مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، سال یازدهم، شماره اول (پیاپی ۴۰)، بهار ۹۳، ص ص ۱۱۷-۱۰۵
شاپا ۷۲۸۶-۲۲۵۱

تلفیق شاخص کارایی فارل با رویکرد تابع هزینه و شاخص ورودی محور فارل

رضا کاظمی متین*[1]، صدیقه‌السادات نجفی[2]
۱- دانشیار گروه ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد کرج
۲- کارشناس ارشد، گروه ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد کرج

رسید مقاله: ۱۲ شهریور ۱۳۹۲
پذیرش مقاله: ۹ بهمن ۱۳۹۲

چکیده
در این مقاله تلفیق شاخص کارایی فارل را مورد ارزیابی قرار می‌دهیم و با توجه به این حقیقت که کمینه هزینه صنعتی با مجموع کمینه هزینه‌های واحدها برابر است؛ شرایطی برای تلفیق کارایی فارل می‌یابیم. از این تساوی برای محاسبه اندازه کارایی (تکنیکی یا کلی) صنعتی از اندازه کارایی (تکنیکی یا کلی) واحدها استفاده می‌کنیم.

کلمات کلیدی: کارایی هزینه، واحد تصمیم گیرنده، تلفیق، کارایی تکنیکی، کارایی تخصیصی

۱ مقدمه
تعیین کارایی و عملکرد واحدها از دیرباز مورد توجه مدیران بوده است. در صنعت نیز که از مجموع چند واحد و از تلفیق آن‌ها تشکیل شده و آن را می‌توان به صورت یک واحد تصمیم‌گیرنده (DMUs) جدید در نظر گرفت؛ ارزیابی کارایی و بررسی عملکرد آن همواره مورد توجه بوده است. لذا دستیابی به شرایطی که تحت آن‌ها تلفیق شاخص‌های کارایی واحدها امکان‌پذیر باشد و به‌توان در نهایت کارایی صنعت را با توجه به کارایی واحدها ارزیابی نمود؛ مطلوب است. فارل [۱] برای معرفی کارایی ساختاری یک صنعت، کارایی تکنیکی یک صنعت نسبت به سطح تراز کارایی داده شده را میانگین وزنی کارایی تکنیکی واحدها نسبت به سطح تراز یکسان واحدهای تشکیل دهنده صنعت، تعریف کرد.

تفسیر و رویکردهای متفاوتی برای ارزیابی کارایی صنعتی در مقاله‌ها به چشم می‌خورد. فار و زلنیوک [۲] با استفاده از برابری بیشینه درآمد صنعتی را با مجموع بیشینه درآمدهای واحدها، اندازه کارایی صنعتی برحسب اندازه کارایی واحدها ارزیابی کردند.

* عهده‌دار مکاتبات
آدرس الکترونیکی: rkmatin@kiau.ac.ir

در این مقاله، این شیوه را با رویکرد تابع هزینه و شاخص ورودی محور فارل به کار می‌بریم. ثابت می‌شود که کمینه هزینه صنعتی با مجموع کمینه هزینه‌های واحدها برابر است. نتیجه این که کارایی تکنیکی صنعتی، یک تعمیم چند ورودی از کارایی ساختاری فارل برای یک صنعت می‌باشد. در بخش ۲ بردار ورودی و خروجی واحدها و صنعت همچنین تکنولوژی واحدها و صنعت معرفی می‌شود. در بخش ۳ کارایی هزینه واحدها و کارایی هزینه صنعت تعریف می‌گردد. در بخش ۴ برای پی‌بردن به رابطه کارایی هزینه واحدها و کارایی هزینه صنعتی، ابتدا نشان می‌دهیم کمینه هزینه صنعتی مجموع کمینه هزینه واحدهاست. با استفاده از آن نتیجه می‌شود که کارایی هزینه صنعتی، میانگین سهم وزنی از کارایی‌های هزینه واحدهاست. در بخش ۵ کارایی تکنیکی صنعت بر حسب کارایی تکنیکی واحدها ارزیابی می‌شود. در بخش ۶ کارایی هزینه صنعتی را به مؤلفه‌های کارایی تکنیکی صنعتی و کارایی تخصیصی صنعتی تجزیه می‌کنیم. بخش ۷ شامل مثال عددی و بخش ۸ نیز نتیجه‌گیری را ارایه می‌دهد.

۲ برخی تعاریف و نمادگذاری‌ها

تکنولوژی هر واحد را با مجموعه ورودی‌اش معرفی می‌کنیم:

$$L^k\left(\boldsymbol{y}^k\right)=\left\{\boldsymbol{x}^k : \text{را تولید کند } \boldsymbol{y}^k \text{ می‌تواند } \boldsymbol{x}^k\right\},\quad \boldsymbol{y}^k\in\mathbb{R}_+^{\mathrm{M}} \tag{۱}$$

در این بیان، $\boldsymbol{x}^k=\left(x_{k1},\dots,x_{kN}\right)\in\mathbb{R}_+^{\mathrm{N}}$ بردار ورودی واحد kام و $\boldsymbol{y}^k=\left(y_{k1},\dots,y_{kN}\right)\in\mathbb{R}_+^{\mathrm{M}}$ بردار خروجی واحد kام است و $k=1,\dots,K$. ($k>1$، اگر $k=1$ باشد صنعت شامل یک واحد است و هیچ تلفیقی صورت نمی‌گیرد.)

بر این اساس تکنولوژی صنعت به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathsf{L}\left(\boldsymbol{y}^1,\dots,\boldsymbol{y}^K\right)=\sum_{k=1}^{K}L^k\left(\boldsymbol{y}^k\right) \tag{۲}$$

در این بیان مجموع به صورت برآیند تکنولوژی‌هاست و هیچ تخصیص مجددی از خروجی‌ها بین واحدها صورت نمی‌گیرد. تکنولوژی صنعت تمام ویژگی‌های تکنولوژی واحدهای مختلف را داراست.

۳ کارایی هزینه

$\boldsymbol{w}=\left(w_1,\dots,w_{\mathrm{N}}\right)\in\mathbb{R}_+^{\mathrm{N}}$ بردار هزینه ورودی است با این فرض که برای همه واحدها یکسان است؛ در این صورت هزینه واحد، $\boldsymbol{w}\boldsymbol{x}^k$ و هزینه صنعتی برابر با $\boldsymbol{w}\sum_{k=1}^{K}\boldsymbol{x}^k$ می‌باشد. برای تعریف تابع هزینه صنعت و دستیابی به یک تئوری تلفیق ابتدا کمینه هزینه هر واحد و کارایی هزینه را تعریف می‌کنیم.

کمینه هزینه هر واحد به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$C^k\left(y^k, w\right) = Min_x \left\{wx : x \in L^k\left(y^k\right)\right\} \tag{۳}$$

کارایی هزینه هر واحد به صورت نسبتی از کمینه هزینه واحد $C^k\left(y^K, w\right)$ به هزینه مشاهده شده wx^k است. یعنی:

$$\frac{C^k\left(y^k, w\right)}{wx^k} \tag{۴}$$

کمینه هزینه صنعتی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathrm{C}\left(y^1, \ldots, y^K, w\right) = Min_x \left\{wx : x \in \mathrm{L}\left(y^1, \ldots, y^K\right)\right\} \tag{۵}$$

کارایی هزینه صنعتی به صورت نسبتی از کمینه هزینه صنعتی به هزینه مشاهده شده صنعتی بیان می‌شود. یعنی:

$$\frac{\mathrm{C}\left(y^1, \ldots, y^K, w\right)}{w\sum_{k=1}^{K} x^k}$$

٤ رابطه کارایی هزینه واحدها و کارایی هزینه صنعتی

برای پی‌بردن به رابطه کارایی هزینه واحدها و کارایی هزینه صنعتی، ابتدا نشان می‌دهیم کمینه هزینه صنعتی مجموع کمینه هزینه واحدها ست.

قضیه ۱: کمینه هزینه صنعتی مجموع کمینه هزینه واحدهاست. یعنی:

$$\mathrm{C}\left(y^1, \ldots, y^K, w\right) = \sum_{k=1}^{K} C^k\left(y^k, w\right)$$

اثبات: اگر $x \in L^k\left(y^k\right)$ باشد؛ آنگاه $\sum_{k=1}^{K} x^k \in \mathrm{L}\left(y^1, \ldots, y^K\right)$. از آن‌جایی $\mathrm{C}\left(y^1, \ldots, y^K, w\right)$ نشان دهنده کمینه هزینه صنعتی است:

$$\mathrm{C}\left(y^1, \ldots, y^K, w\right) \geq w\sum_{k=1}^{K} x^k = \sum_{k=1}^{K} wx^k$$

حال از آن‌جایی که x^k $(k = 1, \ldots, K)$ دلخواه است. داریم:

$$\mathrm{C}\left(y^1, \ldots, y^K, w\right) \geq \sum_{k=1}^{K} C^k\left(y^k, w\right) \tag{۶}$$

برعکس: اگر $x \in \mathrm{L}\left(y^1, \ldots, y^K\right)$ دلخواه باشد $x^k \in L^k\left(y^k\right)$ وجود دارد به طوری $x = \sum_{k=1}^{K} x^k$، بنابراین با توجه به اینکه $C^k\left(y^k, w\right)$ کمینه هزینه واحد k است داریم:

$$wx = w\sum_{k=1}^{K} x^{k} = \sum_{k=1}^{K} wx^{k} \le \sum_{k=1}^{K} C^{k}\left(y^{k}, w\right)$$

$$\Rightarrow \forall x \in \mathrm{L}\left(y^{1},\dots,y^{K}\right) \qquad , wx \le \sum_{k=1}^{K} C^{k}\left(y^{K}, w\right)$$

x دلخواه است و با توجه به تعریف $\mathrm{C}\left(y^{1},\dots,y^{K},w\right) = Min_{x}\left\{wx : x \in \mathrm{L}\left(y^{1},\dots,y^{K}\right)\right\}$ داریم:

$$\mathrm{C}\left(y^{1},\dots,y^{K},w\right) \le \sum_{k=1}^{K} C^{k}\left(y^{k}, w\right) \tag{۷}$$

از دو معادله(۶) و (۷) داریم:

$$\mathrm{C}\left(y^{1},\dots,y^{K},w\right) \le \sum_{k=1}^{K} C^{k}\left(y^{k}, w\right) \le \mathrm{C}\left(y^{1},\dots,y^{K},w\right)$$

بنابراین

$$\mathrm{C}\left(y^{1},\dots,y^{K},w\right) = \sum_{k=1}^{K} C^{k}\left(y^{k}, w\right)$$

□

با استفاده از $\mathrm{C}\left(y^{1},\dots,y^{K},w\right) = \sum_{k=1}^{K} C^{k}\left(y^{K}, w\right)$ نتیجه می‌شود که کارایی هزینه صنعتی، میانگین سهم وزنی از کارایی‌های هزینه واحدهاست. یعنی:

$$\frac{\mathrm{C}\left(y^{1},\dots,y^{K},w\right)}{w\sum_{k=1}^{K} x^{k}} = \sum_{k=1}^{K} \frac{C^{k}\left(y^{k}, w\right)}{wx^{k}} \times S^{k} \tag{۸}$$

که سهم‌ها به صورت $S^{k} = \frac{wx^{k}}{w\sum_{k=1}^{K} x^{k}}$ تعریف می‌شود. برای نشان دادن این موضوع، روابط زیر را در نظر بگیرید:

$$\mathrm{C}\left(y^{1},\dots,y^{K},w\right) = \sum_{k=1}^{K} C^{k}\left(y^{k}, w\right)$$

در تساوی بالا $C^{k}\left(y^{k}, w\right)$ را در $\frac{wx^{k}}{wx^{k}}$ ضرب می کنیم.

$$\mathrm{C}\left(y^{1},\dots,y^{K},w\right) = \sum_{k=1}^{K} \frac{C^{k}\left(y^{K}, w\right)}{wx^{k}} \times wx^{k}$$

طرفین تساوی را بر تقسیم $w\sum_{k=1}^{K} x^{k}$ می کنیم:

$$\frac{\mathrm{C}\left(y^{1},\dots,y^{K},w\right)}{w\sum_{k=1}^{K} x^{k}} = \sum_{k=1}^{K} \frac{C^{k}\left(y^{k}, w\right)}{wx^{k}} \times \frac{wx^{k}}{w\sum_{k=1}^{K} x^{k}}$$

در نتیجه

$$\frac{\mathsf{C}\left(\boldsymbol{y}^{1},\ldots,\boldsymbol{y}^{K},\boldsymbol{w}\right)}{\boldsymbol{w}\sum_{k=1}^{K}\boldsymbol{x}^{k}}=\sum_{k=1}^{K}\frac{C^{k}\left(\boldsymbol{y}^{k},\boldsymbol{w}\right)}{\boldsymbol{w}\boldsymbol{x}^{k}}\times S^{k}$$

بلک‌اربی و راسل [٣] اصول موضوعه‌ای برای تعیین تلفیق معرفی کردند که بر اساس نمادگذاری این مقاله به صورت زیر قابل بیان است:

$$\frac{\mathsf{C}\left(\boldsymbol{y}^{1},\ldots,\boldsymbol{y}^{K},\boldsymbol{w}\right)}{\boldsymbol{w}\sum_{k=1}^{K}\boldsymbol{x}^{k}}=1\Leftrightarrow\frac{C^{k}\left(\boldsymbol{y}^{k},\boldsymbol{w}\right)}{\boldsymbol{w}\boldsymbol{x}^{k}}=1$$

یعنی صنعت کاراست اگر و تنها اگر هر واحد کارا باشد.

توجه داریم که اندازه‌های کاراییِ‌های $\frac{C^{k}\left(\boldsymbol{y}^{k},\boldsymbol{w}\right)}{\boldsymbol{w}\boldsymbol{x}^{k}}$ و $\frac{\mathsf{C}\left(\boldsymbol{y}^{1},\ldots,\boldsymbol{y}^{K},\boldsymbol{w}\right)}{\boldsymbol{w}\sum_{k=1}^{K}\boldsymbol{x}^{k}}$ کوچک‌تر یا مساوی ١ هستند؛ زیرا در تعریف هر کدام صورت کسر کمینه هزینه است که از هزینه مشاهده شده کم‌تر است. همچنین طبق نامساوی ماهلر:

$$\begin{cases}\dfrac{C^{k}\left(\boldsymbol{y}^{k},\boldsymbol{w}\right)}{\boldsymbol{w}\boldsymbol{x}^{k}}\le\dfrac{1}{D_{i}^{k}\left(\boldsymbol{y}^{K},\boldsymbol{x}^{k}\right)}\\[2ex]\dfrac{\mathsf{C}\left(\boldsymbol{y}^{1},\ldots,\boldsymbol{y}^{K},\boldsymbol{w}\right)}{\boldsymbol{w}\sum_{k=1}^{K}\boldsymbol{x}^{k}}\le\dfrac{1}{\mathsf{D}_{i}\left(\boldsymbol{y}^{1},\ldots,\boldsymbol{y}^{K},\boldsymbol{x}\right)}\end{cases}$$

برای همه $\left(\boldsymbol{x}^{k},\boldsymbol{y}^{K}\right)$ شدنی داریم $1\le\frac{1}{D_{i}^{k}\left(\boldsymbol{y}^{k},\boldsymbol{x}^{k}\right)}$ و $1\le\frac{1}{\mathsf{D}_{i}\left(\boldsymbol{y}^{1},\ldots,\boldsymbol{y}^{K},\boldsymbol{x}\right)}$ بنابراین نتیجه می‌شود:

$$\frac{\mathsf{C}\left(\boldsymbol{y}^{1},\ldots,\boldsymbol{y}^{K},\boldsymbol{w}\right)}{\boldsymbol{w}\sum_{k=1}^{K}\boldsymbol{x}^{k}}\le1 \quad \text{و} \quad \frac{C^{k}\left(\boldsymbol{y}^{k},\boldsymbol{w}\right)}{\boldsymbol{w}\boldsymbol{x}^{k}}\le1$$

در این صورت تساوی (٨) مطابق اصول موضوعه تعیین تلفیق است؛ بنابراین می‌توان تساوی (٨) را به عنوان شاخص تلفیق با رویکرد تابع هزینه در نظر گرفت.

٥ ارزیابی کارایی تکنیکی صنعت بر حسب کارایی تکنیکی واحدها

برای معرفی اندازه تکنیکی کارایی واحدها، توابع فاصله‌ای ورودی محور روی $L^{k}\left(\boldsymbol{y}^{k}\right)$، $k=1,\ldots,K$ و روی $\mathsf{L}\left(\boldsymbol{y}^{1},\ldots,\boldsymbol{y}^{K}\right)$ را تعریف می‌کنیم.

$$D_{\mathrm{i}}^{k}\left(\boldsymbol{y}^{k},\boldsymbol{x}^{k}\right)=\sup\left\{\lambda^{k}:\left(\boldsymbol{x}^{k}/\lambda^{k}\right)\in L^{k}\left(\boldsymbol{y}^{k}\right)\right\} \tag{9}$$

$$\mathsf{D}_{\mathrm{i}}\left(\boldsymbol{y}^{1},\ldots,\boldsymbol{y}^{K},\boldsymbol{x}\right)=\sup\left\{\lambda:\left(\boldsymbol{x}/\lambda\right)\in \mathsf{L}\left(\boldsymbol{y}^{1},\ldots,\boldsymbol{y}^{K}\right)\right\} \tag{10}$$

کارایی تکنیکی صنعتی ورودی محور سهم- وزنی را به صورت زیر تعریف نمودیم:

$$\mathrm{TE}=\sum_{k=1}^{K}\frac{1}{D_{\mathrm{i}}^{k}\left(\boldsymbol{y}^{k},\boldsymbol{x}^{k}\right)}\times S^{k} \tag{11}$$

TE یک اندازه کامل برای کارایی تکنیکی نیست؛ زیرا شامل اطلاعات قیمت است و تابعی فقط بر حسب ورودی‌ها و خروجی‌ها نمی‌باشد. اگر اصل موضوع تعیین تلفیق کارایی تکنیکی به لک اربی و راسل [۳] را بیان کنیم خواهیم داشت:

$$\mathrm{TE}=1\Leftrightarrow\frac{1}{D_{\mathrm{i}}^{k}\left(\boldsymbol{y}^{k},\boldsymbol{x}^{k}\right)}=1 \qquad \forall k=1,\ldots,K$$

آنگاه واضح است که اندازه $\mathrm{TE}=\sum_{k=1}^{K}\frac{1}{D_{\mathrm{i}}^{k}\left(\boldsymbol{y}^{k},\boldsymbol{x}^{k}\right)}\times S^{k}$ در شرط فوق صدق می‌کند؛ زیرا:

برای هر ورودی مشاهده شده $\boldsymbol{x}^{k}\in L^{k}\left(\boldsymbol{y}^{k}\right)$ داریم: $\frac{1}{D_{\mathrm{i}}^{k}\left(\boldsymbol{y}^{k},\boldsymbol{x}^{k}\right)}\leq 1$

حال فرض کنیم $\frac{1}{D_{\mathrm{i}}^{k}\left(\boldsymbol{y}^{k},\boldsymbol{x}^{k}\right)}=1$. با ضرب طرفین رابطه در $\frac{\boldsymbol{w}\boldsymbol{x}^{k}}{\boldsymbol{w}\sum_{k=1}^{K}\boldsymbol{x}^{k}}$ خواهیم داشت:

$$\frac{1}{D_{\mathrm{i}}^{k}\left(\boldsymbol{y}^{k},\boldsymbol{x}^{k}\right)}\times\frac{\boldsymbol{w}\boldsymbol{x}^{k}}{\boldsymbol{w}\sum_{k=1}^{K}\boldsymbol{x}^{k}}=\frac{\boldsymbol{w}\boldsymbol{x}^{k}}{\boldsymbol{w}\sum_{k=1}^{K}\boldsymbol{x}^{k}}$$

و با جمع بندی:

$$\sum_{k=1}^{K}\frac{1}{D_{\mathrm{i}}^{k}\left(\boldsymbol{y}^{k},\boldsymbol{x}^{k}\right)}\times\frac{\boldsymbol{w}\boldsymbol{x}^{k}}{\boldsymbol{w}\sum_{k=1}^{K}\boldsymbol{x}^{k}}=\sum_{k=1}^{K}\frac{\boldsymbol{w}\boldsymbol{x}^{k}}{\boldsymbol{w}\sum_{k=1}^{K}\boldsymbol{x}^{k}}$$

بنابراین:

$$\mathrm{TE}=\frac{\sum_{k=1}^{K}\boldsymbol{w}\boldsymbol{x}^{k}}{\boldsymbol{w}\sum_{k=1}^{K}\boldsymbol{x}^{k}}=\frac{\boldsymbol{w}\sum_{k=1}^{K}\boldsymbol{x}^{k}}{\boldsymbol{w}\sum_{k=1}^{K}\boldsymbol{x}^{k}}=1$$

به عکس، فرض کنیم TE=۱، به جای ۱ در تساوی فوق رابطه $\frac{\boldsymbol{w}\sum_{k=1}^{K}\boldsymbol{x}^{k}}{\boldsymbol{w}\sum_{k=1}^{K}\boldsymbol{x}^{k}}$ را جای‌گزین می‌کنیم. در این صورت خواهیم داشت: $\mathrm{TE}=\frac{\boldsymbol{w}\sum_{k=1}^{K}\boldsymbol{x}^{k}}{\boldsymbol{w}\sum_{k=1}^{K}\boldsymbol{x}^{k}}=\frac{\sum_{k=1}^{K}\boldsymbol{w}\boldsymbol{x}^{k}}{\boldsymbol{w}\sum_{k=1}^{K}\boldsymbol{x}^{k}}=\sum_{k=1}^{K}\frac{\boldsymbol{w}\boldsymbol{x}^{k}}{\boldsymbol{w}\sum_{k=1}^{K}\boldsymbol{x}^{k}}$ بنابراین $\sum_{k=1}^{K}\frac{\boldsymbol{w}\boldsymbol{x}^{k}}{\boldsymbol{w}\sum_{k=1}^{K}\boldsymbol{x}^{k}}=\sum_{k=1}^{K}\frac{1}{D_{\mathrm{i}}^{k}\left(\boldsymbol{y}^{k},\boldsymbol{x}^{k}\right)}\times\frac{\boldsymbol{w}\boldsymbol{x}^{k}}{\boldsymbol{w}\sum_{k=1}^{K}\boldsymbol{x}^{k}}$. از طرفین تساوی عبارت $\frac{1}{\boldsymbol{w}\sum_{k=1}^{K}\boldsymbol{x}^{k}}$ را فاکتور می‌گیریم: $\frac{1}{\boldsymbol{w}\sum_{k=1}^{K}\boldsymbol{x}^{k}}\left(\sum_{k=1}^{K}\boldsymbol{w}\boldsymbol{x}^{k}\right)=\frac{1}{\boldsymbol{w}\sum_{k=1}^{K}\boldsymbol{x}^{k}}\left(\sum_{k=1}^{K}\frac{\boldsymbol{w}\boldsymbol{x}^{k}}{D_{\mathrm{i}}^{k}\left(\boldsymbol{y}^{k},\boldsymbol{x}^{k}\right)}\right)$. در نتیجه $\left(\sum_{k=1}^{K}\boldsymbol{w}\boldsymbol{x}^{k}\right)=\left(\sum_{k=1}^{K}\frac{\boldsymbol{w}\boldsymbol{x}^{k}}{D_{\mathrm{i}}^{k}\left(\boldsymbol{y}^{k},\boldsymbol{x}^{k}\right)}\right)$ و از آن‌جایی که $\frac{1}{D_{\mathrm{i}}^{j}\left(\boldsymbol{y}^{k},\boldsymbol{x}^{k}\right)}>1$، به ازای هر $k=1,\ldots,K$ خواهیم داشت: $\frac{1}{D_{\mathrm{i}}^{k}\left(\boldsymbol{y}^{k},\boldsymbol{x}^{k}\right)}=1$. □

برای مقایسه دو اندازه کارایی تکنیکی، $\mathrm{TE}=\sum_{k=1}^{K}\frac{1}{D_{\mathrm{i}}^{k}\left(\boldsymbol{y}^{k},\boldsymbol{x}^{k}\right)}\times S^{k}$ و معکوس $\mathsf{D}_{\mathrm{i}}\left(\boldsymbol{y}^{1},\ldots,\boldsymbol{y}^{K},\boldsymbol{x}\right)$ توجه کنید که در تک ورودی، آن‌ها معادل اندازه کارایی هزینه صنعتی‌اند و صریحاً آنچه را که فارل کارایی ساختاری صنعتی نامید، ارایه می‌کنند. یعنی:

$$\mathrm{TE}=\sum_{k=1}^{K}\frac{1}{D_{\mathrm{i}}^{k}\left(\boldsymbol{y}^{k},\boldsymbol{x}^{k}\right)}\times S^{k}=\frac{1}{\mathsf{D}_{\mathrm{i}}\left(\boldsymbol{y}^{1},\ldots,\boldsymbol{y}^{K},\boldsymbol{x}\right)}$$

نشان می‌دهیم این تساوی، در حالت کلی برای مورد چند ورودی برقرار نیست. برای بررسی این موضوع، ابتدا توجه کنید $\sum_{k=1}^{K}\frac{\boldsymbol{x}^{k}}{D_{\mathrm{i}}^{k}\left(\boldsymbol{y}^{k},\boldsymbol{x}^{k}\right)}$ به تکنولوژی صنعتی $\mathsf{L}\left(\boldsymbol{y}^{1},\ldots,\boldsymbol{y}^{K}\right)$ تعلق دارد و اگر ورودی‌ها دسترسی پذیر آزاد داشته باشند آنگاه $\sum_{k=1}^{K}\frac{\boldsymbol{x}^{k}}{D_{\mathrm{i}}^{\mathrm{M}}}$ که $D_{\mathrm{i}}^{\mathrm{M}}=Min_{k}\left\{D_{\mathrm{i}}^{k}\left(\boldsymbol{y}^{k},\boldsymbol{x}^{k}\right)\right\}$ نیز متعلق به $\mathsf{L}\left(\boldsymbol{y}^{1},\ldots,\boldsymbol{y}^{K}\right)$ است؛ زیرا:

$$\frac{\boldsymbol{x}^{k}}{D_{\mathrm{i}}^{k}\left(\boldsymbol{y}^{k},\boldsymbol{x}^{k}\right)}\in L^{k}\left(\boldsymbol{y}^{k}\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{K} \frac{\boldsymbol{x}^k}{D_i^k\left(\boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{x}^k\right)} \in \sum_{k=1}^{K} L^k\left(\boldsymbol{y}^k\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{K} \frac{\boldsymbol{x}^k}{D_i^k\left(\boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{x}^k\right)} \in \mathsf{L}\left(\boldsymbol{y}^1,\ldots,\boldsymbol{y}^K\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{K} \frac{\boldsymbol{x}^k}{D_i^M} \in \mathsf{L}\left(\boldsymbol{y}^1,\ldots,\boldsymbol{y}^K\right)$$

بنابراین نتیجه می گیریم:

$$\mathsf{D}_i\left(\boldsymbol{y}^1,\ldots,\boldsymbol{y}^K, \boldsymbol{x}\right) \geq D_i^M \tag{۱۲}$$

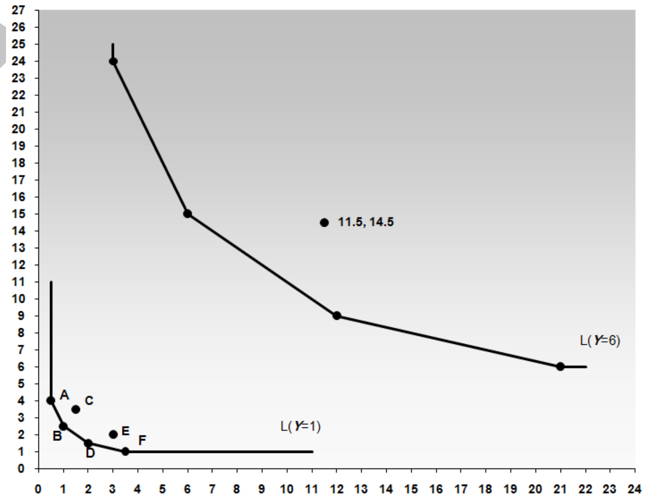
یعنی نمره کارایی تکنیکی صنعتی $\frac{1}{\mathsf{D}_i\left(\boldsymbol{y}^1,\ldots,\boldsymbol{y}^K, \boldsymbol{x}\right)}$ حداکثر به بزرگی $\frac{1}{D_i^M}$ است و ناکارایی صنعت حداکثر برابر با کم‌ترین ناکارایی واحدها.

در ادامه با یک مثال نشان می‌دهیم که نامعادله زیر می‌تواند به فرم اکید برقرار باشد؛ یعنی:

$$\frac{1}{D_i^M} > \frac{1}{\mathsf{D}_i\left(\boldsymbol{y}^1,\ldots,\boldsymbol{y}^K, \boldsymbol{x}\right)} \tag{۱۳}$$

$$\mathrm{TE} > \frac{1}{\mathsf{D}_i\left(\boldsymbol{y}^1,\ldots,\boldsymbol{y}^K, \boldsymbol{x}\right)} \tag{۱۴}$$

بر اساس (۱۳) کمینه نمره کارایی واحدها می‌تواند بزرگ‌تر از نمره کارایی صنعت باشد. عبارت (۱۴) نشان می‌دهد که TE نمره کارایی تکنیکی صنعتی ورودی محور سهم - وزنی ممکن است بزرگ‌تر از $\frac{1}{\mathsf{D}_i\left(\boldsymbol{y}^1,\ldots,\boldsymbol{y}^K, \boldsymbol{x}\right)}$، اندازه کارایی تکنیکی فارل ورودی محور صنعتی باشد. شکل (۱) این موارد را توضیح می‌دهد.



شکل ۱. کارایی تکنیکی صنعت و واحدها

بردارهای ورودی $A=(۰/۵,۴)$، $B=(۱,۲/۵)$، $C=(۱/۵,۳/۵)$، $D=(۲,۱/۵)$، $E=(۳,۲)$ و $F=(۳/۵,۱)$ متعلق به مجموعه ورودی $L(y=۱)$ اند. نقاط A, B, D, F کارا هستند؛ بنابراین $D_{\mathrm{i}}^{A}=۱, D_{\mathrm{i}}^{B}=۱, D_{\mathrm{i}}^{D}=۱, D_{\mathrm{i}}^{F}=۱$ و $D_{\mathrm{i}}^{C}=\frac{۱۰}{۷}, D_{\mathrm{i}}^{E}=\frac{۲۵}{۱۶}$.

اگر قیمت‌های ورودی $w=(۱,۰/۱)$ باشد؛ آنگاه داریم:

$$S^{A}=\frac{\boldsymbol{w}\boldsymbol{x}^{A}}{\boldsymbol{w}\sum_{k=۱}^{۶}\boldsymbol{x}^{k}}=\frac{(۱,۰/۱)(۰/۵,۴)}{(۱,۰/۱)(۱۱/۵,۱۴/۵)}=۰/۰۶۹۴۹$$

$$S^{B}=\frac{\boldsymbol{w}\boldsymbol{x}^{B}}{\boldsymbol{w}\sum_{k=۱}^{۶}\boldsymbol{x}^{k}}=\frac{(۱,۰/۱)(۱,۲/۵)}{(۱,۰/۱)(۱۱/۵,۱۴/۵)}=۰/۰۹۶۵۲$$

$$S^{C}=\frac{\boldsymbol{w}\boldsymbol{x}^{C}}{\boldsymbol{w}\sum_{k=۱}^{۶}\boldsymbol{x}^{k}}=\frac{(۱,۰/۱)(۱/۵,۳/۵)}{(۱,۰/۱)(۱۱/۵,۱۴/۵)}=۰/۱۴۲۸۵$$

$$S^{D}=\frac{\boldsymbol{w}\boldsymbol{x}^{D}}{\boldsymbol{w}\sum_{k=۱}^{۶}\boldsymbol{x}^{k}}=\frac{(۱,۰/۱)(۲,۱/۵)}{(۱,۰/۱)(۱۱/۵,۱۴/۵)}=۰/۱۶۶۰۲$$

$$S^{E}=\frac{\boldsymbol{w}\boldsymbol{x}^{E}}{\boldsymbol{w}\sum_{k=۱}^{۶}\boldsymbol{x}^{k}}=\frac{(۱,۰/۱)(۳,۲)}{(۱,۰/۱)(۱۱/۵,۱۴/۵)}=۰/۲۴۷۱۰$$

$$S^{F}=\frac{\boldsymbol{w}\boldsymbol{x}^{F}}{\boldsymbol{w}\sum_{k=۱}^{۶}\boldsymbol{x}^{k}}=\frac{(۱,۰/۱)(۳/۵,۱)}{(۱,۰/۱)(۱۱/۵,۱۴/۵)}=۰/۲۷۷۹۹$$

$$\mathrm{TE}=\sum_{k=۱}^{۶}\frac{۱}{D_{\mathrm{i}}^{k}(\boldsymbol{y}^{k},\boldsymbol{x}^{k})}\times S^{k}=\frac{۱}{D_{\mathrm{i}}^{A}(\boldsymbol{y}^{k},\boldsymbol{x}^{k})}\times S^{A}+\ldots+\frac{۱}{D_{\mathrm{i}}^{F}(\boldsymbol{y}^{k},\boldsymbol{x}^{k})}\times S^{F}$$

$$=۱\times ۰/۰۶۹۴۹+\ldots+۱\times ۰/۲۷۷۹۹=۰/۸۸۸۴۹$$

$$\frac{۱}{\mathrm{D}_{\mathrm{i}}(\boldsymbol{y}^{۱},\ldots,\boldsymbol{y}^{K},\boldsymbol{x})}=۰/۸۰۷۶۹$$

مشاهده می‌شود که $\mathrm{TE}>\frac{۱}{\mathrm{D}_{\mathrm{i}}(\boldsymbol{y}^{۱},\ldots,\boldsymbol{y}^{K},\boldsymbol{x})}$.

بردار ورودی صنعت $\sum_{\mathrm{i}=۱}^{۶}DMU_{\mathrm{i}}=(۱۱/۵,۱۴/۵)$ متعلق به مجموعه ورودی $L(y=۶)$ است و یک نقطه درونی، پس برابری TE و معکوس $\mathrm{D}_{\mathrm{i}}(\boldsymbol{y}^{۱},\ldots,\boldsymbol{y}^{K},\boldsymbol{x})$ در حالت کلی برای مورد چند ورودی نمی‌تواند برقرار باشد.

۶ تجزیه کارایی هزینه صنعتی به مؤلفه‌های کارایی تکنیکی صنعتی و کارایی تخصیصی صنعتی

حال کارایی هزینه صنعتی را به مؤلفه‌های کارایی تکنیکی صنعتی و کارایی تخصیصی صنعتی تجزیه می کنیم. با تبعیت از لی و انجی [۴] اندازه تلفیق کارایی تخصیصی را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$\mathrm{AE}=\sum_{k=1}^{K}\mathrm{AE}^{k}\ .\hat{S}^{k} \tag{۱۵}$$

$$\mathrm{AE}^{k}=D_{\mathrm{i}}^{k}\left(\boldsymbol{y}^{k},\boldsymbol{x}^{k}\right)\frac{C^{k}\left(\boldsymbol{y}^{k},\boldsymbol{w}\right)}{\boldsymbol{w}\boldsymbol{x}^{k}} \tag{۱۶}$$

و وزن‌ها عبارت‌اند از:

$$\hat{S}^{k}=\frac{\boldsymbol{w}\left(\dfrac{\boldsymbol{x}^{k}}{D_{\mathrm{i}}^{k}\left(\boldsymbol{y}^{k},\boldsymbol{x}^{k}\right)}\right)}{\boldsymbol{w}\sum\limits_{k=1}^{K}\left(\dfrac{\boldsymbol{x}^{k}}{D_{\mathrm{i}}^{k}\left(\boldsymbol{y}^{k},\boldsymbol{x}^{k}\right)}\right)} \tag{۱۷}$$

حال این نتیجه حاصل می‌شود که تلفیق کارایی هزینه می‌تواند به تلفیق کارایی تخصیصی AE و تلفیق کارایی تکنیکی TE به صورت زیر تجزیه شود:

$$\frac{\mathsf{C}\left(\boldsymbol{y}^{1},\ldots,\boldsymbol{y}^{K},\boldsymbol{w}\right)}{\boldsymbol{w}\sum\limits_{k=1}^{K}\boldsymbol{x}^{k}}=\mathrm{AE}\times\mathrm{TE} \tag{۱۸}$$

زیرا:

$$\mathrm{AE}\times\mathrm{TE}=\sum_{k=1}^{K}D_{\mathrm{i}}^{k}\left(\boldsymbol{y}^{k},\boldsymbol{x}^{k}\right)\frac{C^{k}\left(\boldsymbol{y}^{k},\boldsymbol{w}\right)}{\boldsymbol{w}\boldsymbol{x}^{k}}\times\frac{\boldsymbol{w}\left(\dfrac{\boldsymbol{x}^{k}}{D_{\mathrm{i}}^{k}\left(\boldsymbol{y}^{k},\boldsymbol{x}^{k}\right)}\right)}{\boldsymbol{w}\sum\limits_{k=1}^{K}\left(\dfrac{\boldsymbol{x}^{k}}{D_{\mathrm{i}}^{k}\left(\boldsymbol{y}^{k},\boldsymbol{x}^{k}\right)}\right)}\times\sum_{k=1}^{K}\frac{1}{D_{\mathrm{i}}^{k}\left(\boldsymbol{y}^{k},\boldsymbol{x}^{k}\right)}\times S^{k}$$

$$=\sum_{k=1}^{K}\frac{C^{k}\left(\boldsymbol{y}^{k},\boldsymbol{w}\right)}{\boldsymbol{w}\boldsymbol{x}^{k}}\times S^{k}=\frac{\mathsf{C}\left(\boldsymbol{y}^{1},\ldots,\boldsymbol{y}^{K},\boldsymbol{w}\right)}{\boldsymbol{w}\sum\limits_{k=1}^{K}\boldsymbol{x}^{k}}$$

اشاره می‌کنیم که در بالا سهم‌های S^{k} استفاده شده در تعریف اندازه کارایی تکنیکی صنعتی ورودی محور وابسته به قیمت هستند اما در مورد تک ورودی مستقل از قیمت‌ها می‌باشد.

زیرا در حالت تک ورودی داریم:

$$S^{k}=\frac{\boldsymbol{w}\boldsymbol{x}^{k}}{\boldsymbol{w}\sum\limits_{k=1}^{K}\boldsymbol{x}^{k}}=\frac{\boldsymbol{x}^{k}}{\sum\limits_{k=1}^{K}\boldsymbol{x}^{k}}\qquad k=1,\ldots,K \tag{۱۹}$$

اگر بخواهیم سهم- وزن‌های مستقل از قیمت را برای مورد چند ورودی ایجاد کنیم؛ از کرنز [۵] پیروی می‌کنیم و قیمت‌ها را به صورت $n=1,\ldots,N$ $\quad w_n=\dfrac{1}{\sum_{k=1}^{K}x^k}$ در نظر می گیریم. بر این اساس خواهیم داشت:

$$w^k=\frac{1}{N}\left(\frac{x_{k1}}{\sum_{k=1}^{K}x_{k1}}+\frac{x_{k2}}{\sum_{k=1}^{K}x_{k2}}+\ldots+\frac{x_{kN}}{\sum_{k=1}^{K}x_{kN}}\right) \tag{20}$$

یا $k=1,\ldots,K$ $\quad w^k=\dfrac{1}{N}\left(\sum_{n=1}^{N}\dfrac{x_{kn}}{\sum_{k=1}^{K}x_{kn}}\right)$. در نتیجه وزن‌های مستقل از قیمت برای هر واحد به صورت $\frac{1}{N}$ جمعی از سهم هر ورودی به مجموع ورودی‌های آن واحد خواهند بود. (N که تعداد ورودی‌های هر واحد می‌باشد) همچنین وزن‌ها نامنفی و مجموع‌شان برابر ۱ است. به طور مشابه، وزن‌های مستقل قیمت برای تلفیقی از کارایی‌های تخصیصی واحدها به صورت زیر است:

$$\hat{w}^k=\frac{1}{N}\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{x_{kn}\Big/D_{\mathrm{i}}^k\left(y^k,x^k\right)}{\sum_{k=1}^{K}x_{kn}\Big/D_{\mathrm{i}}^k\left(y^k,x^k\right)}\right) \tag{21}$$

در مثال این وزن‌ها را با سهم- وزن‌های وابسته به قیمت مقایسه می‌کنیم.

۷ مثال عددی

در این بخش با یک مثال عددی نشان می‌دهیم که ممکن است کارایی صنعتی، با استفاده از کارایی‌های واحدها محاسبه شود. فرض می‌کنیم ۶ واحد، هر کدام با مصرف دو ورودی $\left(x_1,x_2\right)$ خروجی $y=1$ تولید می‌کنند. قیمت‌های ورودی $w_1=0/1$ و $w_2=1$ می‌باشد. برای محاسبه کارایی هزینه $\dfrac{C^k\left(y^k,w\right)}{wx^k}$، ابتدا $C^k\left(y^k,w\right)$ را برای هر واحد با استفاده از برنامه نرم افزار بهینه‌سازی لینگو محاسبه کرده؛ سپس آن را بر wx^k، هزینه مشاهده k ام تقسیم می‌کنیم.

با استفاده از تساوی (۸) کارایی هزینه صنعتی $\frac{C\left(y^{1},...,y^{K},w\right)}{w\sum_{k=1}^{K}x^{k}}$ را محاسبه می‌نماییم. همچنین مولفه‌های کارایی تخصیصی و تکنیکی واحدها یعنی AE^{k} و $\frac{1}{D_{i}^{k}\left(y^{k},x^{k}\right)}$ را برای هر واحد محاسبه کرده سپس با توجه به $\hat{S}^{k}$ ، $AE=\sum_{k=1}^{6}AE^{k}$ و $TE=\sum_{k=1}^{6}\frac{1}{D_{i}^{k}\left(y^{k},x^{k}\right)}\times S^{k}$ به ترتیب کارایی تخصیصی صنعتی وکارایی تکنیکی صنعتی را محاسبه می‌کنیم. به عنون نمونه نحوه محاسبه این موارد را برای واحد **۱** نشان می‌دهیم:

کارایی هزینه واحد **۱**: $\frac{C^{1}\left(y^{1},w\right)}{wx^{1}}=\frac{0/9}{(1,0/1)(0/5,4)}$

کارایی تکنیکی واحد **۱**: $\frac{1}{D_{i}^{1}\left(y^{1},x^{1}\right)}=\frac{1}{1}=1$

کارایی تخصیصی واحد **۱**: $AE^{1}=D_{i}^{1}\left(y^{1},x^{1}\right)\frac{C^{1}\left(y^{1},w\right)}{wx^{1}}=1\times1=1$

چهار مجموعه از وزن‌ها را به صورت وزن‌های وابسته به قیمت یعنی S^{k} ، $\hat{S}^{k}$ و وزن‌های مستقل قیمت w^{k} ، $\hat{w}^{k}$ معرفی می‌کنیم که نحوه محاسبه آن‌ها در مقاله ذکر شده است.

کارایی هزینه صنعتی:

$$\frac{C\left(y^{1},...,y^{K},w\right)}{w\sum_{k=1}^{K}x^{k}}=\sum_{k=1}^{K}\frac{C^{k}\left(y^{k},w\right)}{wx^{k}}\times S^{k}=1\times0/0694+...+\frac{0}{25}\times0/2777992=0/416979$$

کارایی تکنیکی صنعتی:

$$TE=\sum_{k=1}^{K}\frac{1}{D_{i}^{k}\left(y^{k},x^{k}\right)}\times S^{k}=1\times0/0694+...+1\times0/277992=0/888438$$

کارایی تخصیصی صنعتی:

$$AE=\sum_{k=1}^{K}AE^{k}\ .\hat{S}^{k}=1\times0/077282+...+0/25\times0/309130\text{۸}=0/50145$$

جدول ۱. یک مثال فرضی: کاراییهای تخصیصی و تکنیکی هزینه برای صنعت و واحدها

واحدها	x_1^k	x_2^k	y^k	کارایی هزینه	کارایی تکنیکی	کارایی تخصیصی	S^k	$\hat{S}^k$	w^k	$\hat{w}^k$
۱	۰/۵	۴	۱	۱/۰۰۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰۰۰	۰/۰۶۹۴۹	۰/۰۷۷۲۸۲	۰/۱۵۹۶۷۰	۰/۱۷۹۵۷۵
۲	۱	۲/۵	۱	۰/۷۲۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰۰۰	۰/۷۲۰۰۰۰	۰/۰۹۶۵۲۵	۰/۱۰۷۳۳۷۰	۰/۱۲۹۶۸۵	۰/۱۴۵۸۸۰۶
۳	۱/۵	۳/۵	۱	۰/۴۸۶۴۸۶	۰/۷۰۰۰۰۰	۰/۶۹۴۹۸۰	۰/۱۴۲۸۵۷	۰/۱۱۱۲۰۱	۰/۱۸۵۹۰۷	۰/۲۰۹۱۲۶۸
۴	۲	۱/۵	۱	۰/۴۱۸۶۰۴	۱/۰۰۰۰۰۰	۰/۴۱۸۶۰۴	۰/۱۶۶۰۲۳	۰/۱۸۴۶۱۹	۰/۱۳۸۶۰۸	۰/۱۵۶۰۴۳۸
۵	۳	۲	۱	۰/۲۸۱۲۵۰	۰/۷۲۲۲۲۲	۰/۳۸۹۴۲۳	۰/۲۴۷۱۰۴	۰/۳۱۰۰۸۴	۰/۱۹۹۴۰۰	۰/۲۲۴۳۷۱۶
۶	۳/۵	۱	۱	۰/۲۵۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰۰۰	۰/۲۵۰۰۰۰	۰/۲۷۷۹۹۲	۰/۳۰۹۱۳۰۸	۰/۱۴۳۱۷۸۴	۰/۲۱۰۰۶۴۸
میانگین حسابی غیروزنی				۰/۵۲۶۰۵۶	۰/۹۰۳۷۰۴	۰/۵۷۸۸۳۴				
کارایی صنعتی				۰/۴۱۶۹۷۹	۰/۸۸۸۴۹۳	۰/۵۰۷۱۴۵				
کارایی صنعتی با وزنهای مستقل قیمت				۰/۴۹۳۴۱۲	۰/۸۴۵۳۶۰	۰/۵۰۷۱۶۵				

۸ نتیجه‌گیری

در این مقاله به تلفیق شاخص کارایی فارل پرداختیم. با اثبات این‌که کمینه هزینه صنعتی برابر است با مجموع کمینه هزینه واحدها، کارایی صنعتی را با توجه به کارایی تکنیکی واحدها محاسبه کردیم. نشان داده شد که در حالت تک ورودی، کارایی تکنیکی TE با معکوس $D_i\left(y^1,\dots,y^K, x\right)$ برابر است ولی در حالت چند ورودی این تساوی می تواند برقرار نباشد. سپس کارایی هزینه صنعتی را به مؤلفه‌های کارایی تکنیکی صنعتی و کارایی تخصیصی صنعتی تجزیه نمودیم. نتیجه شد که تلفیق کارایی هزینه می‌تواند به تلفیق کارایی تخصیصی AE و تلفیق کارایی تکنیکی TE تجزیه شود. همچنین با توجه به این‌که وزن‌های هر واحد یعنی S^k ،$\hat{S}^k$ که برای محاسبه کارایی تکنیکی صنعتی TE و کارایی تخصیصی صنعتی AE وابسته به قیمت‌هااند؛ وزن‌های مستقل از قیمت w^k ،$\hat{w}^k$ را ایجاد کردیم. سپس با استفاده از یک مثال عددی وزن‌های وابسته به قیمت هر واحد یعنی S^k ،$\hat{S}^k$ را با وزن‌های های مستقل از قیمت $\hat{w}^k$ و w^k مقایسه نمودیم.

منابع

[1] Farrell, M. J., (1957). The measurement of productive efficiency. Journal of Royal Statistical Society, Series A, General 120 (part 3), 253–281.

[2] Färe, R., Zelenyuk, V., (2003). On aggregation Farrell efficiencies. European Journal of Operational Research, 146, 615-620.

[3] Blackorby, C., Russell, R. R., (1999). Aggregation of efficiency indices. Journal of Productivity Analysis 12(1), 5–20.

[4] Li, S. K., Ng, Y. C., (1995). Measuring the productive efficiency a group of firms. International Advances in Economic Research 1 (4), 377–390.

[5] Cornes, R., (1992). Duality and Modern Economics. Cambridge University Press, Cambridge.