

## روشی جدید برای حل مساله برنامه ریزی هندسی با پارامترهای فازی

سید هادی ناصری<sup>۱\*</sup>، زهرا علیزاده<sup>۲</sup>

۱- استادیار دانشگاه مازندران، دانشکده علوم ریاضی، گروه ریاضی، بابلسر، ایران

۲- دانشجوی دکتری تحقیق در عملیات، دانشگاه مازندران، گروه ریاضی، بابلسر، ایران

رسید مقاله: ۱۴ مرداد ۱۳۹۲

پذیرش مقاله: ۱۷ دی ۱۳۹۲

### چکیده

برنامه ریزی غیرخطی یکی از متداول ترین مدل ها در زمینه بهینه سازی است که در حل بسیاری از مسایل در دنیای واقعی کاربردهای فراوان دارد. از طرفی دیگر، در فرمول بندی مسایل کاربردی و مهندسی با نوعی خاص از مسایل بهینه سازی غیرخطی مواجه می شویم که تحت عنوان برنامه ریزی هندسی شناخته می شوند. در حقیقت، برنامه ریزی هندسی روشی است برای حل مسایل برنامه ریزی غیرخطی با قیود خطی یا غیر خطی. بسیاری از کاربردهای برنامه ریزی هندسی مسایل مهندسی هستند از این رو اغلب داده ها نادقیق اند. وقتی مقادیر پارامترها نادقیق باشند؛ مقداری که برای تابع هدف به دست می آید نیز نادقیق است. هدف این مقاله ارائه راه حلی برای حل مسایل برنامه ریزی هندسی با اعداد فازی مثلثی است.

**کلمات کلیدی:** برنامه ریزی هندسی، اعداد فازی، برنامه ریزی هندسی فازی،  $\alpha$  - برش، مدل سازی.

### ۱ مقدمه

برنامه ریزی هندسی روشی برای حل مسایل غیرخطی با محدودیت های غیر خطی ایجاد می کند که در آن پارامترها نمایی هستند. هدف اصلی برنامه ریزی هندسی حداقل ساختن تابع هدف مساله می باشد. بسیاری از کاربردهای برنامه ریزی هندسی طراحی دستگاه های صنعتی و پروژه های مدیریتی است. چویی و بریکر [۱] و پراسد [۲] کاربردهایی از برنامه ریزی هندسی را در طراحی مهندسی بیان نمودند. اسکات و جفرسون [۳] نیز کاربردهای دیگری از برنامه ریزی را در پروژه های مدیریتی مطرح کردند. چنگ [۴]، لی [۵]، روی و میتی [۶]، کیم و لی [۷]، جانگ و کلین [۸] و کائو و لیو [۹] دیگر کاربردهای برنامه ریزی هندسی را در مدیریت تحول بیان نمودند. چون اکثر کاربردهای این برنامه ریزی در مسایل مهندسی است بیشتر داده ها نادقیق هستند. برای این که بتوان از این اطلاعات نادقیق در مدل سازی استفاده کرد؛ بلمن و زاده [۱۰] و زاده [۱۱] نظریه فازی را

\*عهده دار مکاتبات

آدرس الکترونیکی: nasseri@umz.ac.ir

مطرح نمودند. نظریه فازی به طور گسترده‌ای در طراحی مدل‌های بهینه‌سازی کاربرد دارد. کوپر [۱۲] و کائو [۱۳] و لیو [۱۴] بسیاری از مسایل برنامه‌ریزی هندسی را که در آن پارامترها نادقیق‌اند به شکل بازه‌ها مورد بررسی قرار دادند. لیو [۱۵] روشی را برای محاسبه کران‌های مقادیر تابع هدف با پارامترهای بازه‌ای در برنامه‌ریزی هندسی مطرح کرد. هدف این مقاله ارائه روشی برای حل مسأله برنامه‌ریزی هندسی با پارامترهای فازی است. در بخش دوم، برنامه‌ریزی هندسی به طور مختصر معرفی شده؛ سپس در بخش سوم نحوه مدل‌سازی مسأله هندسی تشریح می‌شود. در بخش چهارم نیز روش حل جدیدی برای این گونه مسایل پیشنهاد و در بخش آخر مثالی جهت تشریح روش پیشنهاد شده آورده می‌شود و با استفاده از آن روش به حل مثال می‌پردازیم.

## ۲ معرفی برنامه‌ریزی هندسی

از مدل‌های کاربردی در برنامه‌ریزی ریاضی مرسوم به برنامه‌ریزی هندسی است که در حالت کلی به صورت زیر است [۱۶]:

$$Z = \text{Min}_x \sum_{t=1}^{s_t} c_t \prod_{j=1}^n x_j^{a_{tj}}$$

s.t.

$$\sum_{t=1}^{s_t} c_{it} \prod_{j=1}^n x_j^{\gamma_{ij}} \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$x_j > 0, \quad j = 1, \dots, n.$$
(۱)

که در آن  $i = 1, \dots, m$ ،  $b_i$  اعداد مثبت‌اند و توان‌ها اعداد حقیقی و پارامترها اعداد مثبت‌اند و مسایل در شکلی برنامه‌ریزی هندسی ممکن است مقید یا نامقید باشند. اگر در مدل فوق برای هر  $i$ ،  $b_i = 1$  آنگاه این مدل، مدل متعارف برنامه‌ریزی هندسی است؛ در غیر این صورت با اندکی تغییر می‌توان آن را به شکل اصلی مدل هندسی به صورت تبدیل نمود:

$$Z = \text{Min}_x \sum_{t=1}^{s_t} c_t \prod_{j=1}^n x_j^{a_{tj}}$$

s.t.

$$\sum_{t=1}^{s_t} \frac{c_{it}}{b_i} \prod_{j=1}^n x_j^{\gamma_{ij}} \leq 1, \quad i = 1, \dots, m$$

$$x_j > 0, \quad j = 1, \dots, n.$$
(۲)

## ۳ مدل‌سازی ریاضی

مسایلی که در دنیای واقعی اتفاق می‌افتند؛ اغلب دارای داده‌های دقیق نیستند و بنابراین باید راه‌حل‌هایی را ارائه کرد تا بتوان از مقادیر نادقیق در مدل‌ها استفاده نمود. در یک مدل هندسی ممکن است تمام پارامترها دقیق نباشند و به صورت اعداد فازی مطرح گردند. در این صورت مقدار تابع هدف نیز فازی به دست می‌آید و مدل هندسی

به صورت مدل هندسی فازی مطرح می شود. مدل (۲) را در حالتی که پارامترهای  $c_{0i}, c_{it}$  و  $b_i$  نادقیق باشند در نظر می گیریم و آن ها را به ترتیب به صورت مجموعه های فازی محدب  $\bar{B}_i, \bar{C}_{0i}, \bar{C}_{it}$  نشان می دهیم و توابع عضویت آن ها را به ترتیب  $\mu_{\bar{B}_i}, \mu_{\bar{C}_{0i}}, \mu_{\bar{C}_{it}}$  در نظر می گیریم. در این صورت:

$$\begin{aligned}\bar{B}_i &= \left\{ (b_i, \mu_{\bar{B}_i}(b_i)) \mid b_i \in S(\bar{B}_i) \right\} \\ \bar{C}_{0i} &= \left\{ (c_{0i}, \mu_{\bar{C}_{0i}}(c_{0i})) \mid c_{0i} \in S(\bar{C}_{0i}) \right\} \\ \bar{C}_{it} &= \left\{ (c_{it}, \mu_{\bar{C}_{it}}(c_{it})) \mid c_{it} \in S(\bar{C}_{it}) \right\}\end{aligned}$$

که در آن  $S(\bar{B}_i), S(\bar{C}_{0i}), S(\bar{C}_{it})$  تکیه گاه های  $\bar{B}_i, \bar{C}_{0i}, \bar{C}_{it}$  هستند. شکل فازی برنامه ریزی هندسی به صورت زیر نشان داده می شود:

$$\begin{aligned}\tilde{Z} &= \min_x \sum_{i=1}^{s_i} \bar{c}_{it} \prod_{j=1}^n x_j^{a_{ij}} \\ \text{s.t.} \\ \sum_{i=1}^{s_i} \frac{\bar{c}_{it}}{\bar{b}_i} \prod_{j=1}^n x_j^{\gamma_{ij}} &\leq 1, \quad i = 1, \dots, m \\ x_j &> 0, \quad j = 1, \dots, n.\end{aligned} \tag{۳}$$

حال هدف ما به دست آوردن تابع عضویت تابع هدف مساله است. از آنجا که مقدار تابع هدف  $\tilde{Z}$  عددی است فازی، بنابراین با استفاده از اصل توسعه زاده [۱۱] مساله را به مساله معمولی مدل هندسی تبدیل می کنیم. با استفاده از روندی که توسط ليو [۱۵] برای به دست آوردن  $\mu_{\tilde{Z}}$  داده شده است؛ کافی است کران پایین  $Z_\alpha^L$  و کران بالا  $Z_\alpha^U$  را در سطح خاص  $\alpha$  به دست آوریم.

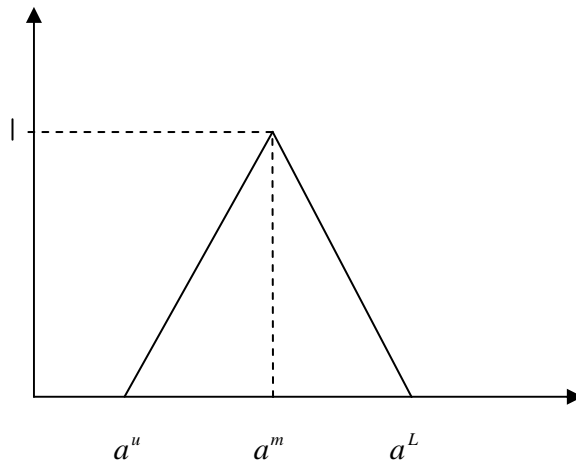
#### ۴ معرفی روش و مدل تحقیق

در این قسمت هدف تبدیل اعداد فازی به گونه ای است که بتوان آن ها را در مساله به کار برد. در این مقاله اعداد فازی را مثلی در نظر می گیریم که به صورت زیر نشان داده می شوند: (شکل ۱ را ببینید)

$$\tilde{a} = [a^L, a^m, a^u]$$

برای هر عدد فازی کران بالا و پایینی در نظر می گیریم:

$$a^L + \alpha(a^m - a^L) \leq \tilde{a} \leq a^u - \alpha(a^u - a^m) \tag{۴}$$



شکل ۱. نمایش عدد فازی مثلثی

با توجه به نوع مدل مساله (حداقل یا حداکثر)، از کران بالا یا پایین استفاده می‌نماییم. حال برای پارامترهای فازی مدل (۳) با استفاده از رابطه (۴) داریم:

$$M = \left\{ \begin{array}{l} (\widetilde{B}_i, \widetilde{C}_{ot}, \widetilde{C}_{it}) \mid B_i^L + \alpha(B_i^m - B_i^L) \leq \widetilde{B}_i \leq B_i^u - \alpha(B_i^u - B_i^m), \\ C_{ot}^L + \alpha(C_{ot}^m - C_{ot}^L) \leq \widetilde{C}_{ot} \leq C_{ot}^u - \alpha(C_{ot}^u - C_{ot}^m), \\ C_{it}^L + \alpha(C_{it}^m - C_{it}^L) \leq \widetilde{C}_{it} \leq C_{it}^u - \alpha(C_{it}^u - C_{it}^m) \\ \alpha \leq 1 \end{array} \right. \quad (5)$$

در نتیجه اعداد فازی مدل (۳) با به کارگیری رابطه (۴) غیر فازی می‌شوند و با استفاده از آن‌ها می‌توان مساله را به شکل معمولی مطرح و حل نمود.

#### ۴-۱ کران پایین

برای به دست آوردن کران پایین  $Z_\alpha^L$  باید مقادیر غیر فازی شده  $\widetilde{C}_{it}$ ،  $\widetilde{C}_{ot}$  و  $\widetilde{B}_i$  را به گونه‌ای در مدل (۳) قرار دهیم که تابع هدف مان را کمینه کند. داریم:

$$Z_\alpha^L = \text{Min} \{ Z(\widetilde{B}_i, \widetilde{C}_{ot}, \widetilde{C}_{it}) \mid (\widetilde{B}_i, \widetilde{C}_{ot}, \widetilde{C}_{it}) \in M \} \quad (6)$$

بنابراین برای به دست آوردن کران پایین باید مساله دو سطحی زیر را حل نماییم:

$$Z_{\alpha}^L = \underset{(\widetilde{B}_i, \widetilde{C}_{0t}, \widetilde{C}_{it}) \in M}{\text{Min}} \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } \widetilde{Z} = \sum_{t=1}^{s_0} \widetilde{C}_{0t} \prod_{j=1}^n x_j^{a_{0tj}} \\ \text{s.t.} \\ \sum_{t=1}^{s_i} \widetilde{C}_{it} \prod_{j=1}^n x_j^{\gamma_{ij}} \leq \widetilde{B}_i, \quad i = 1, \dots, m \\ x_j > 0, \quad j = 1, \dots, n. \end{array} \right. \quad (7)$$

باید مساله درونی را به شکل متعارف هندسی تبدیل نمود که عبارت است از:

$$Z_{\alpha}^L = \underset{(\widetilde{B}_i, \widetilde{C}_{0t}, \widetilde{C}_{it}) \in M}{\text{Min}} \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } \widetilde{Z} = \sum_{t=1}^{s_0} \widetilde{C}_{0t} \prod_{j=1}^n x_j^{a_{0tj}} \\ \text{s.t.} \\ \sum_{t=1}^{s_i} \frac{\widetilde{C}_{it}}{\widetilde{B}_i} \prod_{j=1}^n x_j^{\gamma_{ij}} \leq 1, \quad i = 1, \dots, m \\ x_j > 0, \quad j = 1, \dots, n. \end{array} \right. \quad (8)$$

چون هدف مساله بیرونی کمینه کردن مساله درونی است؛ بنابراین با اعمال  $(\widetilde{B}_i, \widetilde{C}_{0t}, \widetilde{C}_{it}) \in M$  مساله بیرونی را حذف می‌کنیم:

$$Z_{\alpha}^L = \text{Min} \sum_{t=1}^{s_0} (C_{0t}^L + \alpha(C_{0t}^m - C_{0t}^L)) \prod_{j=1}^n x_j^{a_{0tj}}$$

$$\text{s.t.} \left\{ \begin{array}{l} \sum_{t=1}^{s_i} \left( \frac{C_{it}^L + \alpha(C_{it}^m - C_{it}^L)}{B_i^u - \alpha(B_i^u - B_i^m)} \right) \prod_{j=1}^n x_j^{\gamma_{ij}} \leq 1, \quad i = 1, \dots, m \\ x_j > 0, \quad 0 \leq \alpha \leq 1, \quad j = 1, \dots, n \end{array} \right. \quad (9)$$

با حل عبارت فوق کران پایین  $\widetilde{Z}$  برای  $\alpha$ -برش‌های مختلف به دست می‌آید.

#### ۴-۲ کران بالا

برای به دست آوردن کران بالا  $Z_{\alpha}^U$  مقادیر غیر فازی شده  $(\widetilde{B}_i, \widetilde{C}_{0t}, \widetilde{C}_{it}) \in M$  را با توجه به هدف‌مان یعنی بیشینه نمودن تابع هدف انتخاب می‌کنیم. در این صورت داریم:

$$Z_{\alpha}^u = \text{Max} \left\{ Z(\widetilde{B}_i, \widetilde{C}_{ot}, \widetilde{C}_{it}) \mid (\widetilde{B}_i, \widetilde{C}_{ot}, \widetilde{C}_{it}) \in M \right\} \quad (10)$$

بنابراین همانند یافتن کران پایین ابتدا مساله درونی را به شکل متعارف هندسی تبدیل نموده؛ داریم:

$$Z_{\alpha}^u = \text{Max}_{(\widetilde{B}_i, \widetilde{C}_{ot}, \widetilde{C}_{it}) \in M} \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } \widetilde{Z} = \sum_{t=1}^{s_o} \widetilde{C}_{ot} \prod_{j=1}^n x_j^{a_{oj}} \\ \text{s.t.} \\ \sum_{t=1}^{s_i} \frac{\widetilde{C}_{it}}{\widetilde{B}_i} \prod_{j=1}^n x_j^{\gamma_{ij}} \leq 1, \quad i = 1, \dots, m \\ x_j > 0, \quad j = 1, \dots, n. \end{array} \right. \quad (11)$$

چون هدف مساله بیرونی بیشینه کردن مساله درونی است بنابراین با اعمال  $(\widetilde{B}_i, \widetilde{C}_{ot}, \widetilde{C}_{it}) \in M$  مساله بیرونی را حذف می کنیم:

$$Z_{\alpha}^u = \text{Min} \sum_{t=1}^{s_o} (C_{ot}^u - \alpha(C_{ot}^u - C_{ot}^m)) \prod_{j=1}^n x_j^{a_{oj}} \quad (12)$$

$$\text{s.t.} \left\{ \begin{array}{l} \sum_{t=1}^{s_i} \left( \frac{C_{ot}^u - \alpha(C_{ot}^u - C_{ot}^m)}{B_i^L + \alpha(B_i^m - B_i^L)} \right) \prod_{j=1}^n x_j^{\gamma_{ij}} \leq 1, \quad i = 1, \dots, m \\ x_j > 0, \quad 0 \leq \alpha \leq 1, \quad j = 1, \dots, n \end{array} \right.$$

با حل عبارت فوق کران بالا  $\widetilde{Z}$  برای  $\alpha$ -برش های مختلف به دست می آید.

## ۵ مثال عددی

در این بخش مثالی را که لیو در مقاله خود در [۱۵] مطرح نموده و بازه بهینه را به دست آورده مطرح و با استفاده از روش پیشنهادی آن را حل می نمایم و در نهایت جوابها را مقایسه کنیم.

### ۱.۵ مثال

طراحی یاتاقان گردی را در نظر بگیرید. برای یک وزن و سرعت داده شده نسبت خروج از مرکز و زاویه ایستار تعیین شده است. مهندسان هیچ تجربه ای برای طراحی نوع جدید یاتاقان ندارند؛ بنابراین برخی از پارامترها به طور تقریبی توسط مهندسان تخمین زده شده اند. فرض کنید  $x_1$  شعاع آزاد،  $x_2$  نیروی سیال،  $x_3$  قطر تکیه گاه

اصلی،  $x_4$  سرعت دوران یا تاقان و  $x_5$  نسبت طول به قطر باشد. مساله بالا را می توان به صورت زیر مدل سازی نمود:

$$\begin{aligned} \text{Min}_x \quad & 0.5x_1x_2x_3x_4x_5 + (1/1, 1/3)x_1^{-1}x_2^{-1}x_3^{-1} \\ \text{s.t.} \quad & (8/0, 8/4, 8/7)x_1x_2^{(-)}x_3^{(-)}x_4^{(-)}x_5 \leq (4/0, 4/1, 4/2), \\ & 0.5x_2x_3 + (0.9, 1/0, 1/1)x_1x_2^{-1}x_3^{-1} + (1/3, 1/6, 1/8)x_2x_3 \leq 1, \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 > 0. \end{aligned}$$

که در آن اعداد داخل پرانتز اعداد فازی مثلثی هستند. ابتدا با به کار بردن رابطه (۵) پارامترهای فازی مدل را غیر فازی می نماییم:

$$\begin{aligned} 4 + \alpha(4/1 - 4) &\leq \widetilde{B}_1 \leq 4/2 - \alpha(4/2 - 4/1), \\ 1 + \alpha(1/1 - 1) &\leq \widetilde{C}_{11} \leq 1/3 - \alpha(1/3 - 1/1), \\ 8 + \alpha(8/4 - 8) &\leq \widetilde{C}_{12} \leq 8/7 - \alpha(8/7 - 8/4), \\ 0.9 + \alpha(1/0 - 0.9) &\leq \widetilde{C}_{22} \leq 1/1 - \alpha(1/1 - 1/0), \\ 1/3 + \alpha(1/6 - 1/3) &\leq \widetilde{C}_{23} \leq 1/8 - \alpha(1/8 - 1/6). \end{aligned}$$

حال با استفاده از مدل های (۹) و (۱۲) به ترتیب کران پایین و کران بالای تابع هدف را برای  $\alpha$ -برش های مختلف محاسبه می کنیم.

$$\begin{aligned} Z_{\alpha}^L = \text{Min}_x \quad & 0.5x_1x_2x_3x_4x_5 + (1 + 0.1\alpha)x_1^{-1}x_2^{-1}x_3^{-1} \\ \text{s.t.} \quad & \frac{(8 + 0.4\alpha)}{(4/2 - 0.1\alpha)}x_1x_2^{-1}x_3^{-1}x_4^{-1}x_5 \leq 1, \\ & 0.5x_2x_3 + (0.9 + 0.1\alpha)x_1x_2^{-1}x_3^{-1} + (1/3 + 0.3\alpha)x_2x_3 \leq 1, \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 > 0, \quad 0 \leq \alpha \leq 1. \end{aligned}$$

و برای محاسبه کران بالا داریم:

$$\begin{aligned} Z_{\alpha}^u = \text{Min}_x \quad & 0.5x_1x_2x_3x_4x_5 + (1/3 - 0.2\alpha)x_1^{-1}x_2^{-1}x_3^{-1} \\ \text{s.t.} \quad & \frac{(8/7 - 0.3\alpha)}{(4 + 0.1\alpha)}x_1x_2^{-1}x_3^{-1}x_4^{-1}x_5 \leq 1, \\ & 0.5x_2x_3 + (1/1 - 0.1\alpha)x_1x_2^{-1}x_3^{-1} + (1/8 - 0.2\alpha)x_2x_3 \leq 1, \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 > 0, \quad 0 \leq \alpha \leq 1. \end{aligned}$$

کران بالا و پایین تابع هدف برای مقادیر مختلف  $0 \leq \alpha \leq 1$  محاسبه شده‌اند. جدول (۱) مقادیر کران بالا و پایین تابع هدف را برای ۱۱ مقدار  $\alpha$  مختلف نشان می‌دهد.

جدول ۱. مقادیر کران بالا و کران پایین برای  $\alpha$ -برش‌های مختلف در روش پیشنهادی

$\alpha$	۰/۰	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵	۰/۶	۰/۷	۰/۸	۰/۹	۱/۰
$Z_{\alpha}^u$	۴/۳۱۳	۴/۲۳۷	۴/۱۶۰	۴/۰۸۴	۴/۰۰۸	۳/۹۳۳	۳/۸۵۸	۳/۷۸۳	۳/۷۰۸	۳/۶۳۴	۳/۵۶۱
$Z_{\alpha}^L$	۳/۰۴۴	۳/۰۹۵	۳/۱۴۶	۳/۱۹۷	۳/۲۴۹	۳/۳۰۰	۳/۳۵۲	۳/۴۰۴	۳/۴۵۶	۳/۵۰۸	۳/۵۶۱

از مقایسه نتایج روش ليو [۱۵] (جدول ۲) با روش پیشنهادی در این مقاله مشاهده می‌شود که از هر دو روش جواب‌های تقریباً یکسانی حاصل شده است. اگرچه هر دو روش جواب‌های تقریباً یکسانی دارند اما در روش پیشنهادی بدون دوگان‌گیری از مساله هندسی می‌توان به جواب مطلوب رسید و بنابراین با رویه‌ای ساده‌تر مقدار بهینه تابع هدف به دست آمده است.

جدول ۲. مقادیر کران بالا و کران پایین برای  $\alpha$ -برش‌های مختلف در روش ليو [۴]

$\alpha$	۰/۰	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵	۰/۶	۰/۷	۰/۸	۰/۹	۱/۰
$Z_{\alpha}^u$	۴/۳۱۴	۴/۲۳۷	۴/۱۶۱	۴/۰۸۵	۴/۰۰۹	۳/۹۳۳	۳/۸۵۸	۳/۷۸۳	۳/۷۰۹	۳/۶۳۵	۳/۵۶۱
$Z_{\alpha}^L$	۳/۰۴۵	۳/۰۹۶	۳/۱۴۷	۳/۱۹۸	۳/۲۴۹	۳/۳۰۱	۳/۳۵۳	۳/۴۰۴	۳/۴۵۶	۳/۵۰۹	۳/۵۶۱

## ۶ نتیجه‌گیری

همان‌طور که خاطر نشان شد؛ مساله برنامه‌ریزی هندسی روشی قدرتمند برای حل مسایل بهینه‌سازی غیرخطی است که اخیراً مدل‌سازی آن در محیط‌های فازی مورد توجه خاص قرار گرفته است [۹ و ۱۷]. در این مقاله بر اساس روش پیشنهاد شده برای حل مسایل برنامه‌ریزی هندسی با پارامترهای فازی در ضرایب هزینه، ضرایب قیود و اعداد سمت راست و نتایج عددی حاصل از به کارگیری این روش و روش ارایه شده در [۱۵] که برای حل این‌گونه مسایل پیشنهاد گردیده بود کارآمدی رویه پیشنهاد شده نمایان شد. در حقیقت نتایج عددی، موید این مطلب بود هر دو روش جواب‌های تقریباً یکسانی را ارایه می‌دهند اما با روش جدید می‌توان بدون دوگان‌گیری از مساله برنامه‌ریزی هندسی آن را حل نمود و مقدار تابع هدف را برای  $\alpha$ -برش‌های مختلف به دست آورد و این رویکرد از لحاظ محاسباتی بسیار حایز اهمیت است. با استفاده از توانایی این روش نویسندگان درصددند چنین مسایلی را برای اعداد فازی دوزنقه‌ای و نیز برای مسایل با توان‌های فازی مطالعه نمایند.



## منابع

- [1] Choi, J. C., Bricker, D. L., (1996). Effectiveness of a Geometric Programming Algorithm for Optimization of Machining Economics Models, *Computers and Operations Research*, 10, 957-961.
- [2] Prasad, A. V. S. R. K., Rao, P. N., Rao, U. R. K., (1997). Optimal Selection of Process Parameters for Turning Operations in a CAPP System, *International Journal of Production Research*, 35, 1495-1522.
- [3] Scott, C. H., Jefferson, T. R., (1995). Allocation of Resources in Project Management, *International Journal of Systems Science*, 26, 413-420.
- [4] Cheng, T., (1991). An Economic Order Quantity Model with Demand Dependent Unit Production Cost and Imperfect Production Process, *IIE Transactions*, 23, 23-28.
- [5] Lee, W., (1993). Determining Order Quantity and Selling Price by Geometric Programming: Optimal Solution and Sensitivity, *Decision Science*, 24, 76-87.
- [6] Roy, K., Maiti, M., (1997). A Fuzzy EOQ Model with Demand-dependent Unit Cost Under Limited Storage Capacity, *European Journal of Operational Research*, 99, 425-432.
- [7] Kim, D., Lee, W., (1998). Optimal Joint Pricing and Lot Sizing with Fixed and Variable Capacity, *European Journal of Operational Research*, 109, 212-227.
- [8] Jung, H., Klein, C., (2001) Optimal Inventory Policies under Decreasing Cost Functions via Geometric Programming, *European Journal of Operational Research*, 132, 628-642.
- [9] Kao, C., Liu, T., (2004). Predicting Bank Performance with Financial Forecasts: A Case of Taiwan Commercial Banks, *Journal of Banking and Finance*, 28, 2353-2368.
- [10] Bellman, R. E., Zadeh, L. A., (1970). Decision-making in a Fuzzy Environment, *Management Science*, 17, B141-B164.
- [11] Zadeh, L. A., (1978). Fuzzy Sets as a Basis for a Theory of Possibility, *Fuzzy Sets and Systems*, 1, 3-28.
- [12] Cooper, W., Park, S., Yu, G., (2001). An Illustrative Application of IDEA (Imprecise Data Envelopment Analysis) to a Korean Mobile Telecommunication Company, *Operations Research*, 49, 807-820.
- [13] Cao, B. Y., (2012). *Optimal Models and Methods with Fuzzy Quantities*, Studies in Fuzziness and Soft Computing, Springer-Verlag Berlin.
- [14] Liu, S., (2006) .Posynomial Geometric Programming with Parametric Uncertainty, *European Journal of Operational Research*, 168, 345-353.
- [15] Liu, S. T., (2007). Geometric programming with Fuzzy Parameters in Engineering Optimization, *International Journal of Approximate Reasoning*, 46, 484-498.
- [16] Rao, Singiresu S., (2009). *Engineering Optimization: Theory and Practice*, John Wiley and Sons, Inc. Fourth Edition.
- [17] Nasser, S. H., Alizadeh, Z., Taleshian, F., (2012). Optimized Solution of Pressure Vessel Design using Geometric Programming, *The Journal of Mathematics and Computer Science*, 4(3) 344-349.