مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، سال دوازدهم، شماره چهارم (پیاپی ۴۷)، زمستان ۹۴، ص ص ۱۴-۱
شاپا ۷۲۸۶-۲۲۵۱

یک روش لونبرگ-مارکوارت اصلاح شده با یک جستجوی خطی جدید غیریکنوا برای حل دستگاه معادلات غیرخطی

کیوان امینی[1]*، فرامرز رستمی[2]
۱- دانشیار، دانشگاه رازی، گروه ریاضی، کرمانشاه، ایران
۲- دانشجوی دکتری، دانشگاه رازی، گروه ریاضی، کرمانشاه، ایران

رسید مقاله: ۴ مرداد ۱۳۹۴
پذیرش مقاله: ۱۸ آذر ۱۳۹۴

چکیده

در این مقاله یک روش لونبرگ-مارکوارت اصلاح شده با یک جستجوی خطی جدید برای حل یک دستگاه معادلات غیرخطی، ارایه می‌شود. در این روش، گام آزمون برابر مجموع یک گام لونبرگ-مارکوارت و یک تقریب از گام لونبرگ-مارکوارت در نظر گرفته می‌شود، جایی که در صورت پذیرفته نشدن گام آزمون، استفاده از یک جستجوی خطی جدید غیریکنوا پیشنهاد می‌گردد که همگرایی سراسری روش را نیز تضمین می‌کند. همگرایی مکعبی روش تحت شرط کران خطا که از شرط نامنفردی ماتریس ژاکوبی ضعیف‌تر است، نشان داده می‌شود. در پایان نتایج عددی ارایه شده نشان می‌دهد روش جدید یک روش کارا و موثر است.

کلمات کلیدی: دستگاه معادلات غیرخطی، روش لونبرگ- مارکوارت، شرط کران خطای موضعی، جستجوی خطی غیریکنوا.

۱ مقدمه

حل دستگاه معادلات غیرخطی

$$F(x)=0 \qquad (1)$$

که در آن $F:R^n \rightarrow R^n$ یک تابع به طور پیوسته مشتق‌پذیر است، یکی از مسایل مهم در ریاضیات کاربردی است که در اکثر شاخه‌های علوم، نظیر فیزیک، شیمی، زیست‌شناسی، مهندسی، صنعت و ... کاربرد دارد. تاکنون روش‌های زیادی برای حل مساله (۱) ارایه شده است. یکی از روش‌های موجود برای حل این مساله، تبدیل آن با استفاده از یک تابع ارزش مانند $f(x)=\frac{1}{2}\|F(x)\|^2$ به یک مساله بهینه‌سازی غیرخطی از نوع کم‌ترین

* عهده دار مکاتبات
آدرس الکترونیکی: kamini@razi.ac.ir

مربعات و استفاده از روش‌های تکراری موجود مانند روش‌های نیوتن، گاوس‌نیوتن، شبه نیوتن و ناحیه اطمینان برای حل آن می‌باشد [۶-۱]، [۱۱-۸].

روش نیوتن یکی از مهم‌ترین و قدیمی‌ترین روش‌های ارایه شده در این رده می‌باشد. این روش از یک فرایند تکراری به صورت

$$x_{k+1} = x_k + d_k \ ,$$

استفاده می‌کند، که در آن d_k یک جواب دستگاه معادلات خطی

$$J_k\, d_k = -F_k \ ,$$

است، جایی‌که $F_k = F(x_k)$ و $J_k = F'(x_k)$ ماتریس ژاکوبی F در x_k است. روش نیوتن با وجود نتایج همگرایی موضعی مناسب، دارای معایب فراوانی است که در جهت مرتفع کردن آن‌ها اصلاحات متعددی از آن ارایه گردیده است. روش‌های لونبرگ-مارکوارت یک خانواده بسیار مهم از الگوریتم‌ها هستند که در جهت غلبه بر برخی از مشکلات روش نیوتن ارایه گردیده است. در این خانواده به جای جهت نیوتن، جهت d_k از حل دستگاه

$$(J_k^T J_k + \lambda_k I)d = -J_k^T F_k \ , \qquad (۲)$$

موسوم به دستگاه لونبرگ-مارکوارت محاسبه می‌گردد، جایی‌که λ_k،پارامتر لونبرگ-مارکوارت، در هر تکرار بهنگام می‌گردد. نشان داده شده است که در صورت نامنفرد بودن ماتریس ژاکوبی و پیوستگی لیپ‌شیتس آن در جواب مساله، روش لونبرگ-مارکوارت همانند روش نیوتن همگرایی مجذوری دارد. اما شرط نامنفرد بودن ماتریس ژاکوبی یک شرط قوی است. یاماشیتا و فوکوشیما در [۱] تحت شرایط ضعیف‌تر موسوم به شرط کران خطای موضعی و با انتخاب پارامتر لونبرگ-مارکوارت به شکل $\lambda_k = \| F_k \|^2$، همگرایی مجذوری این روش را ثابت کردند. فن و یوان نتایج مشابهی را با انتخاب $\lambda_k = \mu_k \| F_k \|$، به‌دست آوردند [۲]. فن در [۳]، یک نسخه اصلاح شده از روش لونبرگ-مارکوارت (MLM) را ارایه نمود و تحت شرایط کران خطای موضعی همگرایی مکعبی آن را نشان داد. در این روش در هر تکرار پس از محاسبه d_k با استفاده از حل دستگاه (۲)، بردار

$$y_k = x_k + d_k, \qquad (۳)$$

محاسبه می گردد. در ادامه با حل دستگاه خطی اصلاح شده

$$(J_k^T J_k + \lambda_k I)d = -J_k^T F\left(y_k\right), \qquad (۴)$$

بردار $\hat{d}_k$ محاسبه و جهت $s_k = d_k + \hat{d}_k$ تعریف می‌گردد. با توجه به اینکه جهت s_k لزوما یک جهت کاهشی نیست؛ بنابراین شبیه روش‌های ناحیه اطمینان و در جهت استفاده مناسب از جهت جدید، با معرفی

$$r_k = \frac{Ared_k}{\Pr ed_k} = \frac{\| F_k \|^2 - \| F(x_k + d_k + \hat{d}_k) \|^2}{\| F_k \|^2 - \| F_k + J_k\, d_k \|^2 + \| F(y_k) \|^2 - \| F(y_k) + J_k\, \hat{d}_k \|^2} \ ,$$

می‌توان از قاعده زیر استفاده کرد:

$$x_{k+1} = \begin{cases} x_k + s_k & if\ r_k \geq p_0, \\ x_k & otherwise. \end{cases}$$

که در آن p_0 یک مقدار مناسب در بازه (۰/۵ و ۰) می‌باشد. قابل توجه است که معادله (۴) جایگزین معادله

$$(J^T(y_k)J(y_k) + \lambda_k I)d = -J^T(y_k)F(y_k)\ ,$$

در روش لونبرگ-مارکوارت گردیده است. جایی‌که با توجه به پر هزینه بودن محاسبه ماتریس $J(y_k)$ در این رابطه، در رابطه (۴) از تقریب موجود J_k استفاده می‌شود که باعث کاهش تعداد محاسبات ماتریس ژاکوبی نسبت به روش لونبرگ-مارکوارت می‌گردد و در نتیجه برای حالاتی که $F(x)$ پیچیده و یا n بزرگ است، بسیار مفید است؛ اما توجه داریم که جهت s_k در روش لونبرگ-مارکوارت لزوما کاهشی نیست و بنابراین تکنیک‌های جستجوی خطی استاندارد به‌طور مستقیم در این روش قابل استفاده نیست. این واقعیت، اثبات همگرایی سراسری این روش را مشکل می‌کند. هدف این مقاله، ارایه یک جستجوی خطی غیریکنوا برای روش لونبرگ-مارکوارت اصلاح شده و اثبات همگرایی سراسری این روش بدون استفاده از روش‌های ناحیه اطمینان است.

اولین و معروف‌ترین جستجوی خطی غیریکنوا توسط گریپو و همکارانش در [۴] برای مسایل بهینه‌سازی به صورت زیر ارایه گردید:

$$f(x_k + \alpha_k d_k) \leq f_{l(k)} + \gamma\alpha_k \nabla f(x_k)^T d_k, \tag{۵}$$

که در آن

$$f_{l(k)} = \max_{0 \leq j \leq m(k)} f(x_{k-j}),$$
$$m(0) = 0, \qquad 0 \leq m(k) \leq \min\{m(k-1)+1, N\},$$

$\gamma \in (0,1)$ و N یک عدد صحیح مثبت است. با توجه به اینکه برای حل دستگاه‌های خطی تابع f به صورت $f(x) = \frac{1}{2}\|F(x)\|^2$ است؛ بنابراین استفاده از این جستجوی خطی مستلزم محاسبه ماتریس ژاکوبی و بنابراین پرهزینه و ناکارا است. لی و فوکوشیما در [۵] یک جستجوی خطی برای معادلات غیرخطی به صورت زیر ارایه دادند.

$$\|F(x_k + \alpha d_k)\|^2 \leq (1+\varepsilon_k)\|F_k\|^2 - \sigma_1\alpha^2\|d_k\|^2 - \sigma_2\alpha^2 |F_k\|^2, \tag{۶}$$

که در آن σ_1 و σ_2 دو ثابت مثبت هستند و دنباله $\{\varepsilon_k\}$ در شرط

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k < \infty \tag{۷}$$

صدق می‌کند. همگرایی سراسری و زبرخطی روش تحت شرایط مناسب توسط آن‌ها نشان داده شد. واضح است که در رابطه (۶) نیازی به محاسبه ماتریس ژاکوبی نیست. این خاصیت هنگامی که n بزرگ و یا محاسبه ماتریس ژاکوبی پیچیده است، بسیار مفید است.

با توجه به اینکه در روش لونبرگ- مارکوارت اصلاح شده جهت جستجو دو قسمتی است بنابراین جستجوی خطی (۶) نامناسب و غیر قابل استفاده است. زو در [۶] جستجوی خطی مشابهی، به صورت زیر برای روش MLM ارایه داد.

$$\| F(x_k+\alpha d_k+\alpha^2 \hat{d}_k)\|^2 \le (1+\varepsilon_k)\| F_k\|^2 -\sigma_1\alpha^2 \| d_k\|^2 -\sigma_2\alpha^2 \| \hat{d}_k\|^2 -\sigma_3\alpha^2 | F_k\|^2 . \tag{۸}$$

که در آن σ_1، σ_2 و σ_3 ثابت‌های مثبت و $\{\varepsilon_k\}$ یک دنباله صادق در رابطه (۷) است. همگرایی سراسری و مکعبی این روش تحت شرط کران خطا توسط زو در [۶] نشان داده شده است. نتایج عددی حاصل از اجرای این روش بر روی مسایل Extended Rosenbrock و Extended Powell singular با مقادیر متفاوت n و نقاط شروع گوناگون، کارایی این روش را نشان داد.

ما در این مقاله، با الهام از جستجوهای خطی (۵) و (۸)، یک جستجوی خطی غیریکنوا جدید برای روش لونبرگ-مارکوارت اصلاح شده به صورت زیر پیشنهاد می‌نماییم.

$$\| F(x_k+\alpha d_k+\alpha^2 \hat{d}_k)\|^2 \le R_k -\sigma_1\alpha^2 \| d_k\|^2 -\sigma_2\alpha^2 \| \hat{d}_k\|^2 -\sigma_3\alpha^2 \| F_k\|^2, \tag{۹}$$

که در آن

$$R_k = \beta_k F_{l(k)}{}^2 + (1-\beta_k)\| F_k\|^2,$$

جایی که

$$F_{l(k)} = \max_{0\le j\le m(k)} \| F(x_{k-j})\|,$$

و

$$m(0)=0, \qquad 0\le m(k)\le \min\{m(k-1)+1, N\},$$

N یک عدد طبیعی، σ_1، σ_2 و σ_3 ثابت‌هایی مثبت و $\{\beta_k\}$ یک دنباله همگرا به صفر با شرط

$$\sum_{k=0}^{\infty}\beta_k < \infty , \qquad \beta_k \in [0,1] \quad \forall k\ge 1,$$

است. تفاوت این جستجوی خطی با جستجوی خطی (۸) در جایگزینی جمله اول سمت راست نامساوی با جمله R_k می‌باشد. قابل توجه اینکه هنگامی که $\| F_k\|$ نزدیک جواب است با توجه به کوچک بودن ε_k، طرف راست رابطه (۸) بسیار کوچک و برقراری آن منوط به ناچیز بودن α_k می‌باشد که ممکن است $\alpha_k d_k+\alpha_k^2\hat{d}_k$ به حدی کوچک شود که از دقت ماشین کم‌تر شود و نقش خود را از دست بدهد. برای غلبه بر این مشکل ما در جستجوی خطی جدید استفاده از R_k را جایگزین می‌نماییم. نتایج عددی روی مسایل تست موری و همکارانش

[۷]، نشان می‌دهد که ایده جدید، یک ایده کارا و قابل قبول است. ساختار بخش‌های بعدی مقاله به صورت زیر است.

در بخش بعد پس از بیان الگوریتم جدید، خوش تعریفی آن ثابت می‌شود. در بخش سوم، همگرایی سراسری الگوریتم جدید اثبات می گردد. در بخش چهارم نشان داده می‌شود که نرخ همگرایی این روش همانند روش MLM مکعبی است. در پایان نتایج عددی در بخش پنجم نمایانگر کارایی مناسب الگوریتم جدید می‌باشد.

۲ الگوریتم لونبرگ-مارکوارت اصلاح شده جدید

در این بخش، ابتدا الگوریتم جدید ارایه می گردد و سپس خوش تعریفی آن نشان داده می‌شود.

الگوریتم ۲-۱ روش لونبرگ-مارکوارت اصلاح شده با جستجوی خطی غیریکنوا جدید برای حل دستگاه معادلات غیرخطی

ورودی: بردار آغازین $x_۰ \in R^n$، مقادیر $\mu > 0$، $\varepsilon > 0$، $\sigma_۱, \sigma_۲, \sigma_۳ > ۰$، $r, \rho \in (۰,۱)$، $m \in N$.

گام ۰: قرار بده $k = ۰$.

گام ۱: مقادیر $F_k = F(x_k)$ و $J_k = F'(x_k)$ را محاسبه کن. اگر $\| J_k^T F_k \| \le \varepsilon$ باشد، توقف کن، در غیر این صورت قرار بده

$$\lambda_k = \mu \| F_k \|.$$

گام ۲: بردارهای d_k و $\hat{d}_k$ را از حل دستگاه‌های (۲) و (۴) محاسبه کن.

گام ۳: اگر

$$\| F(x_k + d_k + \hat{d}_k) \| \le \rho \| F_k \| \tag{۱۰}$$

قرار بده $\alpha_k = ۱$ و به گام ۵ برو.

گام ٤: (جستجوی خطی) با محاسبه i_k از رابطه

$$i_k = \min\{ i \in \{۰,۱,۲,۳,\cdots\} \mid \text{در رابطه (۹) صدق کند } r^i \} \tag{۱۱}$$

قرار بده $\alpha_k = r^{i_k}$.

گام ۵: قرار بده $x_{k+۱} = x_k + \alpha_k d_k + \alpha_k^۲ \hat{d}_k$.

گام ٦: $k := k+۱$ و به گام ۱ برو.

لم‌های زیر خوش تعریفی الگوریتم ۳-۱ را نشان می‌دهد.

لم ۱. فرض کنید دنباله $\{x_k\}$ توسط الگوریتم ۲-۱ تولید شده باشد، در این صورت داریم:

$$\| F_k \|^۲ \le R_k, \quad \forall k \in N. \tag{۱۲}$$

برهان. از تعریف $F_{l(k)}$ به سادگی ملاحظه می‌شود:

$$\| F_k \|^2 \le F_{l(k)}^2, \quad \forall k \in N,$$

استفاده از این نامساوی و تعریف R_k نتیجه می‌دهد:

$$\| F_k \|^2 = \beta_k \| F_k \|^2 + (1-\beta_k) \| F_k \|^2 \le \beta_k F_{l(k)}^2 + (1-\beta_k) \| F_k \|^2 = R_k \quad \forall k \in N.$$

لم ۲. الگوریتم ۲-۱ خوش تعریف است.

برهان. واضح است که اگر $\alpha \to 0^+$ میل کند آنگاه سمت چپ رابطه (۹) به مقدار $\| F_k \|^2$ و سمت راست آن به مقدار R_k میل می‌کند. با توجه به اینکه از لم ۱ داریم:

$$\| F_k \|^2 \le R_k, \quad \forall k \in N.$$

بنابراین رابطه (۹) برای هر α، به اندازه کافی کوچک برقرار و در نتیجه الگوریتم ۲-۱ خوش تعریف است.

۳ همگرایی سراسری

هدف این بخش اثبات همگرایی سراسری الگوریتم ۲-۱ تحت مفروضات مناسب می‌باشد. برای این منظور تعریف و فرض‌های زیر لازم است. ابتدا مجموعه تراز Ω_0 را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\Omega_0 = \{ x \mid \| F(x) \| \le \| F_0 \| \}.$$

فرض ۳-۱. یک همسایگی Ω از Ω_0 وجود دارد به‌طوری‌که $F(x)$ و $J(x)$ بر آن پیوسته لیپ‌شیتس هستند؛ یعنی عدد مثبت L موجود است به‌طوری‌که:

$$\| F(y) - F(x) \| \le L \| y - x \|, \quad \forall x, y \in \Omega, \tag{13}$$

و

$$\| J(y) - J(x) \| \le L \| y - x \|, \quad \forall x, y \in \Omega. \tag{14}$$

به سادگی از (۱۴) می‌توان نتیجه گرفت که:

$$\| J(x) \| \le L, \quad \forall x \in \Omega. \tag{15}$$

لم ۳. فرض کنیم دنباله $\{x_k\}$ توسط الگوریتم ۲-۱ تولید شده باشد، در این صورت:

الف) دنباله $\{F_{l(k)}\}$ همگراست.

ب) به ازای هر $k \ge 0$ داریم $x_k \in \Omega_0$.

برهان. از تعریف $F_{l(k)}$، می‌توان نتیجه گرفت:

$$F_{l(k+1)} \le \max\{F_{l(k)}, \| F_{k+1} \|\}, \tag{16}$$

از سوی دیگر استفاده از روابط (۹-۱۱)، نتیجه می‌دهد:

$$\| F_{k+1} \|^2 \le R_k \le F_{l(k)}^2. \tag{17}$$

روابط (۱۶) و (۱۷)، به سادگی نامساوی زیر را نتیجه می‌دهند:

$$F_{l(k+1)} \le F_{l(k)}. \tag{18}$$

در نتیجه دنباله $\{F_{l(k)}\}$ کاهشی، کران‌دار و بنابراین همگرا ست؛ بنابراین اثبات (الف) کامل است. اکنون کافیست توجه شود که استفاده متوالی از رابطه (۱۸) نتیجه می‌دهد:

$$F_{l(k)} \le F_{l(0)} = \| F_0 \|.$$

با توجه به تعریف $F_{l(k)}$ و نامساوی اخیر داریم:

$$\| F_k \| \le F_{l(k)} \le \| F_0 \|.$$

بنابراین $x_k \in \Omega$ و در نتیجه (ب) نیز اثبات می‌شود.

نتیجه ۱. از قسمت (ب) لم قبل می‌توان نتیجه گرفت که دنباله $\{\| F_k \|\}$ کران‌دار است؛ یعنی عدد حقیقی $M > 0$ موجود است به‌طوری‌که:

$$\| F_k \| \le M, \qquad \forall k \in N. \tag{۱۹}$$

لم ٤. فرض کنید d_k یک جواب دستگاه (۲) است، آنگاه $\| d_k \|$ از بالا کران‌دار است.

برهان. با توجه به خواص نرم ماتریسی داریم:

$$\| (J_k^T J_k + \lambda_k I)^{-1} \| = \sqrt{\lambda_{\max}((J_k^T J_k + \lambda_k I)^{-T} (J_k^T J_k + \lambda_k I)^{-1})}$$

$$= \sqrt{\lambda_{\max}((J_k^T J_k + \lambda_k I)(J_k^T J_k + \lambda_k I)^T)^{-1}}$$
$$= \sqrt{\frac{1}{\lambda_{\min}((J_k^T J_k)^2 + 2\lambda_k J_k^T J_k + \lambda_k^2 I)}}$$
$$\le \lambda_k^{-1} \tag{۲۰}$$

این نامساوی همراه با روابط (۲) و (۱۵) نتیجه می‌دهد:

$$\| d_k \| = \| (J_k^T J_k + \lambda_k I)^{-1} J_k^T F_k \| \le \| (J_k^T J_k + \lambda_k I)^{-1} \| \| J_k \| \| F_k \| \le L\lambda_k^{-1} \| F_k \| = \frac{L}{\mu}. \tag{۲۱}$$

لم ۵. فرض کنیم دنباله $\{x_k\}$ توسط الگوریتم ۲-۱ تولید شده باشد، اگر رابطه (۱۰) برای تعداد نامتناهی اندیس k برقرار باشد، آنگاه دنباله $\{\| F_k \|\}$ همگرا به صفر است.

برهان. ابتدا برای هر $j \ge 1$، مجموعه‌های H_j و G_j را به صورت زیر معرفی می‌کنیم:

$H_j = \{k \le j \mid$ رابطه (۱۰) برای k برقرار است $\}$

$$G_j = \{0, 1, \cdots, j\} \setminus H_j.$$

اکنون فرض کنید رابطه (۱۰) برای تعداد نامتناهی k برقرار باشد، واضح است وقتی $j \to \infty$، تعداد اعضای مجموعه H_j نیز به سمت ∞ میل می‌کند، یعنی $| H_j | \to \infty$ است.

این واقعیت در کنار روابط (۹) و (۱۰) نتیجه می‌دهد:

$$\| F_{k+1} \| \le (\prod_{i \in G_k} 1 \prod_{i \in H_k} \rho) \| F_0 \| = \rho^{|H_k|} \| F_0 \| \to 0 \qquad as \quad k \to \infty.$$

بنابراین دنباله $\{\| F_k \|\}$ همگرا به صفر است.

اکنون می‌توان قضیه زیر را بیان کرد که همگرایی سراسری الگوریتم ۲-۱ را ثابت می‌کند.

قضیه ٦. تحت شرایط فرض ۳-۱، اگر الگوریتم ۲-۱ در تعداد متناهی تکرار خاتمه نیابد، آنگاه

$$\liminf_{k\to\infty} \| J_k^T F_k \| = 0. \tag{۲۲}$$

برهان. با استفاده از برهان خلف، فرض کنید $\tau > 0$ و عدد طبیعی $\hat{k}$ موجود باشند به‌طوری‌که:

$$\| J_k^T F_k \| > \tau, \qquad \forall k > \hat{k}. \tag{۲۳}$$

این نامساوی همراه با رابطه (۱۵)، برای مقادیر به اندازه کافی بزرگ k، نتیجه می‌دهد:

$$\| F_k \| \geq L^{-1}\tau. \tag{۲۴}$$

بنابراین با استفاده از لم ۵، نامساوی (۱۰) فقط برای تعداد متناهی مقادیر k برقرار است. در نتیجه عدد طبیعی k_0 موجود است به طوری که رابطه (۹) برای هر $k \geq k_0$ برقرار است؛ بنابراین از رابطه (۹) داریم:

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} \| F(x_k + \alpha_k d_k + \alpha_k^2 \hat{d}_k) \|^2 \leq \sum_{k=k_0}^{\infty} R_k - \sum_{k=k_0}^{\infty} \sigma_1 \alpha_k^2 \| d_k \|^2 - \sum_{k=k_0}^{\infty} \sigma_2 \alpha_k^2 \| \hat{d}_k \|^2 - \sum_{k=k_0}^{\infty} \sigma_3 \alpha_k^2 \| F_k \|^2,$$

این نامساوی همراه با تعریف $R_k = \beta_k F_{l(k)}^2 + (1-\beta_k)\| F_k \|^2$ و روابط (۹) و (۱۹)، رابطه زیر را نتیجه می‌دهد:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=k_0}^{\infty} (\| F(x_k + \alpha_k d_k + \alpha_k^2 \hat{d}_k) \|^2 - \| F_k \|^2) + \sum_{k=k_0}^{\infty} \sigma_1 \alpha_k^2 \| d_k \|^2 + \sum_{k=k_0}^{\infty} \sigma_2 \alpha_k^2 \| \hat{d}_k \|^2 + \sum_{k=k_0}^{\infty} \sigma_3 \alpha_k^2 \| F_k \|^2 \\
&\leq \sum_{k=k_0}^{\infty} \beta_k F_{l(k)}^2 \leq \sum_{k=k_0}^{\infty} \beta_k (F_{l(k)}^2 - \| F_k \|^2) \\
&\leq \sum_{k=k_0}^{\infty} \beta_k M^2 \leq M^2 \sum_{k=k_0}^{\infty} \beta_k < \infty.
\end{aligned}$$

بنابراین با توجه به گام ۵ الگوریتم۲-۱ داریم:

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} (\| F(x_{k+1}) \|^2 - \| F_k \|^2) + \sum_{k=k_0}^{\infty} \sigma_1 \alpha_k^2 \| d_k \|^2 + \sum_{k=k_0}^{\infty} \sigma_2 \alpha_k^2 \| \hat{d}_k \|^2 + \sum_{k=k_0}^{\infty} \sigma_3 \alpha_k^2 \| F_k \|^2 < \infty ,$$

یک نتیجه بدیهی این رابطه، رابطه

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} \alpha_k^2 \| F_k \|^2 < \infty,$$

است. بنابراین $\lim_{k\to\infty} \alpha_k \| F_k \| = 0$، پس با توجه به (۲۴) داریم:

$$\lim_{k\to\infty} \alpha_k = 0 \tag{۲۵}$$

اگر $\overline{\alpha}_k = \dfrac{\alpha_k}{r}$ باشد آنگاه روابط (۹) و (۱۱) نتیجه می‌دهند:

$$\| F(x_k + \overline{\alpha}_k d_k + \overline{\alpha}_k^2 \hat{d}_k) \|^2 > R_k - \sigma_1 \overline{\alpha}_k^2 \| d_k \|^2 - \sigma_2 \overline{\alpha}_k^2 \| \hat{d}_k \|^2 - \sigma_3 \overline{\alpha}_k^2 \| F_k \|^2 .$$

اکنون استفاده از لم ۱، برقراری رابطه زیر را نتیجه می‌دهد:

$$\| F(x_k+\bar{\alpha}_k d_k+\bar{\alpha}_k^2 \hat{d}_k)\|^2-\|F_k\|^2>-\sigma_1\bar{\alpha}_k^2\|d_k\|^2-\sigma_2\bar{\alpha}_k^2\|\hat{d}_k\|^2-\sigma_3\bar{\alpha}_k^2\|F_k\|^2 .$$

با استفاده از این نامساوی و رابطه (۱۳)، داریم:

$$\begin{aligned}
&\bar{\alpha}_k^2(\sigma_1\|d_k\|^2+\sigma_2\|\hat{d}_k\|^2+\sigma_3\|F_k\|^2)>-(\|F(x_k+\bar{\alpha}_k d_k+\bar{\alpha}_k^2\hat{d}_k)\|^2-\|F_k\|^2)\\
&=-2F_k^T(F(x_k+\bar{\alpha}_k d_k+\bar{\alpha}_k^2\hat{d}_k)-F_k)-\|F(x_k+\bar{\alpha}_k d_k+\bar{\alpha}_k^2\hat{d}_k)-F_k\|^2\\
&\geq-2F_k^T(F(x_k+\bar{\alpha}_k d_k+\bar{\alpha}_k^2\hat{d}_k)-F_k)-L^2\bar{\alpha}_k^2(\|d_k\|^2+\|\hat{d}_k\|^2).
\end{aligned} \tag{۲۶}$$

از طرف دیگر استفاده از قضیه مقدار میانگین، روابط (۱۳)، (۱۹)، (۲) و (۱۴) را نتیجه می‌دهد:

$$\begin{aligned}
&F_k^T(F(x_k+\bar{\alpha}_k d_k+\bar{\alpha}_k^2\hat{d}_k)-F_k)\\
&=F_k^T(F(x_k+\bar{\alpha}_k d_k+\bar{\alpha}_k^2\hat{d}_k)-F(x_k+\bar{\alpha}_k d_k))+F_k^T(F(x_k+\bar{\alpha}_k d_k)-F_k)\\
&\leq LM\bar{\alpha}_k^2\|\hat{d}_k\|+F_k^T J_k\bar{\alpha}_k d_k+F_k^T\int_0^1(J(x_k+t\bar{\alpha}_k d_k)-J_k)\bar{\alpha}_k d_k\,dt\\
&\leq LM\bar{\alpha}_k^2\|\hat{d}_k\|-\bar{\alpha}_k d_k^T(J_k^T J_k+\lambda_k I)d_k+\frac{1}{2}LM\bar{\alpha}_k^2\|d_k\|.
\end{aligned} \tag{۲۷}$$

با توجه به روابط (۲۶) و (۲۷) برای عدد مثبت $c_1=\max\{\sigma_1+L^2,\sigma_2+L^2,\sigma_3,2LM\}$ داریم:

$$\begin{aligned}
\bar{\alpha}_k&\geq\frac{d_k^T(J_k^T J_k+\lambda_k I)d_k}{c_1(\|d_k\|^2+\|\hat{d}_k\|^2+\|F_k\|^2+\|d_k\|+\|\hat{d}_k\|)}\\
&\geq\frac{\lambda_k d_k^T d_k}{c_1(\|d_k\|^2+\|\hat{d}_k\|^2+\|F_k\|^2+\|d_k\|+\|\hat{d}_k\|)}.
\end{aligned} \tag{۲۸}$$

استفاده از روابط (۲)، (۴)، (۱۳)، (۱۵)، (۲۰)، (۲۱) و (۲۴) را نتیجه می‌دهد که:

$$\begin{aligned}
\|\hat{d}_k\|&=\|(J_k^T J_k+\lambda_k I)^{-1}J_k^T F(y_k)\|\\
&\leq\|(J_k^T J_k+\lambda_k I)^{-1}J_k^T(F(y_k)-F_k)\|+\|(J_k^T J_k+\lambda_k I)^{-1}J_k^T F_k\|\\
&\leq L^2\lambda_k^{-1}\|d_k\|+\|d_k\|\\
&\leq(1+\frac{L^3}{\mu\tau})\|d_k\|\\
&\leq(1+\frac{L^3}{\mu\tau})\frac{L}{\mu}.
\end{aligned} \tag{۲۹}$$

اگر $\liminf_{k\to\infty}\|d_k\|=0$ باشد، آنگاه با توجه به روابط (۲) و (۱۵) خواهیم داشت:

$$\liminf_{k\to\infty}\|J_k^T F_k\|=\liminf_{k\to\infty}\|(J_k^T J_k+\lambda_k I)d_k\|=0,$$

که با رابطه (۲۳) در تناقض است؛ بنابراین عدد مثبت τ_1 موجود است که:

$$\liminf_{k\to\infty}\|d_k\|\geq\tau_1.$$

از این نامساوی همراه با روابط (۲۸)، (۲۱)، (۲۹)، (۱۹) و (۲۴) نتیجه می‌شود که دنباله $\{\alpha_k\}$ دور از صفر کراندار است، که در تناقض با (۲۵) است؛ بنابراین فرض خلف باطل و حکم برقرار است.

٤ همگرایی مکعبی

در این بخش نشان داده می‌شود که الگوریتم ۲-۱ تحت شرط کران خطا[1]، همگرایی مکعبی دارد. در ابتدا چند لم مهم ارایه و سپس قضیه همگرایی مکعبی بیان می‌گردد.

تعریف ٤-١. فرض کنید X^* مجموعه تمام جواب‌های مساله (۱) و D یک زیر مجموعه از R^n باشد به‌طوری‌که $D \cap X^* \neq \phi$ باشد. در این صورت $\| F(x) \|$ شرط کران خطای موضعی برای مساله (۱) را دارد هرگاه ثابت مثبت c موجود باشد، به طوری‌که:

$$\| F(x) \| \geq c \; dist(x, X^*) \qquad \forall x \in D, \tag{۳۰}$$

که در آن $dist(x, X^*) = \inf_{y \in X^*} \| x - y \|$.

در ادامه فرض می‌شود که $\bar{x}_k$، نزدیک‌ترین بردار از مجموعه X^* به نقطه x_k باشد. یعنی:

$$\| \bar{x}_k - x_k \| = dist(x_k, X^*). \tag{۳۱}$$

در جهت اثبات همگرایی مکعبی به فرض‌های زیر نیاز داریم.

فرض ٤-٢.

۱. مساله (۱) دارای یک جواب $x^* \in X^*$ است.

۲. توابع $F(x)$ و $J(x)$ بر $N(x^*, b)$ پیوسته لیپ‌شیتس هستند؛ یعنی اینکه عدد مثبت L موجود است که:

$$\| F(y) - F(x) \| \leq L \| y - x \|, \qquad \forall x, y \in N(x^*, b), \tag{۳۲}$$

و

$$\| J(y) - J(x) \| \leq L \| y - x \|, \qquad \forall x, y \in N(x^*, b). \tag{۳۳}$$

که در آن:

$$0 < b < 1, \quad N(x^*, b) = \{ x \in R^n \mid \| x - x^* \| \leq b \}.$$

۳. $F(x)$ به طور پیوسته مشتق پذیر است و $\| F(x) \|$ در شرط کران خطای موضعی برای مساله (۱) روی $N(x^*, b)$ صدق می‌کند.

تذکر ٤-٣. از پیوستگی لیپ‌شیتس ماتریس ژاکوبی به سادگی نتیجه می‌شود که:

$$\| F(y) - F(x) - J(x)(y - x) \| \leq L \| y - x \|^2, \qquad \forall x, y \in N(x^*, b). \tag{۳۴}$$

لم ۷. فرض کنید شرایط فرض ۴-۲ برقرار است و دنباله $\{x_k\}$ توسط الگوریتم ۲-۱ تولید شده باشد، در این صورت داریم:

۱. $\| \lambda_k \| = O(\| \bar{x}_k - x_k \|)$

[1] Error bound condition

۲. $\| d_k \| = O(\| \bar{x}_k - x_k \|)$

۳. $\| \hat{d}_k \| = O(\| \bar{x}_k - x_k \|)$.

برهان. با توجه به شرط کران خطای موضعی (۳۰)، رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$\lambda_k = \mu \| F(x_k) \| \geq \mu c \| \bar{x}_k - x_k \|. \qquad (۳۵)$$

از طرف دیگر از $F(\bar{x}_k) = ۰$ و رابطه (۳۲)، نتیجه می‌شود:

$$\lambda_k = \mu \| F(x_k) \| = \mu \| F(\bar{x}_k) - F(x) \| \leq \mu L \| \bar{x}_k - x_k \|. \qquad (۳۶)$$

روابط (۳۵) و (۳۶) درستی اولین گزاره را نتیجه می‌دهد. اثبات گزاره‌های (۲) و (۳) در [۳] آمده است.

لم ۸. فرض کنید شرایط فرض ۴-۲ برقرار است و دنباله $\{x_k\}$ توسط الگوریتم ۲-۱ تولید شده باشد، در این صورت داریم:

۱. $\| F_k + J_k d_k \| = o(\| \bar{x}_k - x_k \|)$

۲. $\| F(y_k) \| = o(\| \bar{x}_k - x_k \|)$

۳. $\| F(y_k) + J_k \hat{d}_k \| = o(\| \bar{x}_k - x_k \|)$.

برهان. اثبات این لم مشابه اثبات لم ۳-۴ از [۶] می‌باشد.

قضیه ۹. فرض کنید شرایط فرض ۴-۲ برقرار است و دنباله $\{x_k\}$ توسط الگوریتم ۲-۱ تولید شده باشد، در این صورت دنباله $\{x_k\}$ به طور مکعبی به x^* همگراست.

برهان. با توجه به رابطه (۳۴) و لم‌های ۷ و ۸ ، ثابت $c_۳ > ۰$ وجود دارد که:

$$\begin{aligned}\| F(x_k + d_k + \hat{d}_k) \| &\leq \| F(x_k + d_k + \hat{d}_k) - F_k - J_k(d_k + \hat{d}_k) \| + \| F_k + J_k(d_k + \hat{d}_k) \| \\ &\leq c_۳(\| d_k \|^۲ + \| \hat{d}_k \|^۲) + \| F_k + J_k d_k \| + \| F(y_k) + J_k \hat{d}_k \| + \| F(y_k) \| \\ &\leq o(\| \bar{x}_k - x_k \|).\end{aligned} \qquad (۳۷)$$

بنابراین دنباله $\{r_k\}$ همگرا به صفر موجود است که

$$\| F(x_k + d_k + \hat{d}_k) \| \leq r_k \| \bar{x}_k - x_k \| \leq c^{-۱} r_k \| F_k \|, \qquad (۳۸)$$

که در آن نامساوی آخر به دلیل شرط کران خطای موضعی (۳۰) برقرار است. چون دنباله $\{r_k\}$ همگرا به صفر و $c\rho$ یک عدد ثابت مثبت می‌باشد؛ لذا $k_۱ \in N$ موجود است به طوری که:

$$r_k < c\rho, \qquad \forall k \geq k_۱. \qquad (۳۹)$$

از روابط (۳۸) و (۳۹) نتیجه می‌شود:

$$\| F(x_k + d_k + \hat{d}_k) \| \leq \rho \| F_k \|, \qquad \forall k \geq k_۱. \qquad (۴۰)$$

بنابراین برای مقادیر به اندازه کافی بزرگ k، همواره داریم $\alpha_k = ۱$؛ بنابراین:

$$x_{k+۱} = x_k + d_k + \hat{d}_k, \qquad \forall k \geq k_۱.$$

ادامه اثبات به‌طور کامل مشابه استدلال موجود در [۳] است و بنابراین از ارایه‌ی مجدد آن صرف نظر می‌شود.

۵ نتایج عددی

هدف این بخش مقایسه الگوریتم ۲-۱ ارایه شده در این مقاله با دو الگوریتم معروف لونبرگ-مارکوارت اصلاح شده برای حل معادلات غیرخطی می‌باشد. برای یک نمایش ساده، اسامی مخفف الگوریتم‌ها در کنار مقادیر انتخاب شده برای پارامترهای ثابت هر الگوریتم را به شرح زیر در نظر می‌گیریم.

- MLMF: الگوریتم لونبرگ-مارکوارت اصلاح شده توسط فن [۳]

$$p_0 = 0/0001,\ \ p_1 = 0/25,\ \ p_2 = 0/75,\ \ \mu_1 = 0/1,\ \ m = 10^{-6}.$$

- MLMZ: الگوریتم لونبرگ-مارکوارت اصلاح شده توسط زو [۶]

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0/005\ ,\rho = 0/8\ ,r = 0/5\ ,\mu = 0/01\ ,\varepsilon_k = \frac{0/5^k}{10}.$$

- MLMN: الگوریتم ۲-۱

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0/005,\ \ \rho = 0/8,\ \ r = 0/5,\ \ \mu = 0/01,\ \ \beta_k = \frac{1}{2^k},\ \ N = 5.$$

برای مقایسه مناسب، هر سه الگوریتم روی یک مجموعه از مسایل تست منفرد، که مشابه با [۸] به صورت زیر ساخته می‌شود، اجرا گردید. ابتدا فرض کنید که $F(x)$ یک تابع تست استاندارد انتخاب شده از [۷] باشد، یک تابع جدید با ژاکوبی منفرد را از آن به صورت زیر می‌توان ساخت.

$$\hat{F}(x) = F(x) - J(x^*)A(A^TA)^{-1}A^T(x - x^*),$$

که در آن برای $1 \le k \le n$، $A \in R^{n\times k}$ یک ماتریس با رتبه ستونی کامل و x^* یک جواب معادله $F(x) = 0$ می‌باشد. واضح است که

$$\hat{J}(x^*) = J(x^*)(I - A(A^TA)^{-1}A^T),$$

یک ماتریس از رتبه $n-k$ است و $\hat{F}(x^*) = 0$. البته $\hat{F}(x)$ ممکن است ریشه‌های دیگری نیز داشته باشد که ریشه $F(x) = 0$ نیستند. در این مقاله ما ماتریس $A \in R^{n\times k}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A = [1,1,\cdots,1]^T \in R^{n\times 1}.$$

با این انتخاب یک مجموعه از مسایل منفرد از رتبه $n-1$ تولید می‌گردد. در کلیه اجراها، یک الگوریتم متوقف می‌شود اگر:

$$\| J_k^T F_k \| \le 10^{-4},$$

یا تعداد تکرارهای مورد نیاز از ۱۰۰۰ تجاوز کند. نتایج عددی حاصل از اجرای الگوریتم‌ها بر روی ۵ مساله اول از مسایل موری و همکاران [۷] همراه با توابع توسعه یافته متناظر با آن مسایل، با نقاط شروع و مقادیر متفاوت n، در جدول ۱ ارایه شده است.

جدول ۱. نتایج عددی اجرای الگوریتم‌ها بر روی مسایل آزمون

Problem	x_0	n	MLMZ NF/NJ/NT	NS?	MLMF NF/NJ/NT	NS?	MLMN NF/NJ/NT	NS ?
Rosenbrock	−۱۰	۲	۲۹/۱۵/۵۹	Y	۱۹۷/۵۳/۳۰۳	Y	۲۹/۱۵/۵۹	Y
	−۱		۲۳/۱۲/۴۷	Y	۲۱/۱۱/۴۳	Y	۲۳/۱۲/۴۷	Y
	۱		۲۱/۱۱/۴۳	Y	۱۷۵/۴۵/۲۶۵	Y	۲۱/۱۱/۴۳	Y
	۱۰		۳۴/۱۶/۶۶	Y	۸۹/۳۷/۱۶۳	Y	۲۷/۱۴/۵۵	Y
	۱۰۰		۵۶/۲۴/۱۰۴	Y	۵۵/۲۳/۱۰۱	Y	۳۷/۱۹/۷۵	Y
Extended Rosenbrock	−۱۰	۱۰۰	–	-	۱۰۷/۴۵/۴۶۰۷	Y	۳۳/۱۷/۱۷۳۳	Y
	−۱		۳۳/۱۷/۱۷۳۳	Y	۱۳۱/۴۶/۴۷۳۱	Y	۳۳/۱۷/۱۷۳۳	Y
	۱		۳۳/۱۷/۱۷۳۳	Y	۸۷/۴۱/۴۱۸۷	Y	۳۳/۱۷/۱۷۳۳	Y
	۱۰		–	-	۱۰۳/۴۸/۴۹۰۳	Y	۴۱/۲۱/۲۱۴۱	Y
	۱۰۰		۵۹/۳۰/۳۰۵۹	Y	۴۹/۲۲/۲۲۴۹	Y	۵۹/۳۰/۳۰۵۹	Y
Powell Singular	−۱۰	۴	۱۷/۹/۵۳	Y	۱۷/۹/۵۳	Y	۱۷/۹/۵۳	Y
	−۱		۱۱/۶/۳۵	Y	۱۱/۶/۳۵	Y	۱۱/۶/۳۵	Y
	۱		۱۱/۶/۳۵	Y	۱۱/۶/۳۵	Y	۱۱/۶/۳۵	Y
	۱۰		۱۷/۹/۵۳	Y	۱۷/۹/۵۳	Y	۱۷/۹/۵۳	Y
	۱۰۰		۲۱/۱۱/۶۵	Y	۲۱/۱۱/۶۵	Y	۲۱/۱۱/۶۵	Y
Extended Powell Singular	−۱۰	۱۰۰	۱۷/۹/۹۱۷	Y	۱۷/۹/۹۱۷	Y	۱۷/۹/۹۱۷	Y
	−۱		۱۳/۷/۷۱۳	Y	۱۳/۷/۷۱۳	Y	۱۳/۷/۷۱۳	Y
	۱		۱۳/۷/۷۱۳	Y	۱۳/۷/۷۱۳	Y	۱۳/۷/۷۱۳	Y
	۱۰		۱۷/۹/۹۱۷	Y	۱۷/۹/۹۱۷	Y	۱۷/۹/۹۱۷	Y
	۱۰۰		۳۱/۱۶/۱۶۳۱	Y	۲۳/۱۲/۱۲۲۳	Y	۳۱/۱۶/۱۶۳۱	Y
Extended Powell Badly Scaled	−۱۰	۱۰۰	۲۰۱/۵۶/۵۸۰۱	N	–	-	۸۴/۳۳/۳۳۸۴	N
	−۱		۶۵/۱۸/۱۸۶۵	N	۶۸۵/۲۳۷/۲۴۳۸۵	N	۱۳/۷/۷۱۳	N
	۱		۲۰۵/۳۷/۳۹۰۵	N	–	-	۱۵/۸/۸۱۵	N
	۱۰		۱۰۰۹/۱۳۵/۱۴۵۰۹	N	–	-	–	-
	۱۰۰		–	-	–	-	–	-
Wood	−۱۰	۴	۲۵/۱۳/۷۷	Y	۲۵/۱۳/۷۷	Y	۲۵/۱۳/۷۷	Y
	−۱		۱۹/۱۰/۵۹	Y	۱۹/۱۰/۵۹	Y	۱۹/۱۰/۵۹	Y
	۱		۲۱/۱۱/۶۵	Y	۲۱/۱۱/۶۵	Y	۲۱/۱۱/۶۵	Y
	۱۰		۲۳/۱۲/۷۱	Y	۲۳/۱۲/۷۱	Y	۲۳/۱۲/۷۱	Y
	۱۰۰		۵۹/۲۴/۱۵۵	Y	۲۷/۱۴/۸۳	Y	۳۵/۱۸/۱۰۷	Y
Extended Wood	−۱۰	۱۰۰	۲۹/۱۵/۱۵۲۹	Y	۲۷/۱۴/۱۴۲۷	Y	۲۹/۱۵/۱۵۲۹	Y
	−۱		۲۱/۱۱/۱۱۲۱	Y	۲۱/۱۱/۱۱۲۱	Y	۲۱/۱۱/۱۱۲۱	Y
	۱		۲۳/۱۲/۱۲۲۳	Y	۲۱/۱۱/۱۱۱۲۱	Y	۲۳/۱۲/۱۲۲۳	Y
	۱۰		۳۰/۱۵/۱۵۳۰	Y	۲۳/۱۲/۱۲۲۳	Y	۳۱/۱۶/۱۶۳۱	Y
	۱۰۰		۱۵۷/۴۲/۴۳۵۷	Y	۱۰۵/۴۱/۴۲۰۵	Y	۱۳۷/۴۱/۴۲۳۷	Y
Helical Valley	−۱۰	۳	۱۱/۶/۲۹	N	۱۱/۶/۲۹	N	۱۱/۶/۲۹	N
	−۱		۱/۱/۳	Y	۱/۱/۳	Y	۱/۱/۳	Y
	۱		۱۳/۷/۳۴	N	۱۱/۶/۲۹	N	۱۳/۷/۳۴	N
	۱۰		۱۳/۷/۳۴	N	۱۳/۷/۳۴	N	۱۳/۷/۳۴	N
	۱۰۰		۱۱/۶/۲۹	N	۱۱/۶/۲۹	N	۱۱/۶/۲۹	N
Extended Helical Valley	−۱۰	۹۹	۱۳/۷/۷۰۶	N	۱۳/۷/۷۰۶	N	۱۳/۷/۷۰۶	N
	−۱		۱/۱/۱۰۰	Y	۱/۱/۱۰۰	Y	۱/۱/۱۰۰	Y
	۱		۱۵/۸/۸۰۷	N	۱۵/۸/۸۰۷	N	۱۵/۸/۸۰۷	N
	۱۰		۱۵/۸/۸۰۷	N	۲۹/۱۲/۱۲۱۷	N	۱۵/۸/۸۰۷	N
	۱۰۰		۱۵/۸/۸۰۷	N	۱۵/۸/۸۰۷	N	۱۵/۸/۸۰۷	N

هر مساله با ۵ نقطه شروع $-۱۰x_۰$، $-x_۰$، $x_۰$، $۱۰x_۰$ و $۱۰۰x_۰$ اجرا گردیده است که در آن $x_۰$ همان بردار اولیه پیشنهاد شده توسط موری و همکاران در [۷] می‌باشد. در جدول۱، تعداد محاسبه تابع و تعداد محاسبات ماتریس ژاکوبی به ترتیب با نمادهای "NF" و "NJ" نشان داده شده‌است. با توجه به اینکه برای معادلات غیرخطی معمولا هزینه محاسبه ماتریس ژاکوبی n برابر هزینه محاسبه مقدار تابع است؛ بنابراین در جهت یک مقایسه مناسب، از مقدار:

$$NT = NF + n * NJ$$

به عنوان تعداد محاسبه کل، برای مقایسه الگوریتم‌ها استفاده شده است. حرف "Y" در ستونی که با عنوان "NS ?" در جدول نام گذاری شده، نمایانگر این‌است که آن الگوریتم روی آن مساله با موفقیت به جواب x^* رسیده است؛ اما مفهوم حرف "N" در این مکان این است که الگوریتم جوابی غیر از x^* تولید نموده است. به علاوه حالاتی در اجرا که تعداد تکرارها بیش‌تر از ۱۰۰۰ گردیده و یا الگوریتم به دلایلی موفق به تولید جواب نگردیده، در جدول با علامت "–" نمایش داده شده است. نتایج ارایه شده همگی نشانگر برتری الگوریتم جدید بر الگوریتم‌های دیگر است. از جدول ۱ می‌توان مشاهده نمود که الگوریتم جدید تقریباً ۷۸ درصد از مسایل را با حداقل تعداد محاسبات کل (NT) حل کرده است، جایی‌که الگوریتم $MLMF$ تقریباً ۶۷ درصد و الگوریتم $MLMZ$ تنها ۶۴ درصد از مسایل را با حداقل تعداد محاسبات کل (NT) حل می‌کنند. همچنین تعداد شکست‌ها در الگوریتم جدید کم‌تر از تعداد شکست‌های دو الگوریتم دیگر است. این نتایج نشان می‌دهد که الگوریتم جدید یک الگوریتم کارا و موثر است.

منابع

[۱۱] عهدی اقدم، ص.، رضاپور، ر.، قوسی، س، (۱۳۸۸). روش‌های تکراری شبه نیوتن برای دستگاه‌های معادلات غیرخطی. مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، ۶(۲۳)، ۱–۱۰.

[1] Yamashita, N., Fukushima, M., (2001). On the rate of convergence of the Levenberg– Marquardt method. Computing, 15, 237–249.
[2] Fan, J., Yuan, Y. X., (2005). On the quadratic convergence of the Levenberg–Marquardt method without nonsingularity assumption. Computing, 74, 23–39.
[3] Fan, J., (2012). The modified Levenberg–Marquardt method for nonlinear equations with cubic convergence. Mathematics of Computation, 81, 447–466.
[4] Grippo, L., Lampariello, F., Lucidi, S., (1986). A nonmonotone line search technique for Newton's method. SIAM Journal on Numerical Analysis, 23, 707–716.
[5] Li, D., Fukushima, M., (1999). A globally and superlinearly convergent Gauss–Newton- based BFGS method for symmetric nonlinear equations. SIAM Journal on Numerical Analysis, 37, 152–172.
[6] Zhou, W., (2013). On the convergence of the modified Levenberg-Marquardt method with a nonmonotone second order Armijo type line search. Journal of Computational and Applied Mathematics, 239, 152-161.
[7] Moré, J. J., Garbow, B. S., Hillstrom, K. E., (1981). Testing unconstrained optimization software, ACM Transactions on Mathematical Software, 7, 17–41.
[8] Schnabel, R. B., Frank, P. D., (1984). Tensor methods for nonlinear equations. SIAM Journal on Numerical Analysis, 21, 815–843.
[9] Amini, K., Rostami, F., (2015). A new modified two steps Levenberg-Marquardt Method for nonlinear equations. Journal of Computational and Applied Mathematics, 288, 341-350.
[10] Broyden, C. G., (1967). Quasi-Newton methods and their applications to function minimization. Mathematics of Computation, 21, 577–593.