مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، سال دوازدهم، شماره سوم (پیاپی ٤٦)، پاییز ٩٤، ص ص ١١٣-١٠١
شاپا ٧٢٨٦-٢٢٥١

یک روش بر مبنای تکنیک تحلیل پوششی داده‌ها با منابع محدود برای اولویت‌سازی پروژه

علی جهانتیغی *[1]**، زهره مقدس** [2]**، محسن واعظ قاسمی** [3]
۱- استادیار، دانشگاه آزاد اسلامی واحد زاهدان، گروه ریاضی، زاهدان، ایران
۲- استادیار ، دانشگاه آزاد اسلامی واحد قزوین ، گروه ریاضی، قزوین، ایران
۳ – استادیار، دانشگاه آزاد اسلامی واحد رشت، گروه ریاضی، رشت، ایران

رسید مقاله: ۲۲ فروردین ۱۳۹۴
پذیرش مقاله: ۱۵ شهریور ۱۳۹۴

چکیده
در شرایط اندازه‌گیری عملکرد، یک زیر گروه از راه‌حل‌های جایگزین از جانب یک سری انتخاب‌ها در یک محیط با منابع محدود مفید می‌باشد. این مطلب ضروری می باشد زیرا هرگاه ورودی و خروجی‌های چند گانه حضور دارند، ساختار مدل DEA فرصت انتخاب را بر اساس بهینه سازی تجمعی مرتبط با ورودی تجمعی فراهم می‌کند. در این مقاله، ۲ مثال در مورد الزامات منابع محدود بررسی خواهد شد. در واقع ارزیابی و انتخاب در یک مدل معین به‌وسیله فضاسازی برای مدل تحلیل پوششی داده‌ها در یک چارچوب برنامه ریزی خطی قرار می‌گیرد.

کلمات کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها، منبع محدود، اولویت سازی.

۱ مقدمه

دراین مقاله روشی معرفی می‌شود که کاربرد مورد نظر مربوط به تصمیم‌سازی (تصمیم گیری چند معیاری) چند معیاری است که آن شامل انتخاب از یک گروه چند پیشنهادی و مربوط به زیر گروهی از پروژه‌هااست. پروژه‌های شخصی(انفرادی) باید منافعی را تحت زمان خاص به‌دست آورد. که این امر برای معرفی زیر گروهی از پروژه‌ها مناسب می‌باشد. نمونه‌ای که برای تمامی منابع در دسترس توجیه‌پذیر می‌باشد. مشکل اولویت‌دهی، در چند دهه گذشته مورد توجه قرار گرفته‌است. روش ما در ارتباط با روش‌های موجود در ادبیات موضوع است. در مقالات موجود یک ارزیابی جمعی چندمرحله‌ای پیچیده و مدل انتخاب معرفی شده‌است. روش ما مشتمل بر ارزیابی و انتخاب در یک مرحله معین است و به روش DEA-CCR پایبند است زیرا از پیچیدگی کمتری برخوردار است. در این مقاله به ارایه دو مثال خواهیم پرداخت. اولین مورد شامل انتخاب از یک گروه مربوط به پروژه‌ها است، یک زیر گروهی که باید به‌کار گرفته شود. هر پروژه باید طبق استفاده از منابع ورودی چندگانه،

* عهده‌دار مکاتبات
آدرس الکترونیکی: mohamadjahantighi@yahoo.com

طراحی می‌گردد و ضمنا یک گروه از خروجی‌ها را تولید کند. در این روش هر زیرگروه پروژه‌هایی را به‌کار می‌گیرد که می‌تواند از محدودیت‌های منابع به عنوان یک آیتم (پروژه کامپوزیت) انتخاب کند. این پروژه‌های کامپوزیتی به وسیله تحلیل پوششی داده‌ها ارزیابی می‌شوند. در واقع ارزیابی و انتخاب در یک مدل معین به‌وسیله فضاسازی برای مدل تحلیل پوششی داده‌ها در یک چارچوب برنامه ریزی خطی قرار می‌گیرد. روش دوم شامل انتخاب یک گروه از بهترین سایت‌ها برای تسهیلات خرده معین است. لذا مدل مربوط به انتخاب‌ها تعیین یک منبع محدود است.

چنگ و لی [۲] برمبنای تکنیک تحلیل پوششی داده‌ها و تئوری فازی مدلی برای انتخاب پروژه در زمینه انتخاب پرتفوی با در نظر گرفتن منبع محدود معرفی کرده‌اند. مالکی و همکاران [۳] در مقاله‌ای برای انتخاب پروژه با در نظر گرفتن برنامه ریزی خطی فازی مدلی معرفی کرده‌اند. چیانچی و همکاران [۴] در مقاله‌ای با ذکر این مطلب که روش‌های انتخاب پروژه موجود در ادبیات موضوع قادر به در نظر گرفتن عدم قطعیت و اثر متقابل نبودند. لازم به ذکر است که برخی از روش‌های موجود عدم قطعیت را بدون در نظر گرفتن و اثر متقابل لحاظ کرده‌اند. در این مقاله نویسندگان با در نظر گرفتن متغیرهای فازی این عدم قطعیت را لحاظ کرده‌اند.

در بخش بعد به معرفی مفاهیم و مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها خواهیم پرداخت. در ادامه اولویت‌سازی پروژه بر مبنای تکنیک DEA با منابع محدود را معرفی و سپس نتیجه گیری ارایه می‌شود.

۲ مقدمه تحلیل پوششی داده‌ها

واحد تصمیم‌گیرنده، عبارت است از واحدی که با دریافت بردار ورودی مانند $(x_1,...,x_m)$، بردار خروجی $(y_1,\ldots,y_s)$ را تولید می‌کند. منظور از واحدهای تصمیم‌گیرنده متجانس این است که واحدها عمل مشابه دارند و با دریافت ورودی‌های با جنس مشابه، خروجی‌های با جنس مشابه تولید می‌کنند. مانند شعبات یک بانک، کارخانجات یک شرکت خاص یا ادارات یک سازمان دولتی. از مثال‌های مهم کاربرد تحلیل پوششی داده‌ها می‌توان به بررسی پیشرفت و پسرفت واحدهای تصمیم گیرنده اشاره کرد، جهانتیغی و همکاران [۱].

کارایی به معنای خوب کار کردن، تحت تأثیر شاخص‌های درون سازمانی مثل سود هر واحد، فروش هر واحد و از این قبیل قرار دارد، که به‌صورت نسبت خروجی به ورودی بیان می‌شود(ورودی/ خروجی = کارایی).

کارایی مطلق یک DMU، مقایسه عملکرد آن با استانداردهای کلی و کارایی نسبی، سنجش عملکرد یک DMU، نسبت به واحدهای دیگر آن مجموعه است.

در صورت وجود چند ورودی و چند خروجی برای واحد تصمیم‌گیرنده‌ی مورد نظر، نسبت مجموع وزن‌دار شده‌ی خروجی به مجموع وزن‌دار شده‌ی ورودی به‌صورت

$$E_p = \frac{u_1 y_{1p} + \ldots + u_1 y_{sp}}{v_1 x_{1p} + \ldots + v_m x_{mp}} \qquad (1)$$

کارایی آن واحد را اندازه گیری می کند، که در آن u_r قیمت خروجی rام یعنی y_r, $(r=1,\ldots,s)$ و v_i هزینه‌ی

ورودی iام یعنی $x_i, (i = 1,\ldots,m)$ است. کارایی فوق به کارایی اقتصادی معروف است.

کارایی نسبی، از تقسیم اندازه کارایی هر واحد به بزرگ‌ترین آن‌ها حاصل می‌شود. بنابراین اندازه کارایی هر واحد، همواره کوچک‌تر یا مساوی با یک بوده و حداقل یک واحد، کارایی نسبی برابر یک دارد. به‌طور مثال کارایی نسبی واحد تصمیم‌گیرنده p به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$RE_p = \frac{E_p}{max_j\left\{E_j\right\}} \tag{2}$$

تحلیل پوششی داده‌ها، امکاناتی را برای مطالعه واحدهایی با چند ورودی و چند خروجی فراهم می‌آورد. اسلوب تحلیل پوششی داده‌ها بر پایه جبر خطی بنا نهاده شده است و توانایی آن بیشتر به دلیل استفاده از برنامه‌ریزی خطی است. برنامه‌ریزی خطی، تحلیل پوششی داده‌ها را قادر می‌سازد، تا از روش‌های حل مساله برنامه‌ریزی خطی و قضایای دوآلیتی استفاده کرده و به این ترتیب منبع و مقدار ناکارایی را برای هر ورودی و هر خروجی مشخص کند.

تکنیک DEA همچنین فرصت‌های زیادی را برای همکاری میان تحلیل‌گرو تصمیم‌گیرنده ایجاد می‌کند. این همکاری‌ها می‌تواند در راستای انتخاب ورودی و خروجی واحدهای تحت ارزیابی و چگونگی عملکرد و الگویابی نسبت به مرز کارا باشد. مجموعه فعالیت‌های شدنی، مجموعه امکان تولید نامیده شده و به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$T = \left\{(X, Y) \in R^{m+s} : \text{بتواند به وسیله } X \geq 0 \text{ تولید شود } Y \geq 0 \right\}.$$

مدل‌های DEA هر کدام به یک مجموعه امکان تولید یکتا وابسته هستند که مجموعه امکان تولید نیز به طور یکتا، توسط یک مجموعه از فرض‌ها و اصول معین ساخته می‌شود.

مدل CCR اولین مدل DEA برای اندازه‌گیری کارایی واحدهای تصمیم گیرنده است که در سال ۱۹۷۸ توسط چارنزو همکاران ارایه شد [۵].

اگر در T_{CCR} امکان تولیدی مانند (X, Y) یافت نشود که غالب بر $(\boldsymbol{X_o}, \boldsymbol{Y_o})$ باشد، یعنی هیچ (X, Y) یافت نشود که $(\boldsymbol{-X}, Y) \geq (\boldsymbol{-X_o}, \boldsymbol{Y}_o)$ و نامساوی حداکثر در یکی از مؤلفه‌ها به‌صورت اکید برقرار باشد، آن‌گاه گوییم که $(\boldsymbol{X_o}, \boldsymbol{Y}_o)$ کارای نسبی است. در غیر اینصورت ناکارا است.

حالت اول به حل مدل زیر منجر می‌شود:

$$\begin{aligned} & Min \quad \theta \\ & s.t. \\ & \qquad (\theta \mathrm{X_o}, \mathrm{Y_o}) \in \mathrm{T_{CCR}} \end{aligned} \tag{3}$$

با توجه به تعریف کارایی نسبی و اصل شهودی تجرید و با توجه به اینکه $(\theta \mathrm{X_o}, \mathrm{Y_o}) \in \mathrm{T_{CCR}}$ ، مدل (۳)، به مدل (۴) تبدیل می‌شود. مدل (۴)، که به مدل CCR در فرم پوششی با ماهیت ورودی معروف است، همواره شدنی بوده و بهینه متناهی دارد و جواب بهین در شرط $0 < \theta^* \leq 1$ صدق می‌کند.

$$\begin{aligned} & Min \quad \theta \\ & s.t. \\ & \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} \le \theta x_{io}, \quad i=1,...,m, \\ & \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} \ge y_{ro}, \quad r=1,...,s, \\ & \quad \lambda_j \ge 0, \qquad j=1,...,n. \end{aligned} \tag{4}$$

شرط لازم کارایی تحت مدل فوق این است که $\theta^* = 1$. زیرا $\theta^* = 1$، به این معنی است که امکان کاهش متناسب در همه ورودی‌های DMU_o، در مجموعه امکان تولید T_{CCR} وجود ندارد. اگر $\theta^* < 1$، آن‌گاه DMU_o، ناکارا در ماهیت ورودی است و $(1-\theta^*)$ مقدار ناکارایی تکنیکی در ماهیت ورودی است. DMU_o، کارای قوی CCR گویند اگر و فقط اگر توسط هیچ DMUی عضو T_{CCR} مغلوب نگردد. برای هر $DMU_o, (o \in \{1,...,n\})$ یک مجموعه مرجع به‌صورت {حداقل در یک جواب بهین مدل (۴)، $\lambda_j^* > 0$ باشد | $E_o = \{j$ تعریف می‌شود.

در حقیقت مجموعه مرجع DMU_o عبارتست از DMU_j هایی که حداقل در یک جواب بهین مدل (۴) در ارزیابی DMU_o ، λ_j^* مقدار مثبت اختیار می‌کند. در ادبیات تحلیل پوششی داده‌ها ثابت شده است برای هر $DMU_j, (j=1,...,n)$، داریم $E_j \neq \varnothing$. برای اثبات مطلب به مرجع [۱] رجوع شود. مدل BCC توسط بنکر، چارنز و کوپر در سال ۱۹۸۴، مطرح شد[۳]. مرز کارایی مدل BCC به وسیله پوسته محدب DMUهای مشاهده شده، گسترده می‌شود. فرم پوششی مدل BCC در ماهیت ورودی برای ارزیابی DMU_o به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned} & Min \quad \theta \\ & s.t. \\ & \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} \le \theta x_{io}, \quad i=1,...,m, \\ & \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} \ge y_{ro}, \quad r=1,...,s, \\ & \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1, \\ & \quad \lambda_j \ge 0, \qquad j=1,...,n. \end{aligned} \tag{5}$$

دوآل مدل (۵) که به مدل مضربی BCC در ماهیت ورودی معروف است، به‌صورت زیر است:

$$
\begin{aligned}
&Max \quad \sum_{r=1}^{s} \boldsymbol{u}^t \boldsymbol{y}_{ro} + u_o \\
&s.t. \\
&\qquad \sum_{r=1}^{s} \boldsymbol{u}^t y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{v}^t x_{ij} + u_o \le 0, \quad j = 1,\dots,n, \\
&\qquad \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{v}^t x_{io} = 1, \\
&\qquad v_i \ge 0, \quad u_r \ge 0, \qquad i=1,\dots,m,\ r=1,\dots,s.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

DMU_o در مجموعه امکان تولید BCC کارای تکنیکی است اگر و فقط اگر $\theta^*_{BCC} = 1$. در غیر این صورت DMU_o ناکارا خواهد بود و $(1-\theta^*_{BCC})$ نشان دهنده‌ی میزان ناکارایی تکنیکی آن در ماهیت ورودی است.

۳ منبع محدود در DEA

کاربرد مورد نظر در این مقاله مربوط به تصمیم‌سازی (تصمیم‌گیری چند معیاری) چند معیاری است. این روش شامل انتخاب از یک گروه چند پیشنهادی و مربوط به زیر گروهی از پروژه‌ها است. پروژه‌های شخصی (انفرادی) باید منافعی را تحت زمان خاص به‌دست آورد. که این امر برای معرفی زیر گروهی از پروژه‌ها مناسب می‌باشد. نمونه‌ای که برای تمامی منابع در دسترس توجیه‌پذیر می‌باشد.

۳-۱ اولویت‌سازی پروژه با منابع محدود

مشکل اولویت دهی، در چند دهه گذشته مورد توجه قرار گرفته است. روش ما در ارتباط با روش‌های معرفی شده در ادبیات موضوع می‌باشد. در روش‌های معرفی شده موجود یک ارزیابی جمعی چند مرحله ای پیچیده و مدل انتخاب معرفی شده اند. روش ما که مشتمل بر ارزیابی و انتخاب در یک مرحله معین است که به روش $DEA-CCR$ پابند است زیرا از پیچیدگی کمتری برخوردار است.

مجموعه $p = \{1,\dots,k,\dots,|p|\}$ پروژه‌های پیشنهادی که هر کدام دارای خروجی $o = \{1,\dots,j,\dots,|o|\}$ و ورودی $I = \{1,\dots,i,\dots,|I|\}$ می‌باشد. پروژه (k) به‌وسیله خروجی‌های آن مشخص می‌گردد. که باید تولید شوند و همچنین وابسطه به ورودی‌های خود است که باید مصرف گردند. یک محدودیت (L_i) در کمیت ورودی i در پروژه‌ها وجود دارد و ما فرض می‌گیریم که حداقل یک پروژه با این محدودیت‌ها قابل اجرا است. هدف انتخاب یک زیرمجموعه $(S^* \subset P)$ است که به عنوان بهترین راه‌حل برای منابع در دسترس معرفی گردد. فرض کنید تمامی پروژه‌ها قابلیت اجرا شدن دارند و همگی آن‌ها دارای منابع محدود هستند و هم چنین فرض کنید پروژه‌ها مستقل هستند (تداخل ندارند) و اگر α, β انتخاب شوند خروجی‌ها می‌توانند طبق ورودی‌های دریافتی خروجی‌ها تولید کنند. اگر تابع کارایی در دسترس باشند $\theta_k = \theta(\chi_{kL},\dots,\chi_{ki},\gamma_{kL},\dots,\gamma_{kj},\dots)$ در این صورت می‌توانند مقدار کارایی θ_k هر پروژه را محاسبه نمود. در نتیجه می‌تواند برای رتبه بندی پروژه‌ها

مورد استفاده قرار گیرد. علاوه بر آن S می‌تواند با یک روش مستقیم به‌دست آید. یک نمونه مشابه برای این شرایط می‌تواند مساله کوله پشتی با مدل ذیل باشد.

$$\begin{aligned} &Max \quad \sum_{k\in p} C_k \theta_k \\ &s.t. \\ &\qquad \sum_{k\in p} C_k X_{ki} \le L_i, \quad i\in I, \\ &\qquad C_k \in \{0,1\}, \qquad k\in p. \end{aligned} \tag{۷}$$

خود ارزیابی در تحلیل پوششی داده‌ها به وسیله حل مساله متناظر هر پروژه امکان‌پذیر است [۵].

$$\begin{aligned} &Max \quad h_k = \sum_{j\in o} u_{kj} y_{kj} \\ &s.t. \\ &\qquad \sum_{i\in I} v_{ki} x_{ki} = 1, \\ &\qquad \sum_{j\in o} u_{kj} y_{pj} - \sum_{i\in I} v_{pi} x_{pi} \le 0, \qquad p\in P, \\ &\qquad u_{kj} \ge 0, \; v_{pi} \ge 0, \qquad j\in o, \; i\in I. \end{aligned} \tag{۸}$$

به کمک مقدار محاسبه شده h_k می‌توان پروژه‌ها را رتبه بندی نمود. شرایطی را تصور کنید که در آن ۳ پروژه وجود دارند، هر کدام یک ورودی و یک خروجی دارد.

جدول ۱. داده‌های سه پروژه با یک ورودی و یک خروجی

DMU	x	Y	$e=\frac{y}{x}$
A	۴۰۰	۴۰۰	۱۰۰
B	۳۰۰	۲۲۵	۰/۷۵
C	۱۰۰	۲۶	۰/۲۶

می‌توان به سادگی دید که پروژه A نسبت به پروژه‌های B و C ارجحیت دارد.

مقدار h_k می‌تواند یک رتبه بندی برای پروژه‌ها فراهم آورد ولی محدودیت منابع مانع از به‌کار بردن این روش به‌طور مستقل می‌گردد. حال، یک مدل اولویت‌دهی را به صورت زیر معرفی می‌کنیم. با توجه به اینکه پروژه‌ها مستقل هستند، هر زیر گروه S از مجموعه P پروژه‌ها می‌توانند به عنوان پروژه‌های بهینه در نظر گرفته شوند. پس به نظر می‌رسد تمام زیرمجموعه‌های ممکن از مجموعه مرجع را برای بهینه بودن چک نمود. این مورد با نام $P(A)$ شناخته می‌شود و اساسا مجموعه توانی P قلمداد می‌شود. لذا برای هر یک از زیرمجموعه‌های

ممکن باید مساله ذیل حل گردد که در آن:

$$\frac{Y}{S_j}=\sum_{k\in s} y_{ki}\,,\qquad X_{si}=\sum_{k\in s} x_{ki} \tag{٩}$$

$$Max\;\; h_s=\sum_{j\in o} u_{sj}\, y_{sj}\,,\quad S\in P\left(A\right)$$

$$s.t.$$

$$\sum_{i\in I} V_{si} X_{si}=1, \tag{١٠}$$

$$\sum_{j\in o} u_{sj}\, y_{pj}-\sum_{i\in I} V_{si} X_{pi}\;\le 0,\qquad P\in P\left(A\right),$$

$$u_{sj}\ge 0,\; v_{si}\ge 0,\qquad\qquad j\in O\;, i\in I.$$

تعداد اعضای غیرتهی $P\left(A\right)$ برابر $2^{|p|}-1$ است. در ادامه به عنوان یک گام اولیه به سوی عملیاتی کردن تعداد محدودیت‌های (١٠) می‌تواند از $2^{|p|}-1$ به $|p|$ به صورت زیر کاهش یابد. محدودیت‌ها در (١٠) به دو گروه تقسیم می‌شود: اولین گروه مرتبط با زیر مجموعه‌های تک عضوی p است در حالی که گروه دوم مرتبط زیرگروه‌های وابسته $\{3،1\}$ و $\{1،2\}$ و ... است که به صورت معادلات زیر است:

$$Max\quad h_s=\sum_{j\in o} u_{sj}\, y_{sj}\,,\quad s\in P(A)$$

$$s.t.$$

$$\sum_{i\in I} v_{si}\, x_{si}=1,$$

$$\sum_{j\in o} u_{sj}\, y_{pj}-\sum_{i\in I} v_{si}\, x_{pi}\le 0,\quad p\in P \tag{١١}$$

$$\sum_{j\in o} u_{sj}\, y_{qj}-\sum_{i\in I} v_{si}\, x_{qi}\le 0,\quad q\in P(A)=p',\quad P'=\left\{\{1\},\{2\},\ldots,\{|P|\}\right\},$$

$$u_{sj}\ge 0,\quad v_{sj}\ge 0,\qquad\quad j\in o,\quad i\in I.$$

واضح است که هر محدودیت در گروه دوم به عنوان یک ترکیب خطی از دو یا چند محدودیت در گروه اول می‌باشد. اگر محدودیت‌های گروه اول برقرار باشند، پس باید هر کدام از آن‌ها در گروه دوم نیز به کار گرفته شود. بنابراین، گروه دوم شامل تنها محدودیت‌های زاید می‌شود و می‌توانند حذف گردنند. لذا مدل اولویت‌دهی برای پروژه‌ها به صورت ذیل است.

$$Max\quad h_s=\sum_{j\in o} u_{sj}\, y_{sj}\quad s\in P(A)$$

$$s.t.$$

$$\sum_{i\in I} v_{si}\, x_{si}=1, \tag{١٢}$$

$$\sum_{j\in o} u_{si}\, y_{pj}-\sum_{i\in I} v_{si}\, x_{pi}\le 0,\quad p\in P,$$

$$u_{sj}\ge 0,\quad v_{sj}\ge 0,\quad j\in o,\quad i\in I.$$

حال باید به دنبال زیرمجموعه S بود که در شرایط مساله صدق کند. این زیرمجموعه S می‌تواند به‌وسیله این دو شرایط مشخص گردد. شرط (a): برای هر زیرمجموعه انتخاب شده مجموع ورودی باید در شرایط منابع در اختیار صدق کند. یعنی:

$$\forall i \in I, \sum_{k \in s} X_{ki} \leq L_i \tag{۱۳}$$

شرط (b): برای هر پروژه انتخاب نشده نتوان از منابع باقیمانده، آن را اجرا نمود. به عبارت دیگر ورودی هر پروژه انتخاب نشده نباید کوچک‌تر یا مساوی منابع باقیمانده باشد.

$$\forall p \in P - S, \quad \exists i \in I \quad such \quad that \quad \sum_{k \in s \cup \{p\}} X_{jl} > L_i \tag{۱۴}$$

شرط a یک نیاز واضح است در حالی که شرط b به این موضوع بر می‌گردد که تعداد پروژه‌های انتخاب شده حداکثر باشد. پس به جای معرفی زیرمجموعه‌های S و متعاقبا ارزیابی هر عضو آن توسط (۱۲)، این کار را با اصلاح مدل (۱۲) در یک چارچوب برنامه‌ریزی غیرخطی صفر-یک مانند (۱۵) انجام خواهیم داد. در اینجا C_k عدد یک است اگر پروژه (K) در S قرار گیرد در غیر این صورت صفر است. در نهایت اینکه بهینه‌سازی در C_k و u_j v_i رخ خواهد داد.

$$\begin{aligned}
\max \quad & \sum_{i \in o} u_j \left(\sum_{k \in p} C_k Y_{kj} \right) \\
s.t. \quad & \\
& \sum_{i \in o} v_j \left(\sum_{k \in p} C_k X_{ki} \right) = ۱, \\
& \sum_{j \in o} u_j y_{pj} - \sum_{i \in I} v_i x_{pi} \leq ۰, && p \in p, \\
& \sum_{k \in p} c_k x_{ki} + l_i = L_i, && i \in I, \\
& (۱ - C_k) X_{ki} + M c_k + M d_{ki} \geq l_i + \frac{۱}{M}, && k \in p, \; i \in I, \\
& \sum_{i \in I} d_{ki} \leq |I| - ۱, && k \in p, \\
& c_k, \; d_{ki} \in \{۰, ۱\}, && k \in p, i \in I, \\
& u_j \geq ۰, v_{ij} \geq ۰, L_j \geq ۰, && j \in o, \quad i \in I, \\
& M >> ۰
\end{aligned} \tag{۱۵}$$

قبل از تشریح این معادله به برخی از موضوعات اشاره می‌شود. مدل به دنبال بهترین زیرگروه ارزیابی شده و بر طبق شرایط a و b است. پس شرط a این محدودیت را معرفی می‌کند.

$$\sum_{k \in p} c_k x_{ki} + l_i = L_i \tag{۱۶}$$

که l_i مربوط به متغیر کمکی منبع i است. شرط b مقداری مشکل تر است اما به‌وسیله این محدودیت‌ها معرفی می‌شود:

$$\left(1-C_k\right)X_{ki}+Mc_k+Md_{ki}\geq l_i+\frac{1}{M}, \qquad k\in p\,, i\in I\,,$$
$$\sum_{i\in I}d_{ki}\leq\left|I\right|-1, \qquad k\in p, \tag{۱۷}$$

حال باید شرایط را برای $k\notin s$ و $c_k=0$ و $x_{ki}\leq l_i$ بررسی کنید. اولین قید می‌تواند به‌وسیله $d_{ki}=1$ حل شود که همین به M بزرگ مثبت در سمت چپ منتهی می‌گردد. به هرحال تاثیر محدودیت مانع دوم برای اطمینان بخشی در مورد (حداقل) یکی از مسیرهای $i\in I$, d_{ki} است که همچنان صفر باقی می‌ماند. از این رو $\exists i\in I$ به طوری که $x_{kj}\geq l_i+\frac{1}{M}$. در حالی که نرم افزار قابلیت حل کردن (۱۵) را دارد اما می‌توان آن را به‌صورت خطی تعریف کرد بدیهی است یک مساله برنامه‌ریزی خطی پیچیدگی محاسباتی کمتری نسبت به یک مساله برنامه‌ریزی صحیح مختلط می باشد. این خطی شدن شامل تغییرات زیر می‌شود:

$$a_{kj}=c_k\,u_j\,,b_{ki}=c_k\,v_i \tag{۱۸}$$

مدل (۱۹) به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned}
&Max \quad \sum_{(k\in p,\,j\in o)}a_{kj}y_{kj}\\
&s.t.\\
&\quad \sum_{(k\in p,i\in I)}b_{ki}x_{ki}=1,\\
&\quad \sum_{j\in o}u_j y_{pj}-\sum_{i\in I}v_i x_{pi}\leq 0, && p\in P\\
&\quad \sum_{k\in p}c_k x_{ki}+l_i\leq L_i, && i\in I,\\
&\quad \left(1-C_k\right)X_{ki}+Mc_{ki}+Md_{ki}\geq l_i+\frac{1}{M}, && k\in p,\ i\in I,\\
&\quad \sum d_{ki}\leq\left|I\right|-1, && k\in p,\\
&\quad c_k,\ d_{ki}\in\{0,1\}, && k\in p,\ i\in I,\\
&\quad a_{kj}\geq 0, && k\in p,\ j\in o,\\
&\quad a_{kj}\leq Mc_k, && k\in p,\ j\in o,\\
&\quad u_j\geq a_{kj}, && k\in p,\ j\in o,\\
&\quad b_{ki}\leq Mc_k, && k\in p, i\in I,\\
&\quad v_i\geq b_{ki}, && k\in p, i\in I,\\
&\quad v_i\leq b_{ki}+M\left(1-C_k\right), && k\in p, i\in I,\\
&\quad M>>0
\end{aligned} \tag{۱۹}$$

در جایی که دو گروه از محدودیت‌ها به‌وسیله خطوط عمومی مشخص شده‌اند که در واقع نماد متغیرهای جدید a_{kj} , b_{kj} به جای متغیرهای اصلی u_j , c_k , v_i قلمداد می‌شود. قبل از به‌کارگیری این مدل در بخش بعدی این نکته شایان ذکر است که همسانی در ارزیابی به وضوح در مدل (۴) اولویت‌دهی دیده می‌شود هر پیشنهاد پروژه دارای یک حق برابر در شکل‌گیری فن‌آوری تولید در ترکیب با دیگر پروژه‌ها است که بایستی در این انتخاب مورد ارزیابی قرار گیرد. این فرآیند تنها به داده‌های پروژه‌های مرتبط و منابع در دسترس بستگی دارد.

۳-۲ مدل پایه DEA

مدل تحلیل پوششی داده‌ها برای انتخاب پروژه به شرح ذیل است.

$$
\begin{aligned}
& Max \ \sum_{k\in s}[\sum_{r\in R}\mu_r y_{rk} - \sum_{i\in I_i} v_i x_{ik}] / \sum_{k\in s}\sum_{i\in I_i} v_i x_{ik} \\
& s.t. \\
& \quad \left[\sum \mu_r y_{rk} - \sum v_i x_{ik}\right] / \sum v_i x_{ik} \le 1, && k\in K_1, \\
& \quad \overline{\theta}_1 \le \left[\sum_{r\in R}\mu_r y_{rk} - \sum_{i\in \overline{I}_i} v_i x_{ik}\right] / \sum_{i\in I_i} v_i x_{ik} \le \overline{\theta}_2, && k\in S, \\
& \quad \sum_{K\in S} x_{ik} \le C_i, && i\in I_1, \\
& \quad x_{ik} \ge L_i,\ i\in I_1, && k\in S, \\
& \quad x_{ik} \ge 0,\ i\in I_i,\ \mu_r,\ v_i \ge \varepsilon, && \forall r,i.
\end{aligned}
\tag{۲۰}
$$

چنان که در ادبیات موضوع مطرح شده است وقتی پروژه‌ها یا $DMUs$ها بررسی شدند تکنولوژی تولید مناسب همان CRS چارنز و همکارانش [۵] است. به طور مشابه می‌توان از تکنولوژی مختلف با فرض بازده به مقیاس افزایشی، کاهشی و یا متغیرمجموعه امکان تولید مختلف ساخت که به دنبال آن می‌توان مدل‌های دیگری از تحلیل پوششی داده‌ها را نیز طراحی نمود.

مقدار کران انتخاب کارایی $\overline{\theta}_1$ در (۲۰) برای انتخاب پروژه‌ها به وسیله مدیریت انتخاب می‌شود. برای مثال، سطح عملکرد واقعی برای هر پروژه $(k\in s)$ باید حداقل $\overline{\theta}_1 = 80\%$ و بالاتر از یک مقدار مانند $\overline{\theta}_2$ برای هر پروژه $k\in s$ باشد، که به عنوان مقدار کوچک‌تر از واحد در نظر گرفته می‌شود. انتخاب $\overline{\theta}_2 = 1$ باعث گردد پروژه‌های انتخاب شده کارا باشند. به‌طور معمول امتیاز عملکرد برای پروژه k به صورت ذیل خواهد بود.

$$
e = \frac{\sum_{r\in R}\mu_r y_{rk}}{\sum_{i\in I} v_i x_{ik}} \quad \Rightarrow \quad e = \frac{\left[\sum_{r\in R}\mu_r y_{rk} - \sum_{i\in NOI} v_i x_{ik}\right]}{\sum_{i\in DI} v_i x_{ik}}
\tag{۲۱}
$$

x_{ik} همان ورودی است که در اختیار سازمان قرار می‌گیرد. پس $I_1 \subseteq I$زیر گروه‌های ورودی برای مواردی است که باید تحمیل شده باشد در مورد مشکل مکان یابی، I_1 می‌تواند شامل ۲ ورودی و $\overline{I}_2$ مکمل I_1 است k_1

می‌تواند مربوط به گروه واحدهای تصمیم گیرنده $\{1,\dots,k_1\}$ و k_2 گروه سایت‌های بالقوه $\{k_2,\dots,k_1+1\}$ برای زیر مجموعه S باشد

ابتدا رابطه (۲۰) را با قید ذیل جایگزین می‌شود:

$$\sum_{k\in s} v_i x_{ik} + v_i s_i = v_i c_i \;, \quad i \in I \tag{22}$$

که در آن s_i یک متغیر کمکی متناظر با محدودیت $i \in I_1$ در (۲۰) است. سپس تمامی زیر گروه‌های احتمالی S معرفی می‌گردند و بعد از آن متغیرهای دودویی d_k توسط رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$d_k = \begin{cases} 1 & \text{اگر فروشگاه a در k تعیین شده باشد} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
&\max \sum_{k\in K_2}\left[\sum_{r\in R} d_k M_r y_{rk} - \sum_{i\in I} d_k v_i x_{ik}\right] \\
&s.t. \\
&\quad \sum_{k\in K_2}\sum_{i\in 1} d_k v_i x_{ik} = 1, && \\
&\quad \sum_{r\in R}\mu_r y_{rk} - \sum_{i\in \bar{I}_1} v_i x_{ik} \le 0, && k \in K_1, \\
&\quad \sum_{i\in I} d_k \mu_r y_{rk} - \sum_{i\in \bar{I}_1} d_k v_i x_{ik} - \bar{\theta}_2 \sum_{i\in I_1} d_k v_i x_{ik} \le 0, && k \in K_2, \\
&\quad \sum_{i\in I} d_k \mu_r y_{rk} - \sum_{i\in \bar{I}_1} d_k v_i x_{ik} - \bar{\theta}_1 \sum_{i\in I_1} d_k v_i x_{ik} \ge 0, && k \in K_1, \\
&\quad \sum_{k\in K_2} d_k v_i x_{ik} + v_i s_i = v_i c_i , && i \in I_1, \\
&\quad d_k x_{ik} \ge d_k L_i , && i \in I_1, k \in K_2, \\
&\quad v_i s_i \le v_i L_i - \frac{1}{M} + M d_k + M_{r_{ik}} , && i \in I_1, k \in K_2, \\
&\quad \sum_{i\in I_1} r_{ik} \le |I_1| - 1, && k \in K_2, \\
&\quad x_{ik} \ge 0, && i \in I_1, k \in K_2, \\
&\quad M_r , v_i \ge E , && \forall r, i , \\
&\quad d_k \in \{0,1\}, && \forall K .
\end{aligned} \tag{23}$$

برای تسهیل در نوشتن مساله خطی دودویی مختلط ابتدا به رابطه زیر توجه نمایید:

$$x_{ik} \le M d_k\ , \quad i \in I_1, \quad k \in K_2 \tag{۲۴}$$

سپس برای هر $i \in I_1$ می‌توان محصول $d_k x_{ik}$ را با x_{ik} جابه‌جا نمود.

اکنون مقدار y_{rk} را با $d_k y_{rk}$ جابه‌جا می‌شود و متغیر تصمیم‌گیری x_{ik} را نیز با $d_k x_{ik}$ جابه‌جا می نماییم. برای تکمیل این روش، متغیرهای دوتایی معرفی شده و محدودیت‌های جدید ذیل اضافه می‌شوند:

$$v_i s_i \le v_i L_i - \frac{1}{M} + M d_k + M r_{ik}\ , \quad i \in I, \quad k \in K_2 \tag{۲۵}$$

$$\sum_{i \in I_1} r_{ik} \le |I_1| - 1, \quad k \in K_2 \tag{۲۶}$$

می‌توانیم به واسطه رابطه (۲۴) مشاهده کنیم که هر واحدی که عضو زیرمجموعه $(k \in s)$ است. می‌تواند $d_k = 1$ را داشته باشد. در غیر این صورت نیز برای تمامی iها در $(k \in s)$ شرط $d_k = 0$ خواهند کرد، که این نشانگر این است $r_{ik} = 1$ می‌باشد. محدودیت (۲۶) تنها اجازه می‌دهد که $|I_1| - 1$ متغیر دوتایی r_{ik} حداکثر یک باشد. پس هر واحدی که k را حداقل در یکی از ورودی‌های i داشته باشد باید متغیر کمکی $v_i s_i$ کمتر از مرز پایین تر از $v_i l_i$ می‌باشد.

برای هر $\{x_{ik}\}$ و $\{d_k\}$ مفروض، (به این معنی که متغیرها ثابت هستند) باید ذکر گردد که نتایج مربوط به مساله برنامه ریزی خطی کسری می‌تواند با یک مساله برنامه ریزی خطی معادل جایگزین شود. از وقتی که این رابطه غیر کسری معادل باشد مقادیر x_{ik} و d_k را می‌توان بدون توجه به ارزش آن‌ها در نظر گرفت. بنابراین این مساله به فرم زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{array}{ll}
\sum_{k \in k_2} c_{ik} + e_i = c_i v_i\ , & i \in I_1, \\
c_{ik} - l_i b_{ik} \ge 0, & i \in I_p,\ k \in K_2, \\
v_i l_i - e_i + M d_k + M r_{ik} \ge 1/M\ , & i \in I_1,\ \ k \in K_2, \\
\sum_{i \in I_1} r_{ik} \le |I_i| - 1, & k \in K_2, \\
a_{rk} - M d_k \le 0\ , & r \in R,\ k \in K_2, \\
\mu_r - a_{rk} + M d_k \le M\ , & r \in R,\ k \in K_2, \\
\mu_r + a_{rk} \ge 0\ , & r \in R, k \in K_2, \\
b_{ik} - M d_k \le 0, & i \in I,\ k \in K_2, \\
v_i - b_{ik} + M d_k \le M\ , & i \in I,\ k \in K_2, \\
v_i - b_{ik} \ge 0, & i \in I,\ k \in K_2, \\
c_{ik} - M b_{ik} \le 0, & i \in I,\ k \in K_2, \\
a_{rk}, b_{ik}, c_{ik}, e_i \ge 0\ , \mu_r \ge \varepsilon\ , v_i \ge \varepsilon\ , & r \in R, i \in I,\ k \in K, \\
d_k\ , r_{ik} \in \{0,1\}, & c_i \in I, k \in K_1.
\end{array} \tag{۲۷}$$

٤ نتیجه گیری

یک انتخاب چند معیاری را در نظر بگیرید که شامل انتخاب از یک گروه چند پیشنهادی و مربوط به زیر گروهی از پروژه‌ها است. توجه داشته باشید که پروژه‌های شخصی (انفرادی) باید منافعی را تحت زمان خاص به‌دست آورند. از این رو مشکل اولویت‌دهی، در چند دهه گذشته مورد توجه قرار گرفته است. از آن رو در این مقاله روش معرفی شده مشتمل بر ارزیابی و انتخاب در یک مرحله معین به منظور برطرف ساختن این مشکل می‌باشد. توجه داشته باشید که این روش همچنان به روش DEA-CCR پایبند است زیرا از پیچیدگی کمتری برخوردار است.

در شرایط اندازه گیری عملکرد، یک زیر گروه از راه‌حل‌های جایگزین از جانب یک سری انتخاب و یک محیط با منابع محدود ضروری می‌باشد. وقتی ورودی و خروجی‌های چند گانه حضور دارند، ساختار مدل DEA فرصت انتخاب را بر اساس بهینه‌سازی تجمعی مرتبط با ورودی تجمعی فراهم می‌کند. در این مقاله، ۲ مثال در مورد الزامات منابع محدود بررسی خواهد شد. اولین مورد شامل انتخاب از یک گروه مربوط به پروژه‌ها است، یک زیر گروهی که باید به کار گرفته شود. هر پروژه باید طبق استفاده از منابع ورودی چندگانه، طراحی می‌گردد و ضمناً یک گروه از خروجی‌ها را تولید کند. در این روش هر زیرگروه پروژه‌هایی را به‌کار می‌گیرد که می‌تواند از محدودیت‌های منابع به عنوان یک آیتم (پروژه کامپوزیت) انتخاب کند. این پروژه‌های کامپوزیتی به وسیله تحلیل پوششی داده‌ها ارزیابی می‌شوند. در واقع ارزیابی و انتخاب در یک مدل معین به‌وسیله فضاسازی برای مدل تحلیل پوششی داده‌ها در یک چارچوب برنامه ریزی خطی قرار می‌گیرد. روش دوم شامل انتخاب یک گروه از بهترین سایت‌ها برای تسهیلات خرده معین است که مدل مربوط به انتخاب‌ها تعیین یک منبع محدود است.

منابع

[۱] جهانتیغی، م.ع.، مقدس، ز.، واعظ فاسمی، م.، (۱۳۹۰). شاخص بهره‌وری مالمکوئیست چندمرحله‌ای. مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن. ۸(۴)، ۷۰-.۵۹

[2] Chang, P. T., Lee, J. H., (2012). A fuzzy DEA and knapsack formulation integrated model for project selection. Computers & Operations Research, 3, 112-125.

[3] Maleki, I., Omrani, O, Ghodsi, R., Khoei, A., (2014). Project selection using fuzzy linear programming model. International Journal of Operational Research (IJOR), 19, 211-233.

[4] Ghapanchi, A. H., Tavana, M., Khakbaz, M. H., Lo, G., (2012). A methodology for selecting portfolios of projects with interactions and under uncertainty. International Journal of Project Management, 30, 791–803.

[5] Charnes, A., Cooper, W. W., Rhodes, E., (1978). Measuring the efficiency of decision making unit. European Journal of operational research, 2, 429-444.