \qquad \left(B_i\right)_{\alpha}^{\mathrm{l}} \le b_i \le \left(B_i\right)_{\alpha}^{\mathrm{u}}, \quad i = 1,\dots,m, \\
& \qquad \left(C_j\right)_{\alpha}^{\mathrm{l}} \le c_i \le \left(C_j\right)_{\alpha}^{\mathrm{u}}, \quad j = 1,\dots,n, \\
& \qquad x_j \ge 0, \qquad j = 1,\dots,n.
\end{aligned} \tag{۲۸}$$

از آن جا که $x_j \ge 0$ از رابطه $\left(C_j\right)_{\alpha}^{\mathrm{l}} \le c_i \le \left(C_j\right)_{\alpha}^{\mathrm{u}}$ داریم:

$$\left(C_j\right)_{\alpha}^{\mathrm{l}} x_j \le c_j x_j \le \left(C_j\right)_{\alpha}^{\mathrm{u}} x_j$$

برای به‌دست آوردن کمترین مقدار تابع هدف، پارامترهای فازی c_j، $j=1,\dots,n$ باید کران‌های پایین خود را اتخاذ نمایند. یعنی باید تابع هدف از $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_{ij} x_i x_j$ به $\sum_{j=1}^{n}\left(C_j\right)_{\alpha}^{\mathrm{u}} x_j + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_{ij} x_i x_j$ تغییر یابد. به‌علاوه ناحیه شدنی که توسط قیود نامساوی $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i$ به‌وجود می‌آید زمانی به وسیع‌ترین حد خود دست می‌یابد که پارامترهای b_i کران‌های بالای خود، $\left(B_i\right)_{\alpha}^{\mathrm{u}}$ و پارامترهای a_{ij} کران‌های پایین خود، $\left(A_{ij}\right)_{\alpha}^{l}$ را اختیار کنند. بنابراین مدل (۲۸) به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned}
& \mathrm{Z}_{\alpha}^{\mathrm{l}} = \underset{\mathrm{x}}{Min} \quad z = \sum_{j=1}^{n}\left(C_j\right)_{\alpha}^{\mathrm{u}} x_j + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_{ij} x_i x_j \\
& s.t. \\
& \qquad \sum_{j=1}^{n}\left(A_{ij}\right)_{\alpha}^{l} x_j \le \left(B_i\right)_{\alpha}^{\mathrm{u}}, \quad i = 1,\dots,m, \\
& \qquad x_j \ge 0, \qquad j = 1,\dots,n.
\end{aligned} \tag{۲۹}$$

مدل (۲۹) یک مساله برنامه‌ریزی درجه دوم متداول است که تابع هدف آن محدب و محدودیت‌ها خطی می‌باشند. بنابراین کران پایین به‌دست آمده یک جواب بهینه سراسری است.

۳-۲-۲-۲ برای جستجوی کمترین مقدار تابع هدف در (۱۶) باید به‌جای پارامترهای c_j، به ازای هر j و q_{ij} به ازای هر i,j به‌ترتیب کران‌های پایین آن ها $\left(C_j\right)_\alpha^{\mathrm{l}}$ و $\left(Q_{ij}\right)_\alpha^{\mathrm{l}}$ را قرار دهیم. زیرا:

$$\sum_{j=1}^{n}\left(C_j\right)_\alpha^{\mathrm{l}} x_j+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(Q_{ij}\right)_\alpha^{\mathrm{l}} x_i x_j \le \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + $$
$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_{ij} x_i x_j \le \sum_{j=1}^{n}\left(C_j\right)_\alpha^{\mathrm{u}} x_j+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(Q_{ij}\right)_\alpha^{\mathrm{u}} x_i x_j$$

بنابراین مدل (۱۶) به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{array}{l} Min \\ \qquad \left(A_{ij}\right)_\alpha^{l} \le a_{ij} \le \left(A_{ij}\right)_\alpha^{u} \\ z_\alpha^{l} = \ \left(B_i\right)_\alpha^{\mathrm{l}} \le b_i \le \left(B_i\right)_\alpha^{\mathrm{u}} \\ \qquad \qquad \forall i,j \end{array} \qquad \begin{cases} Min \quad z=\sum\limits_{j=1}^{n}\left(C_j\right)_\alpha^{\mathrm{l}} x_j+\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\left(Q_{ij}\right)_\alpha^{\mathrm{l}} x_i x_j \\ s.t. \\ \qquad \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i=1,\dots,m \\ \qquad x_j \ge 0, \qquad j=1,\dots,n. \end{cases} \tag{۳۰}$$

به طریق مشابه این مساله می‌تواند با درنظر گرفتن قیود آن به‌طور هم‌زمان، به مساله متداول یک‌سطحی به‌صورت زیر تبدیل شود:

$$\begin{array}{l} \mathrm{Z}_\alpha^{\mathrm{l}} = \underset{\mathrm{x}}{Min} \quad z=\sum\limits_{j=1}^{n}\left(C_j\right)_\alpha^{\mathrm{l}} x_j+\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\left(Q_{ij}\right)_\alpha^{\mathrm{l}} x_i x_j \\ s.t. \\ \qquad \sum\limits_{\mathrm{j=1}}^{\mathrm{n}} a_{\mathrm{ij}} x_j \le b_i,\ i=1,\dots,m, \\ \qquad \left(A_{ij}\right)_\alpha^{l} \le a_{ij} \le \left(A_{ij}\right)_\alpha^{u}, \quad i=1,\dots,m, \quad j=1,\dots,n, \\ \qquad \left(B_i\right)_\alpha^{\mathrm{l}} \le b_i \le \left(B_i\right)_\alpha^{\mathrm{u}}, \quad i=1,\dots,m, \\ \qquad x_j \ge 0, \qquad j=1,\dots,n. \end{array} \tag{۳۱}$$

هم‌چنین با اختیار $\left(B_i\right)_\alpha^u$ و $\left(A_{ij}\right)_\alpha^l$ به‌ترتیب به‌جای پارامترهای b_i و a_{ij} ناحیه‌ی شدنی که توسط قیود نامساوی $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i$ به‌وجود می‌آید، به وسیع‌ترین حد خود دست می‌یابد. بنابراین مدل (۲۸) به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$
\begin{aligned}
Z_\alpha^l = \ & \underset{x}{Min} \quad z = \sum_{j=1}^{n}\left(C_j\right)_\alpha^l x_j + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(Q_{ij}\right)_\alpha^l x_i x_j \\
s.t.\ & \\
& \sum_{j=1}^{n}\left(A_{ij}\right)_\alpha^l x_j \le \left(B_i\right)_\alpha^u, \quad i = 1,\dots,m, \\
& x_j \ge 0, \quad j = 1,\dots,n.
\end{aligned}
\tag{۳۲}
$$

این مدل نیز یک مساله برنامه‌ریزی درجه دوم متداول است که تابع هدف آن یک تابع محدب است و محدودیت‌ها نیز خطی می‌باشند. بنابراین کران پایین به‌دست آمده یک جواب بهینه سراسری است.
بنابراین با حل هر زوج از مدل‌های (۲۳) و(۲۹)، و (۲۷) و(۳۲) می‌توان بازه $\left[Z_\alpha^l, Z_\alpha^u\right]$ را که مقدار بهینه مساله درجه دوم فازی در آن قرار دارد، به‌ترتیب برای مسایل درجه دوم فازی (۵) و (۶) به‌دست آورد. در بخش بعد مفاهیم بیان شده در این مقاله را برای حل یک مثال عددی به‌کار خواهیم گرفت.

٤ مثال عددی

در این بخش با حل یک مثال عددی چگونگی اعمال این روش به مسایل برنامه‌ریزی درجه دوم فازی را نشان خواهیم داد. مساله برنامه‌ریزی درجه دوم با پارامترهای فازی زیر را در نظر بگیرید:

$$
\begin{aligned}
Min \quad & z = (-6,2,1)x_1 + (5,2,2)x_2 + x_1^2 + x_1x_2 + 1/5x_2^2 \\
s.t.\ & \\
& (3,1,0/5)x_1 + (5,1,2)x_2 \le (7,1,1/5) \\
& (4,1,1)x_1 \le (5,2,2) \\
& x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
\tag{۳۳}
$$

در مساله برنامه‌ریزی (۳۳) ضرایب خطی تابع هدف، ضرایب محدودیت‌ها و بردار منابع اعداد فازی مثلثی می‌باشند. بنابراین کران بالا و کران پایین تابع هدف در هر سطح به‌ترتیب با حل مسایل برنامه‌ریزی درجه دوم فازی (۳۴) و (۳۵) به‌دست می‌آیند:

$$\begin{aligned}
Z_{\alpha}^{u} = Max \quad & z = -x_{۱}^{۲} - x_{۱}x_{۲} - ۱/۵x_{۲}^{۲} - (\alpha + ۶)\lambda_{۱} - (۲\alpha + ۳)\lambda_{۲} \\
s.t. \quad & \\
& ۲x_{۱} + x_{۲} + r_{۱۱} + r_{۲۱} - \xi_{۱} = -c_{۱} \\
& ۱x_{۱} + ۳x_{۲} + r_{۲۱} + r_{۲۲} - \xi_{۲} = -c_{۲} \\
& (۲ + \alpha)\lambda_{۱} \le r_{۱۱} \le (۳/۵ - ۲\alpha)\lambda_{۱} \\
& (\alpha - ۶)\lambda_{۱} \le r_{۱۲} \le (-۳ - ۲\alpha)\lambda_{۱} \\
& (۳ + \alpha)\lambda_{۲} \le r_{۲۱} \le (۵ - \alpha)\lambda_{۲} \\
& x_{۱}, x_{۲} \ge ۰ \\
& \lambda_{۱}, \lambda_{۲} \ge ۰ \\
& \xi_{۱}, \xi_{۲} \ge ۰
\end{aligned} \qquad (۳۴)$$

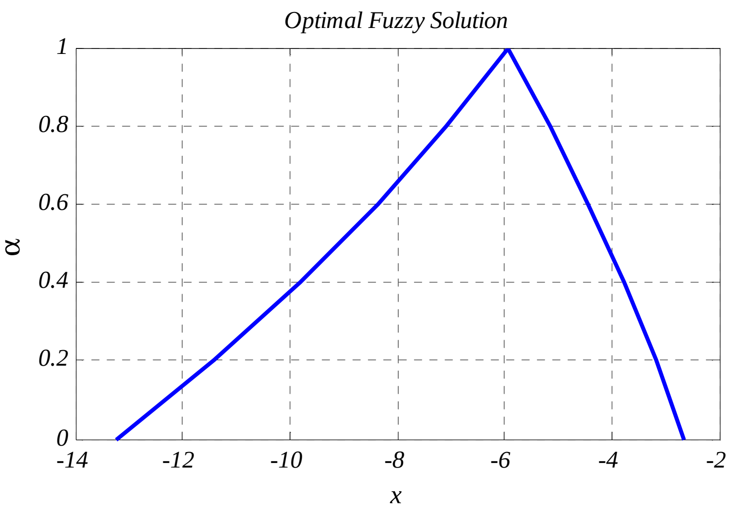
$$\begin{aligned}
Z_{\alpha}^{l} = Max \quad & z = x_{۱}^{۲} + x_{۱}x_{۲} + ۱/۵\, x_{۲}^{۲} + (۲\alpha - ۸)x_{۱} + (۲\alpha + ۳)x_{۲} \\
s.t. \quad & \\
& (\alpha + ۲)x_{۱} + (\alpha - ۶)x_{۲} \le (۷/۵ - ۰/۵\alpha) \\
& (۳ + \alpha)x_{۱} \le (-۲\alpha + ۷) \\
& x_{۱}, x_{۲} \ge ۰
\end{aligned} \qquad (۳۵)$$

مسایل (۳۴) و (۳۵)، مسایل برنامه‌ریزی درجه دوم کلاسیک می‌باشند که به‌ترتیب مقادیر کران بالا و کران پایین تابع هدف را در هر سطح α، نتیجه می‌دهند. مقادیر بهینه این زوج از مسایل برنامه‌ریزی کلاسیک در شش سطح مختلف α در جدول (۱) لیست شده‌است:

جدول ۱. مقادیر کران بالا و کران پایین تابع هدف در هر سطح آلفا

α	۰	۰/۲	۰/۴	۰/۶	۰/۸	۱
Z_{α}^{l}	−۱۳/۲۲۲۲۲	−۱۱/۴۲	−۹/۸۰۴۲	−۸/۳۵۹۹	−۷/۰۷۵۳	−۵/۹۳۷۵
Z_{α}^{u}	−۲/۶۴	−۳/۱۸۱۶	−۳/۷۷۸۴	−۴/۴۳۴۳	−۵/۱۵۲۸	−۵/۹۳۷۵

تابع عضویت $\mu_{\tilde{Z}}$، در شکل (۱) نشان داده شده است.



شکل ۱. نمودار تابع عضویت فازی

۵ نتیجه گیری

در این مقاله مسایل برنامه‌ریزی درجه دوم با پارامترهای نادقیق (فازی) مورد بحث قرار گرفته و روش حلی برای یافتن جواب بهینه آن ارایه شده. در روش یاد شده و هم‌چنین در اغلب روش‌های موجود درجه عضویت نقاط مختلف یک عدد فازی درنظر گرفته نمی‌شود و تنها نقاطی در محاسبات دخالت داده شدند که دارای تابع عضویتی بیشتر یا مساوی α هستند. حتی در حالت اخیر نیز درجه عضویت نقاط تاثیری بر جواب بهینه ندارد. انتظار می‌رود با مطالعه بیشتر، نتایج عددی نیز به شکل رسمی گزارش شود.

منابع

[1] Abdel-Malek, L. L., Areeractch, N., (2007). A quadratic programming approach to the multi-product newsvendor problem with side constraints. European Journal of Operational Research, 176, 855-861.

[2] Ammar, E., Khalifa, H. A., (2003). Fuzzy portfolio optimization, A quadratic programming approach. Chaos, Solitons & Fractals, 18, 1045-1054.

[3] Zhang, W. G., Nie, Z. K., (2005). On admissible efficient portfolio selection policy. Applied Mathematics and Computation, 169, 608-623.

[4] Dwyer, T., Koren, Y., Marriott, K., (2006). Drawing directed graphs using quadratic programming. IEEE Trans Vis Compute Graph, 12(4), 536-548.

[5] Petersen, J. A. M., Bodson, M., (2006). Constrained quadratic programming techniques for control allocation. IEEE Transaction Control Systems Technology, 14, 91-98.

[6] Pavlovi, L., Divni, T., (2007). A quadratic programming approach to the Randi index. European Journal of Operational Research, 176, 435-444.

[7] Schwars, H. G., (2006). Economic material-product chain models: current status, further development and an illustrative example. Ecol Economy, 58, 373-392.

[8] Zadeh, L. A., (1978). Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility. Fuzzy Sets and Systems, 13-28.

[9] Ammar, E., (2003). Interactive stability of multiobjective NLP problems with fuzzy parameters in the objective functions and constraints. Fuzzy Sets and Systems, 109, 83-90.

[10] Bazaraa, M. S., Sherali, H. D., Shetty, C. M., (1993). Nonlinear programming: theory and algorithm. Second ed. New York: John Wiley & Sons.

[11] Chen, S. P., (2004). Parametric nonlinear programming for analyzing fuzzy queues with finite capacity. European Journal of Operational Research, 38, 429-438.
[12] Liu, S. T., (2004). Fuzzy geometric programming approach to a fuzzy machining economics model. Int. J. Prod. Res. 42, 3253-3269.
[13] Nasseri, S. H., Taleshian, F., Alizadeh, Z., Vahidi, J., (2012). A New Method for Ordering LR Fuzzy Number. The Journal of Mathematics and Computer Science, 4(3), 283 - 294.
[14] Sakawa, M., (1993). Fuzzy set and interactive multi-objective optimization. New York: Plenum Press.
[15] Soleimani-damaneh, M., (2006). Fuzzy upper bounds and their applications. Chaos, Solitons & Fractals, 6, 42.
[16] Stefanini, L., Sorini, L., Guerra, M. L., (2006). Soliton of fuzzy dynamical systems using the LU-representation of fuzzy numbers. Chaos, Solitons & Fractals, 29, 638-52.
[17] Luenberger, D., (2008). Linear and nonlinear programming. Third Edition, Springer, New York.
[18] Bazaraa, M. S., Jarvis, J. J., Sherali, H. D., (1990). Linear programming and network Flows. Second Edition, John Wiley, New York.