مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، سال دهم، شماره سوم (پیاپی ۳۸)، پاییز ۹۲، ص ص ۶۹-۶۱
شاپا ۷۲۸۶-۲۲۵۱

بهبود قدرت تمایز تکنیک DEA با استفاده از ارزیابی برشی

علیرضا امیرتیموری*[1]، سهراب کردرستمی[2]، لیلا خوش اندام[3]، پیمان علیدوست ذوقی[4]

۱- دانشگاه آزاد اسلامی واحد رشت، گروه ریاضی

۲- دانشگاه آزاد اسلامی واحد لاهیجان، گروه ریاضی

۳- دانشگاه آزاد اسلامی واحد لشت نشاء- زیباکنار، گروه ریاضی

۴- دانشگاه آزاد اسلامی واحد بندرانزلی

رسید مقاله: ۲۷ مرداد ۱۳۸۹
پذیرش مقاله: ۱۶ دی ۱۳۸۹

چکیده

ارزیابی برشی یک تعمیم قوی از تکنیک تحلیل پوششی داده‌هاست به طوری که نه تنها یک رتبه‌بندی برای واحدهای تصمیم‌گیرنده فراهم می‌کند؛ بلکه الگوهای وزنی نامتناسب را نیز حذف می‌نماید. عاملی که ممکن است در استفاده از ارزیابی برشی مشکل‌ساز شود. وجود وزن‌های بهینه چندگانه می‌باشد؛ در نتیجه برای بهبود روش ارزیابی برشی، از توابع هدف ثانویه استفاده می‌شود. در این مقاله، یک روش، توسط دو تابع هدف ثانویه متفاوت معرفی خواهد شد و با حل این مدل‌ها، یک الگوی وزنی مناسب برای محاسبه ارزیابی برشی و در نهایت رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیری فراهم خواهد گردید.

کلمات کلیدی : تحلیل پوششی داده‌ها، رتبه‌بندی، ارزیابی برشی، توابع هدف ثانویه.

۱ مقدمه

یکی از شاخه‌های کاربردی تحقیق در عملیات، تحلیل پوششی داده‌ها می‌باشد که جهت ارزیابی عملکرد واحدهای تصمیم‌گیری با چند ورودی و چند خروجی به کار می‌رود. چارنز و همکاران [۱] نخستین بار با تعمیم تحقیق فارل [۲] تکنیک DEA را معرفی کردند. DEA به هر واحد کارآ اندازه کارآیی یک و به هر واحد ناکارآ اندازه کارآیی کمتر از یک تخصیص می‌دهد. در اغلب کاربردهای عملی، بیش از یک واحد، کارآ ارزیابی می‌شود و از این‌رو ایجاد تمایز و رتبه‌بندی این واحدها مبحث جالبی در حیطه تحلیل پوششی داده‌ها می‌باشد. یکی از روش‌های رتبه‌بندی واحدها، روش ارزیابی برشی است. سکستون و همکاران [۳]. ارزیابی برشی دارای دو مزیت عمده می‌باشد: (۱) یک رتبه‌بندی یکتا از واحدها فراهم و (۲) الگوهای وزنی نامتناسب را حذف می‌کند. اندرسن و همکاران [۳]. رتبه کارآیی برشی به‌دست آمده از مدل‌های DEA معمولاً یکتا نیستند و این

* عهده دار مکاتبات
آدرس الکترونیکی: ateimoori@iaurasht.ac.ir

ناشی از چندگانگی وزن‌های بهینه در DEA می‌باشد که ممکن است باعث بروز مشکلاتی شود. سکستون و همکاران و دویل و گرین [۴] پیشنهاد کردند که از اهداف ثانویه استفاده شود. برای این منظور آن‌ها دو مدل Max و Min را مطرح نمودند. در مدل اول، علاوه بر این‌که کارآیی واحد تحت بررسی را ماکسیمم می‌کند؛ میانگین کارآیی واحدهای دیگر را نیز ماکسیمم می‌نماید. در مدل دوم، علاوه بر این‌که کارآیی واحد تحت بررسی را مینیمم می‌کند؛ میانگین کارآیی واحدهای دیگر را ماکسیمم می‌نماید. در سال ۲۰۰۸ کوک و همکاران [۵]، با معرفی سه مدل با توابع هدف متفاوت، به صورت: (۱) مینیمم کردن انحراف کل از نقطه ایده‌آل، (۲) مینیمم کردن ماکسیمم انحرافات، (۳) مینیمم کردن میانگین قدرمطلق انحرافات، تعمیمی بر مدل دویل و گرین ارایه کردند.

در این مقاله به منظور بهبود ارزیابی برشی، و در نهایت رسیدن به رتبه‌بندی، دو مدل با توابع هدف متفاوت ارایه می‌شود و سپس با ارایه یک مثال، نتایج حاصل بررسی خواهد شد.

۲ ارزیابی برشی

فرض کنیم مجموعه ای از n واحد تصمیم گیری جهت ارزیابی وجود دارند. هر DMU_j، s خروجی متفاوت را به کمک m ورودی متفاوت تولید می‌کند. iامین ورودی و rامین خروجی DMU_j، $j=۱,...,n$ به ترتیب با x_{ij} ، $i=۱,...,m$ و y_{rj}، $s=۱,...,r$ نشان داده می‌شوند.

ارزیابی برشی اغلب به صورت یک فرآیند دو مرحله‌ای انجام می‌شود. در مرحله اول با استفاده از یکی از مدل‌های استاندارد DEA مانند مدل مضربی (CCR)، برای هر DMU یک بردار وزنی به‌دست می‌آید. برای هر DMUی تحت ارزیابی میزان کارآیی، E^*_{pp}، به‌دست آمده از مدل CCR به وسیله مساله‌ی بهینه‌سازی زیر داده می‌شود:

$$
\begin{aligned}
E^*_{pp} = Max \quad & E_{pp} = \frac{\sum_{r=۱}^{s} u_{rp} y_{rp}}{\sum_{i=۱}^{m} v_{ip} x_{ip}} \\
s.t. \quad & \\
& E_{pj} = \frac{\sum_{r=۱}^{s} u_{rp} y_{rj}}{\sum_{i=۱}^{m} v_{ip} x_{ij}} \le ۱, \quad j=۱,\cdots,n, \\
& u_{rp} \ge ۰, \quad v_{ip} \ge ۰, \qquad for \ \ all \ \ i, j.
\end{aligned} \tag{۱}
$$

که در آن v_{ip} و u_{rp} به ترتیب اوزان مربوط به i امین ورودی و r امین خروجی می‌باشند. فرض کنیم u^*_{rp}, v^*_{ip}جواب بهینه مدل (۱) باشند. اندازه برشی DMU_j با استفاده از وزن‌های بهینه مدل (۱) در ارزیابی DMU_p به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$E_{pj}=\frac{\sum_{r=1}^{s}u_{rp}^{*}y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m}v_{ip}^{*}x_{ij}},\quad (j=1...n) \tag{۲}$$

برای DMU_j $(j=1...n)$ میانگین تمام E_{pj} $(p=1,2,...n)$ به عنوان میزان کارآیی ارزیابی برشی برای DMU_j معرفی می‌شود. بنابراین کارآیی ارزیابی برشی DMU_j به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\bar{E}_j=\frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n}E_{pj} \tag{۳}$$

۳ ارزیابی برشی مبتنی بر هدف ثانویه

در روشی که در ذیل توصیف خواهد شد، ابتدا به کمک یکی از مدل‌های اساسی DEA، مثلاً مدل CCR، اندازه کارآیی DMUها اندازه‌گیری می‌شود و به کمک آن، با حفظ شرایط کارآیی واحدها، طی یک فرآیند دو مرحله‌ای، اندازه برشی واحدها محاسبه می‌شود.

مدل مضربی CCR را به‌صورت زیر در نظر می گیریم:

$$\begin{aligned} e_p=Max\quad & \sum_{r=1}^{s}u_{rp}y_{rp}\\ s.t.\quad & \\ & \sum_{i=1}^{m}v_{ip}x_{ip}=1,\\ & \sum_{r=1}^{s}u_{rp}y_{rp}-\sum_{i=1}^{m}v_{ip}x_{ip}=0,\\ & u_{rp}\geq 0,\ v_{ip}\geq 0\qquad for\ \ all\ \ i,r. \end{aligned} \tag{۴}$$

که در آن DMU_p تحت ارزیابی است. فرض کنیم e_p^{*} مقدار بهینه مدل (۴) باشد. در مرحله‌ی بعد، به دنبال بردار وزنی هستیم که اولاً شرایط کارآیی واحد تصمیم گیری تحت ارزیابی، DMU_p، را حفظ کند، ثانیاً بقیه واحدهای تصمیم‌گیری را تا حد ممکن به سطح کارآیی ایده آل نزدیک کند، برای این منظور تلاش می‌کنیم فاصله $\sum_{r=1}^{s}u_r y_{rj}-\sum_{i=1}^{m}v_i x_{ij}$ را تا حد ممکن کم کنیم. مساله زیر را در نظر می‌گیریم:

$$
\begin{aligned}
& Max \quad \rho \\
& s.t. \\
& \qquad \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ip} = 1, \\
& \qquad \rho \le \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \le 0, \\
& \qquad \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rp} = e_p^*, \\
& \qquad u_{rp} \ge 0, \quad v_{ip} \ge 0, \qquad for \;\; all \;\; i, r.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

در مدل (۵) با معرفی ρ به عنوان یک کران پایین برای $\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}$ ، هدف کاهش میزان پراکندگی زوج مرتب‌های $\left(\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}, \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \right)$ در فضای مجموع توزین شده خروجی‌ها و مجموع توزین شده ورودی‌ها می‌باشد. محدودیت سوم در مدل(۵) شرایط کارآیی DMU_p را حفظ می‌کند. در مدل (۵)، احتمال صفر شدن وزن‌ها وجود دارد. در مرحله سوم به منظور جلوگیری از صفر شدن وزن‌ها، کران پایین وزن‌های v_{ip} و u_{rp} را ماکزیمم می‌کنیم. فرض کنیم ρ^* مقدار بهینه مساله (۵) باشد. برای نیل به هدف، مساله زیر را حل می‌کنیم:

$$
\begin{aligned}
& Max \quad \phi \\
& s.t. \\
& \qquad \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ip} = 1, \\
& \qquad \rho^* \le \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \le 0, \\
& \qquad \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rp} = e_p^*, \\
& \qquad \phi \le u_{rp}, \quad \phi \le v_{ip}, \qquad for \;\; all \;\; i, r.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

فرض کنیم u_{rp}^*، $r=1$، ...، s ، v_{ip}^*، $i=1$،...، m جواب بهینه مدل (۶) باشد. اندازه برشی DMU_j را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$
e_j^{(p)} = \frac{\sum_{r=1}^{s} u_{rp} y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m} v_{ip} x_{ij}}, \quad p = 1, \cdots n, \quad j = 1, 2, \cdots, n. \tag{7}
$$

n^2 درایه $e_j^{(p)}$ ها ماتریس برشی مربعی $c = \left[e_j^{(p)} \right]$ را به صورت زیر تعریف می‌کند:

$$c=\begin{bmatrix} e_1^{(1)} & e_2^{(1)} & \cdots & e_n^{(1)} \\ e_1^{(2)} & e_2^{(2)} & \cdots & e_n^{(2)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e_1^{(n)} & e_2^{(n)} & \cdots & e_n^{(n)} \end{bmatrix}$$

میانگین هر ستون ماتریس فوق اندازه کارایی برشی هر واحد تصمیم‌گیری را به صورت زیر تعریف می‌کند:

$$\bar{e}_j=\frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n}e_j^{(p)} \qquad j=1,2,\cdots,n \tag{8}$$

برای جلوگیری از صفر شدن وزن‌ها، می‌توانیم مجموع وزن ها را با حفظ شرایط بهینگی بیشینه کنیم. برای این منظور مساله برنامه‌ریزی خطی زیر را حل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} Max \quad & \sum_{r=1}^{s}u_r+\sum_{i=1}^{m}v_i \\ s.t. \quad & \\ & \sum_{i=1}^{m}v_i x_{ip}=1, \\ & \rho^* \le \sum_{r=1}^{s}u_r y_{rj}-\sum_{i=1}^{m}v_i x_{ij} \le 0, \\ & \sum_{r=1}^{s}u_r y_{rp}=e_p^*, \\ & u_{rp}\ge 0, \quad v_{ip}\ge 0, \qquad for \ \ all \ \ i,r. \end{aligned} \tag{9}$$

۴ مثال عددی

برای توصیف فرآیند محاسباتی روش معرفی شده، آن را روی یک مجموعه از داده‌ها اجرا می‌کنیم؛ هجده واحد تصمیم‌گیری با دو ورودی و سه خروجی را در نظر می‌گیریم. داده‌های ورودی و خروجی در جدول (۱) خلاصه شده است.

جدول ۱. ورودی‌ها و خروجی‌های مثال اول

DMU	$x_۱$	$x_۲$	$y_۱$	$y_۲$	$y_۳$
۱	۲۸۷۴/۸	۱۹۷۳۸	۱۶۰/۸۹	۸۰۸۰۰	۵۰۹۲
۲	۹۴۶/۳	۶۹۱	۲۱/۱۴	۱۸۱۷۲	۶۵۶۳
۳	۶۸۵۴/۰	۴۳۰۲۴	۳۷۵/۲۵	۱۴۴۵۳۰	۲۴۳۷
۴	۲۳۰۵/۱	۱۰۸۱۵	۱۷۶/۶۸	۷۰۳۱۸	۳۱۴۵
۵	۲۳۰۵/۱	۲۰۹۹	۱۰۲/۱۲	۵۵۴۱۹	۱۲۲۵
۶	۱۰۱۰/۳	۷۵۷	۹۵/۱۷	۲۷۴۲۲	۲۴۶
۷	۲۸۲/۳	۱۱۶۹۰۰	۱۰۲۹/۰۹	۳۵۱۳۹۰	۱۴۶۰۴
۸	۱۷۴۷۸/۶	۲۰۲۴	۳۰/۰۷	۲۳۵۵۰	۱۱۲۶
۹	۶۶۱/۸	۳۲۱۸	۱۶۰/۵۸	۵۹۴۰۶	۲۲۳۰
۱۰	۱۵۴۴/۲	۵۷۴	۵۳/۶۹	۴۷۵۰۴	۴۳۰
۱۱	۴۲۸/۴	۲۹۸۴۲	۲۵۸/۰۹	۱۵۱۳۵۶	۴۶۴۹
۱۲	۶۹۷/۷	۳۳۹۴	۳۸/۰۲	۴۵۳۳۶	۱۵۵۵
۱۳	۱۰۶/۴	۳۶۷	۷/۰۷	۸۲۳۶	۱۲۱
۱۴	۴۵۳۹/۳	۴۵۸۰۹	۱۱۶/۶۴	۵۶۱۳۵	۹۵۶
۱۵	۹۵۷/۸	۱۶۹۴۷	۲۹/۲۰	۱۷۵۵۴	۲۳۱
۱۶	۱۲۰۹/۲	۱۵۷۴۱	۶۵/۳۶	۶۲۳۴۱	۶۱۸
۱۷	۹۷۲/۴	۲۳۸۲۲	۴۵/۵۲	۲۵۲۰۳	۵۱۳
۱۸	۲۱۹۲/۰	۱۰۹۴۳	۲۵/۲۴	۴۰۲۶۷	۸۹۵

با اجرای مدل(۴) مشخص شد سه واحد تصمیم‌گیری کارآ شدند. اندازه کارآیی واحدها در ستون دوم جدول (۲) گنجانده شده است. به کمک این مقادیر کارآیی و اجرای مدل(۵)، مقادیر بهینه ρ^*ها در ستون سوم جدول (۲) آمده است.

جدول ۲. میزان کارآیی واحدها و کران پایین تفاضل مجموع توزین شده ورودی‌ها و خروجی‌ها

DMU	e_p^*	ρ^*
۱	۰/۴۶۹۰	−۴/۲۱۵۷
۲	۱/۰۰۰۰	−۱۱/۸۸۰۷
۳	۰/۲۷۸۲	−۱/۶۴۲۹
۴	۰/۵۰۲۲	−۴/۸۸۱۶
۵	۰/۶۳۱۰	−۱۱/۹۹۹۵
۶	۱/۰۰۰۰	−۳۹/۷۶۸۴
۷	۰/۳۵۷۹	−۰/۶۴۲۱
۸	۰/۴۹۵۹	−۱۸/۳۱۸۳
۹	۰/۶۵۷۶	−۲۴/۱۴۹۳

DMU	e_p^*	ρ^*
۱۰	۱/۰۰۰۰	−۲۸/۳۰۷۱
۱۱	۰/۳۰۰۹	−۱/۹۴۶۵
۱۲	۰/۷۸۶۶	−۱۸/۵۰۷۶
۱۳	۰/۷۵۱۴	−۱۲۱/۳۶۱۳
۱۴	۰/۱۳۸۱	−۲/۶۷۰۲
۱۵	۰/۱۸۶۷	−۱۲/۶۵۱۷
۱۶	۰/۴۷۰۳	−۱۰/۶۷۸۰
۱۷	۰/۳۰۵۹	−۱۱/۵۵۴۰
۱۸	۰/۱۹۵۲	−۵/۸۹۰۸

در مرحله آخر برای یافتن وزن‌های بهینه، مدل (۶) را حل کرده؛ و با استفاده از این وزن ارزیابی برشی را محاسبه می‌کنیم و در نهایت رتبه‌بندی واحدها را انجام می‌دهیم. نتایج حاصل از این محاسبات در جدول (۳) آورده شده است.

جدول ۳. میزان ارزیابی برشی و رتبه‌بندی واحدها توسط اوزان حاصل از مدل (۸)

DMU	ارزیابی برشی	رتبه
۱	۰/۳۹۴۴	۱۰
۲	۰/۹۱۸۵	۲
۳	۰/۲۱۵۳	۱۵
۴	۰/۳۹۸۹	۹
۵	۰/۵۷۷۷	۶
۶	۰/۹۱۳۳	۳
۷	۰/۲۶۲۹	۱۲
۸	۰/۴۲۰۳	۸
۹	۰/۵۲۳۳	۷
۱۰	۰/۹۲۸۴	۱
۱۱	۰/۲۵۲۹	۱۳
۱۲	۰/۶۱۰۹	۴
۱۳	۰/۵۹۵۸	۵
۱۴	۰/۱۱۲۹	۱۸
۱۵	۰/۱۴۴۱	۱۷
۱۶	۰/۳۵۲۷	۱۱
۱۷	۰/۲۳۳۶	۱۴
۱۸	۰/۱۴۴۴	۱۶

برای به‌دست آوردن کارآیی ارزیابی برشی از طریق وزن های بهینه مدل(۹)، مجدداً مراحل فوق را با استفاده از این وزن‌ها محاسبه می‌کنیم. نتایج در جدول(۴) آورده شده است.

جدول ٤. میزان ارزیابی برشی و رتبه بندی واحد ها توسط اوزان حاصل از مدل (۹)

DMU	ارزیابی برشی	رتبه
۱	۰/۳۹۷۸	۱۰
۲	۰/۹۴۸۶	۱
۳	۰/۲۲۲۵	۱۵
۴	۰/۴۱۲۶	۹
۵	۰/۵۹۰۲	۶
۶	۰/۹۴۸۵	۲
۷	۰/۲۷۳۹	۱۲
۸	۰/۴۱۷۰	۸
۹	۰/۵۵۷۵	۷
۱۰	۰/۸۹۱۷	۳
۱۱	۰/۲۵۴۲	۱۴
۱۲	۰/۵۹۱۰	۴
۱۳	۰/۵۶۳۴	۵
۱۴	۰/۱۱۵۰	۱۸
۱۵	۰/۱۴۷۰	۱۶
۱۶	۰/۳۴۶۳	۱۱
۱۷	۰/۲۴۵۹	۱۳
۱۸	۰/۱۳۶۵	۱۷

٤ نتیجه گیری

در این مقاله با تعمیم روش‌های دویل و گرین (۱۹۹۴) و کوک و همکاران (۲۰۰۸)، از طریق معرفی یک تابع هدف ثانویه، به کارآیی برشی نهایی برای هر DMU دست پیدا کردیم. مدل‌های پیشنهادی به همراه توابع هدف مختلف‌شان، در شرایط مختلف به‌کار برده می‌شوند.

منابع

[1] Charnes, A., Cooper, W. W., Rhodes, E., (1978). Measuring the Efficiency of Decision Making Units. European Journal of Operational Research, 2, 429-4.

[2] Farrell, M. J., (1957). The Measurement of productive Efficiency. Jurnal of the Royal Statistical Societ, 120, 253-281.

[3] Sexton, T. R., Silkman, R. H., Hogan, A. J., (1986). Data envelopment analysis:critque and extention. In: Silkman, R.H. (Ed), Measuring Efficiency: An Assessment of Data Envelopment Analysis, vol. 32 Jossey-Bass, San Francisco,32, 73-105.

[4] Doyle, J., Green, R., (1994). Efficiency and cross efficiency in DEA: Derivations, meaning and the uses. Journal of the Operational Research Society, 45 (5), 567-578.

[5] Liang Liang, J. W., Wade, D. C., Joe, Z.., (2008). Alternative secondary goals in DEA cross efficiency evaluation. Int. J. Production Economics, 113 1025-1030.
[6] Anderson, T. R., Hollingsworth, K. B., Inman, L. B., (2002). The fixed weighting nature of cross-evalution model. Jouornal of Productivity Analysis, 18(1) , 249-255