مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، سال دوازدهم، شماره چهارم (پیاپی ۴۷)، زمستان ۹۴، ص ص ۴۵-۲۹
شاپا ۷۲۸۶-۲۲۵۱

مدل‌سازی جیره دام در شرایط عدم قطعیت با استفاده از رویکرد سیستم‌های خاکستری

سید هادی ناصری*[1]، داود درویشی سلوکلایی[2]
۱-استادیار، دانشگاه مازندران، گروه ریاضی، بابلسر، ایران
۲- دانشجوی دکتری، دانشگاه مازندران، گروه ریاضی، بابلسر، ایران

رسید مقاله: ۲۶ خرداد ۱۳۹۴
پذیرش مقاله: ۷ آبان ۱۳۹۴

چکیده
برنامه‌ریزی خطی یکی از روش‌های مناسب به‌منظور تنظیم جیره خوراکی دام با کم‌ترین هزینه می‌باشد. ازآن جا که اغلب داده‌ها تجربی، نادقیق و تقریبی هستند از مدل‌های فازی و بازه‌ای استفاده‌شده تا جیره تنظیمی از انعطاف‌پذیری لازم برخوردار باشد. زمانی که داده‌ها کم و یا ناقص باشند، به دنبال یک جواب منحصربه‌فرد برای مساله باشیم و یا پیدا کردن تابع عضویت برای خبره مشکل باشد، استفاده از یک روش مناسب جهت برآوردن این مشکل بدیهی است. هدف اصلی این پژوهش معرفی رویکردی جدید برای مساله جیره‌نویسی در شرایط عدم قطعیت بوده است که بسیار کاربردی و مناسب‌تر باشد. در این مطالعه تلاش شد تا جیره خوراکی مزرعه پرورش جوجه گوشتی در محیط خاکستری انجام‌شده و نتایج آن با مدل‌های برنامه‌ریزی خطی، برنامه‌ریزی خطی بازه‌ای، برنامه‌ریزی خطی فازی مقایسه شوند. با این روش می‌توان جواب‌های بهینه متفاوتی با توجه به نوسان قیمت مواد خوراکی یا موجودی به دست آورد. به‌ویژه مطالعه مدل‌های یادشده نشان داد با به‌کارگیری روش‌های پایه‌ای برنامه‌ریزی خطی و نیز با توسعه نتایج موجود می‌توان امکان تحلیل حساسیت پارامترهای مدل در شرایط عدم قطعیت را نیز فراهم کرد.

کلمات کلیدی: اعداد خاکستری، برنامه‌ریزی خطی، برنامه‌ریزی خطی خاکستری، جیره خوراکی، عدم قطعیت.

۱ مقدمه
هزینه خوراک دام حدود ۶۵ تا ۷۵ درصد هزینه‌های دامداری را شامل می‌شود. کاهش قیمت تمام‌شده خوراک مصرفی دام، با توجه به محدودیت منابع خوراکی در هر منطقه یا فصل و همچنین، نیاز به‌صرفه جویی در مصرف علوفه مساله بهینه‌سازی برنامه تغذیه دام امری ضروری می‌باشد. اهمیت این موضوع همواره مورد توجه

* عهده‌دار مکاتبات
آدرس الکترونیکی: nasseri@umz.ac.ir

پژوهشگران و از جمله اقتصاددانان قرارگرفته و منجر به ابداع راه‌هایی برای کاهش هزینه در این واحدها شده است؛ بنابراین آشنایی با ترکیبات، کیفیت و نوع مواد خوراکی و احتیاجات خوراکی دام و اصول و استانداردهای مربوطه و مجاز بسیار مهم خواهد بود. از اوایل دهه ۱۹۵۰ کارشناسان علوم تغذیه دام و طیور با به‌کارگیری روش برنامه‌ریزی خطی اقدام به جیره‌نویسی می‌کردند [۱]. در تنظیم جیره خوراکی با حداقل قیمت، برنامه‌ریزی خطی را می‌توان به کار برد که از حل دستگاه معادلاتی شامل محدودیت‌های منابع خوراکی و احتیاجات بهتر می‌باشد که در این روش‌ها هدف اصلی تامین کردن احتیاجات دام می‌باشد و سپس قیمت جیره خوراکی مشخص می‌شود. برنامه‌ریزی خطی ساده یکی از روش‌هایی است که از دیرباز مورداستفاده قرارگرفته است ولی به دلیل نیاز به اطلاعات و داده‌های دقیق در بسیاری از تصمیم‌گیری‌های دنیای واقعی نتایج قابل قبولی ارایه نمی‌دهد، در جهان واقعی بسیاری از اطلاعات ناشناخته هستند. این اطلاعات نادقیق و مبهم معمولاً توسط اعداد قطعی بیان می‌شوند که با توجه و در نظر گرفتن عدم قطعیت نادرست است. از آن‌جایی که عدم قطعیت، فقدان دقت و اطلاعات ناقص در تنظیم بهینه جیره‌های خوراکی دام با روش‌های موجود که بر اساس برنامه‌ریزی‌های خطی انجام می‌شود، وجود دارد، استفاده از روش مناسبی جهت برآوردن این امر بدیهی است. در تصمیم‌گیری هنگامی که با عدم دقت و قطعیت مواجه هستیم، نظریه مجموعه‌های فازی یکی از بهترین ابزار برای لحاظ کردن عدم قطعیت در پارامترهای تصمیم‌گیری است. برنامه‌ریزی فازی به دلیل این‌که امکان دخالت داده‌های نادقیق و مبهم را در پارامترهای مدل، به تصمیم‌گیرندگان می‌دهد، نسبت به مدل‌های کلاسیک برنامه‌ریزی ریاضی برای استفاده در مسایل بهینه‌سازی دارای کاربرد انعطاف‌پذیری بیش‌تری بوده و نتایج قابل‌اعتمادتر می‌باشد. ناصری [۲] ضمن تعریف مفاهیم پایه‌ای برنامه‌ریزی خطی کلاسیک در محیط فازی همچون جواب‌های شدنی، جواب‌های پایه‌ای، جواب بهینه، جواب تباهیده، شرایط بهینگی و... الگوریتم‌های سیمپلکس فازی برای حل مسایل برنامه‌ریزی خطی عدد فازی ومسایل برنامه‌ریزی خطی با متغیرهای فازی را ارایه کرد.

مسایل برنامه‌ریزی خطی با ضرایب بازه‌ای نوع خاصی از مدل‌های با ضرایب نادقیق است که در برنامه‌ریزی مسایل واقعی کاربرد فراوانی دارد. در حل یک مساله برنامه‌ریزی خطی بازه‌ای می‌توان جواب بهینه را در یک بازه به دست آورد که می‌تواند به‌نوبه خود اطلاعات بیش‌تری را در اختیار تصمیم‌گیرندگان قرار دهد؛ یعنی هر مقداری در این بازه، جواب بهینه است. همچنین با توجه به مجموعه برش‌ها در اعداد فازی می‌توان یک برنامه‌ریزی خطی با ضرایب فازی را به مساله برنامه‌ریزی خطی بازه‌ای تبدیل نمود. با حل مساله بازه‌ای برای برش‌های متعدد می‌توان مقادیر بهینه تابع هدف را به دست آورد.

در روش فازی احتیاج به خبره دارید که دقیقاً میزان مصرف و احتیاجات و یا قیمت خوراک را مشخص کند که گاهی اوقات به دلیل اطلاعات ناقص و یا داده‌های کم این تخمین به‌درستی انجام نمی‌پذیرد. درروش بازه‌ای هم بیش‌تر حالت کلی مدنظر می‌باشد یعنی بازه قیمتی در حالت کلی در نظر گرفته می‌شود و اگر قیمت در یک روز مدنظر باشد و یا احتیاجات روز خاصی موردتوجه باشد امکان‌پذیر نیست. این در حالی است که با توجه به مفاهیم بنیادی اعداد خاکستری این امر به‌آسانی قابل دست‌یابی است. ازاین‌رو از روش برنامه‌ریزی خطی با پارامترهای خاکستری در هزینه، منابع و همچنین ضرایب مصرف استفاده شده است. مزیت این روش در آن

است که پارامترهای مساله را می‌توان به‌صورت اعداد خاکستری بازه‌ای بیان کرد و با توجه به میزان اطمینان به داده‌ها مساله را حل کرد.

در زمینه نظریه سیستم‌های خاکستری دنگ [۳و۴] ضمن تشریح و توصیف سیستم‌های خاکستری و اعداد خاکستری به تصمیم‌گیری در موقعیت‌های خاکستری پرداخت. زنگ و لویس [۵] در مطالعه‌ای به ارایه مفهوم بهینه‌سازی سیستم‌های خاکستری پرداخته و به‌وسیله تحلیل نظری و مثال‌های عددی نشان دادند که مفهوم ارایه‌شده منطقی و معنادار است. چن و همکاران [۶] در مطالعه‌ای ضمن توصیف استفاده نظریه سیستم‌های خاکستری در مسایل برنامه‌ریزی ریاضی به مسایل برنامه‌ریزی خطی خاکستری پرداختند. همچنین استفاده از اعداد خاکستری بازه‌ای و پیش‌بینی خاکستری را در این مدل‌ها توسعه دادند که نتایج نسبت به مدل‌های قبلی در این زمینه رضایت‌بخش بوده است. لئو و همکاران [۷] در مطالعه‌ای به ارایه جواب‌های مکانی برای برنامه‌ریزی خطی با پارامترهای خاکستری پرداختند و با تبدیل این‌گونه مسایل به چندین مساله برنامه‌ریزی خطی معمولی آن را حل کرده‌اند و مشکل ارزیابی جواب‌ها را با معرفی درجه اطمینان جواب برطرف کردند. رضوی و همکاران [۸] در مطالعه‌ای با ارایه یک رویکرد برنامه‌ریزی چندهدفه به حل مسایل برنامه‌ریزی خطی خاکستری پرداختند. نتایج آن‌ها نشان داد که روش ارایه‌شده می‌تواند هر مساله برنامه‌ریزی خطی خاکستری را در حالت کلی حل کند و محدودیت‌های موجود در روش‌های قبل را برطرف کند. آن‌ها با توجه به رابطه ترتیب میان اعداد خاکستری بازه‌ای این روش را ارایه کردند. رن و همکاران [۹] در مطالعه‌ای یک مدل برنامه‌ریزی مبتنی بر برنامه‌ریزی خاکستری را برای سیستم مجتمع شیمیایی در شرایط عدم قطعیت ارایه دادند. به‌منظور حل مدل خاکستری مساله، یک روش جدید معرفی کردند که به تصمیم‌گیرنده در به دست آوردن هدف خواسته‌شده خود کمک بهتری می‌کند. در مدل خاکستری آن‌ها مقدار اعتبار جواب می‌تواند توسط تصمیم‌گیرنده پیشنهاد شود و نتایج برنامه‌ریزی تولید توسط مدل محاسبه می‌شود. لی و همکاران [۱۰] در مطالعه‌ای به ارایه یک فرمول کلی به‌منظور محاسبه معکوس ماتریس خاکستری پرداخته و از نتایج آن در حل برنامه‌ریزی خطی خاکستری استفاده کرده‌اند و نشان دادند که محاسبه آن بسیار ساده و مشکل دیگر روش‌های حل برنامه‌ریزی خطی و غیرقطعی را ندارد. نتایج آن‌ها همچنین می‌تواند در دیگر شاخه‌های تحقیق در عملیات هم استفاده شود. باغبان و همکاران [۱۱] رویکرد تحلیل پوششی داده‌های خاکستری را در ارزیابی و رتبه‌بندی پیمان‌کاران و ارتقاء پیمان‌کاران ناکارا ارایه دادند. پس از جمع‌آوری دادهای اولیه در قالب مدل تحلیل پوششی داده‌های خاکستری نسبت به حل مدل اقدام گردید و با مشخص شدن جواب مدل اولیه تعدادی از پیمان‌کاران که دارای کارایی نسبی صد در صد بودند انتخاب شده، پس از مشخص شدن پیمان‌کاران کارا، با استفاده از الگوریتمی جهت رتبه‌بندی کامل عملکرد پیمان‌کاران کارا انجام گردید. در مرحله آخر ارایه راهکارهای مناسب برای بالا بردن کارایی پیمان‌کاران ناکارا ارایه گردید. در مطالعه‌ای ثابت مطلق و همکاران [۱۲] از مفهوم نظریه خاکستری در ارزیابی و انتخاب تامین‌کنندگان استراتژیک استفاده کردند. در این مطالعه تلاش شده است تا از یک رویکرد ترکیبی مبتنی بر فرآیند تحلیل سلسله مراتبی و تاپسیس خاکستری برای ارزیابی و انتخاب تامین‌کنندگان استفاده شود. جباری و

همکاران [۱۳] در مقاله‌ای با عنوان ارزیابی عملکرد و انتخاب پرتفوی از صندوق‌های سرمایه‌گذاری سهام از مفهوم نظریه سیستم‌های خاکستری در تعیین مدل مناسب تصمیم‌گیری برای سرمایه‌گذاری با توجه به‌اندازه‌ی کوچک نمونه و نقص اطلاعات استفاده کردند که درنهایت نسبت سرمایه‌گذاری در هر صندوق با ارایه برنامه‌ریزی خطی خاکستری و برنامه‌ریزی عدد صحیح تعیین شد.

تاکنون استفاده چندانی از برنامه‌ریزی خطی خاکستری در تنظیم جیره دام نشده است اما مطالعات زیادی در زمینه تنظیم جیره خوراکی دام با استفاده از برنامه‌ریزی خطی و برنامه‌ریزی خطی فازی صورت گرفته که از جمله این پژوهش‌ها می‌توان به مطالعه اقدس طینت و همکاران [۱۴] اشاره کرد که به تنظیم جیره جوجه‌های گوشتی در فاصله ۳ تا ۶ هفتگی با استفاده از برنامه‌ریزی خطی فازی متقارن پرداختند. آن‌ها با استفاده از ۱۲ ماده خوراکی، ۱۱ مورد برای تامین شدن را مدنظر داشتند که شش جیره مختلف فازی باقیمت‌های مختلف را به دست آمد که همگی خوب، اما درجه خوبی آن‌ها متفاوت بوده است. کدنز و همکاران [۱۵] کاربرد بهینه‌سازی فازی در مساله جیره خوراکی در مزارع آرژانتین را ارایه کرده و نرم‌افزاری را هم تهیه کردند که قابلیت‌های فراوانی ازجمله پیشنهاد جیره‌های مختلف با میزان اقناع احتیاجات جیره، قیمت و میزان برآورده شدن قیود داشت. در این زمینه یاقوتی خراسانی و بخشوده [۱۶] در مطالعه‌ای با عنوان تعیین ترکیب بهینه جیره غذایی گاو شیری با روش برنامه‌ریزی فازی که در شرکت سهامی زراعی تربت‌جام صورت گرفته است، ذکر کرده‌اند که یکی از اقلام عمده هزینه در واحدهای دامپروری هزینه خوراک دام است که با گزینش یک جیره مناسب و با در نظر گرفتن نهاده‌های در دسترس می‌توان هزینه‌ها را کاهش داد. در این مطالعه به‌منظور تهیه یک جیره انعطاف‌پذیر به روش فازی ابتدا یک برنامه بهینه با استفاده از روش برنامه‌ریزی خطی تهیه شد. نتایج مقایسه دو روش قاطع و فازی نشان می‌دهد که جیره‌های به‌دست‌آمده از دو روش به مقدار زیادی مشابه هستند و به مقدار اندکی تفاوت دارند و هزینه‌های روش فازی کم‌تر از روش‌های قاطع است. درویشی سلوکلایی و همکاران [۱۷] در مطالعه‌ای که عنوان آن کاربرد بهینه‌سازی فازی در تنظیم جیره خوراکی گاوهای شیری است به جیره‌نویسی با روش برنامه‌ریزی ریاضی فازی پرداخته‌اند و نتایج حاصل از این جیره‌نویسی را با روش برنامه‌ریزی خطی قطعی مقایسه کرده‌اند در مجموع در این مطالعه نتیجه گرفته‌شده است که با توجه به مفاهیم مربوط به مجموعه‌ها و اعداد فازی، استفاده از این روش در تنظیم جیره بسیار مفیدتر و واقع‌بینانه‌تر خواهد بود.

در این مطالعه، با توجه به عدم قطعیت موجود در مساله جیره‌نویسی دام و مزیت‌های نظریه سیستم‌های خاکستری، تنظیم مواد مغذی جیره خوراکی جوجه‌های گوشتی با استفاده از روش برنامه‌ریزی مکانی انجام و نتایج آن با نتایج مدل برنامه‌ریزی خطی معمولی، فازی، بازه‌ای مقایسه شدند. همچنین با استفاده از این روش می‌توان جواب‌های بهینه متفاوتی با توجه به انعطاف نظر مدیر به دست آورد. به این منظور پس از بیان مقدمه در بخش دوم مروری بر نظریه سیستم‌های خاکستری و اعداد و عملگرهای خاکستری ارایه می‌شود. در بخش سوم مساله برنامه‌ریزی خطی با پارامترهای خاکستری و برنامه‌ریزی مکانی بیان می‌شود. در بخش چهارم رویکردهای مختلف ریاضی و عدم قطعیت در جیره‌نویسی دام بیان و نتایج حاصل مقایسه می‌شوند. در بخش پنجم نیز نتایج و پیشنهادات مطرح‌شده است.

۲ نظریه سیستم‌های خاکستری

پروفسور جولانگ دنگ، پژوهشگر چینی در سال ۱۹۸۲، نظریه سیستم‌های خاکستری را معرفی نمود که کاربردهای آن امروزه در پنج حوزه ارزیابی، مدل‌سازی، پیش‌بینی، تصمیم‌گیری و کنترل قابل دسته‌بندی است [۱۸]. اتخاذ تصمیمات درست نیازمند وجود اطلاعات کافی می‌باشد که در عمل کم‌تر سیستمی را می‌توان یافت که تمام اطلاعات آن شناخته‌شده باشند. چراکه تعیین تمام اجزا و روابط بین آن‌ها در بیش‌تر سیستم‌ها یا غیرممکن بوده و یا بسیار پرهزینه و غیراقتصادی می‌باشد. اگر اطلاعات واضح و شفاف یک سیستم را با رنگ سفید و اطلاعات کاملاً ناشناخته یک سیستم با رنگ سیاه تجسم شود، در این صورت اطلاعات مربوط به بیش‌تر سیستم‌های موجود در طبیعت اطلاعات سفید (کاملاً شناخته‌شده) و یا سیاه (کاملاً ناشناخته) نیستند بلکه مخلوطی از آن دو یعنی به رنگ خاکستری هستند. این گونه سیستم‌ها را سیستم‌های خاکستری می‌نامند که اصلی‌ترین مشخصه آن‌ها، کامل نبودن اطلاعات مربوط به آن سیستم است. هر سیستم خاکستری به‌وسیله اعداد خاکستری، معادلات خاکستری و ماتریس‌های خاکستری توصیف می‌شود که در این میان اعداد خاکستری به‌مثابه اتم‌ها و سلول‌های این سیستم هستند.

عدد خاکستری می‌تواند به‌عنوان عددی با اطلاعات نامطمئن تعریف شود. یک عدد خاکستری می‌تواند به‌صورت $\otimes\in[a,b]$ تعریف شود؛ به‌عبارت‌دیگر عدد خاکستری به عددی اطلاق می‌شود که مقدار دقیق آن نامشخص است اما بازه‌ای که مقدار آن را در برمی‌گیرد شناخته‌شده است. طبق تعریف لی و همکاران [۱۸]، اعداد خاکستری را می‌توان به‌صورت زیر تعریف نمود:

فرض کنیم X مجموعه مرجع باشد. آنگاه مجموعه خاکستری G از مجموعه مرجع X با دو نماد $\bar{\mu}_{\mathrm{G}}(\mathrm{x})$ و $\underline{\mu}_{\mathrm{G}}(\mathrm{x})$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\bar{\mu}_G(x): x\rightarrow[۰,۱]$$
$$\underline{\mu}_G(x): x\rightarrow[۰,۱]$$

که در آن $\bar{\mu}_{\mathrm{G}}(\mathrm{x})\geq\underline{\mu}_{\mathrm{G}}(\mathrm{x})$ و $\mathrm{x}\in\mathrm{X}$ و $\mathrm{X}=\mathrm{R}$ می‌باشد.

$\bar{\mu}_{\mathrm{G}}(\mathrm{x})$ و $\underline{\mu}_{\mathrm{G}}(\mathrm{x})$ به ترتیب حد بالا و حد پایین از تابع عضویت G می‌باشند. شایان‌ذکر است که در حالت تساوی مجموعه خاکستری G تبدیل به مجموعه فازی می‌شود که نشان‌دهنده شمول نظریه خاکستری به حالت‌های فازی و انعطاف آن در مواجهه با مسایل فازی است [۱۸]. اعداد خاکستری می‌توانند فقط با کران پایین به شکل $\otimes\in[\underline{a},\infty)$ یا فقط با کران بالا به شکل $\otimes\in(-\infty,\bar{a}]$ باشند و یا این‌که هم دارای کران پایین $\underline{a}$ و هم دارای کران بالا $\bar{a}$ باشند که در این صورت عدد خاکستری بازه‌ای نامیده می‌شود و به‌صورت $\otimes\in[\underline{a},\bar{a}]$ نمایش داده می‌شود. به‌عنوان نمونه، وزن یک بسته که بین ۲۰ تا ۲۵ کیلوگرم می‌باشد و یا اندازه قد یک مرد که بین ۱/۸ تا ۱/۹ متر می‌باشد، نمونه‌هایی از اعداد خاکستری بازه‌ای هستند که به ترتیب به شکل $\otimes_۱\in[۲۰,۲۵]$ و $\otimes_۲\in[۱/۸,۱/۹]$ نوشته می‌شوند.

هرگاه دو عدد خاکستری $\otimes_۱\in[a,b], \otimes_۲\in[c,d]$ مفروض باشند در این صورت روابط میان عملگرهای بازه‌ای گسترش‌یافته برای اعداد خاکستری به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

۱) جمع دو عدد خاکستری: $\otimes_1 + \otimes_2 \in [a+c, b+d]$

۲) تفریق دو عدد خاکستری: $\otimes_1 - \otimes_2 = \otimes_1 + (-\otimes_2) \in [a-d, b-c]$

۳) قرینه یک عدد خاکستری: $-\otimes_1 = [-b, -a]$

۴) معکوس یک عدد خاکستری: $\otimes^{-1} \in [\frac{1}{b}, \frac{1}{a}]$

۵) ضرب دو عدد خاکستری: $\otimes_1 \cdot \otimes_2 \in [Min\{ac, ad, bc, bd\}, Max\{ac, ad, bc, bd\}]$

۶) تقسیم دو عدد خاکستری: $\frac{\otimes_1}{\otimes_2} = \otimes_1 \cdot \otimes_2^{-1}$

$$\frac{\otimes_1}{\otimes_2} \in [Min\{\frac{a}{c}, \frac{a}{d}, \frac{b}{c}, \frac{b}{d}\}, Max\{\frac{a}{c}, \frac{a}{d}, \frac{b}{c}, \frac{b}{d}\}]$$

هرگاه k یک عدد حقیقی مثبت باشد، ضرب عددی آن در مجموعه خاکستری به‌صورت زیر خواهد بود:

$$K \in \Re^+, K \cdot \otimes_1 \in [Ka, Kb]$$

طول عدد خاکستری که با نماد $L(\otimes_1)$ نشان داده می‌شود به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$L(\otimes_1) = [b-a]$$

برای مقایسه دو عدد خاکستری از مفهوم درجه امکان خاکستری استفاده می‌شود. هرگاه $\otimes_1 \in [a,b]$ $a < b$ و $c < d$، $\otimes_2 \in [a,b]$ دو عدد خاکستری باشند درجه امکان خاکستری $\otimes_1 \leq \otimes_2$ به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$P\{\otimes_1 \leq \otimes_2\} = \frac{Max(0, L^* - Max(0, b-c))}{L^*}$$

که در آن $L^* = L(\otimes_1) + L(\otimes_2)$ می‌باشد. با توجه به نسبت دو عدد خاکستری چهار حالت برای $\otimes_1$ و $\otimes_2$ ممکن است رخ دهد:

الف) اگر $a=c$ و $b=d$ باشد، آنگاه دو عدد خاکستری مساوی هستند ($\otimes_1 = \otimes_2$). در این صورت می‌توان نوشت: $P(\otimes_1 \leq \otimes_2) = 0/5$

ب) اگر $c>b$ باشد، آنگاه $\otimes_2 > \otimes_1$ و خواهیم داشت: $P(\otimes_1 \leq \otimes_2) = 1$

ج) اگر $d<a$ باشد، آنگاه $\otimes_1 > \otimes_2$ و خواهیم داشت: $p(\otimes_1 \leq \otimes_2) = 0$

د) اگر یک قسمت مشترک در دو عدد خاکستری وجود داشته باشد در این صورت اگر $p(\otimes_1 \leq \otimes_2) < 0/5$ باشد در این صورت گفته می‌شود که عدد $\otimes_2$ از عدد $\otimes_1$ کوچک‌تر است و اگر $p(\otimes_1 \leq \otimes_2) > 0/5$ باشد، عدد $\otimes_2$ از عدد $\otimes_1$ بزرگ‌تر است.

۳ مساله برنامه‌ریزی خطی با پارامترهای خاکستری

در این بخش به مفاهیم اولیه و برخی تعاریف مسایل برنامه‌ریزی خطی که دارای پارامترهای خاکستری بوده پرداخته و ضمن معرفی مقادیر سفید شده آن‌ها، مساله برنامه‌ریزی مکانی نیز بررسی می‌شود. شکل کلی مساله برنامه‌ریزی خطی به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
&Min\,(Max)\quad Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n\\
&s.t.\\
&\qquad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \ \geq\ (\leq)\ b_1,\\
&\qquad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \ \geq\ (\leq)\ b_2,\\
&\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots\\
&\qquad a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \ \geq\ (\leq)\ b_m,\\
&\qquad x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0.
\end{aligned}$$

حال فرض کنید

$$\begin{aligned}
X &= [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T\\
C(\otimes) &= [c_1(\otimes), c_2(\otimes), \ldots, c_n(\otimes)]^T\\
b(\otimes) &= [b_1(\otimes), b_2(\otimes), \ldots, b_m(\otimes)]^T
\end{aligned}$$

$$A(\otimes) = \begin{bmatrix} a_{11}(\otimes) & a_{12}(\otimes) & \cdots & a_{1n}(\otimes)\\ a_{21}(\otimes) & a_{21}(\otimes) & \cdots & a_{2n}(\otimes)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1}(\otimes) & a_{m2}(\otimes) & \cdots & a_{mn}(\otimes)\end{bmatrix}$$

به‌طوری که

$$\begin{aligned}
&c_j(\otimes) \in [\underline{c}_j, \overline{c}_j], \quad \underline{c}_j \geq 0, \qquad j = 1, \ldots, n,\\
&b_i(\otimes) \in [\underline{b}_i, \overline{b}_i], \quad \underline{b}_i \geq 0, \qquad i = 1, \ldots, m,\\
&a_{ij}(\otimes) \in [\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}], \quad \underline{a}_{ij} \geq 0, \qquad i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, n.
\end{aligned}$$

آنگاه

$$\begin{aligned}
&Max\ S = C(\otimes)X\\
&s.t.\\
&\quad A(\otimes)X \leq b(\otimes),\\
&\quad X \geq 0.
\end{aligned} \tag{1}$$

یک مساله برنامه‌ریزی با پارامترهای خاکستری نامیده می‌شود و $C(\otimes)$ بردار هزینه خاکستری، $A(\otimes)$ ماتریس مصرف خاکستری $b(\otimes)$ بردار محدودیت منابع خاکستری و X بردار تصمیم برنامه‌ریزی خطی با پارامترهای خاکستری می‌باشد. در حقیقت X یک بردار خاکستری است [۱۹].

تعریف ۱: فرض کنید $\rho_j, \beta_i, \delta_{ij} \in [0,1], i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n.$ و مقادیر سفید شده پارامترهای خاکستری به ترتیب به‌صورت زیر باشند:

$$\tilde{c}_j(\otimes) = \rho_j \overline{c}_j + (1-\rho_j)\underline{c}_j;\ j = 1,\dots,n.$$
$$\tilde{b}_i(\otimes) = \beta_i \overline{b}_i + (1-\beta_i)\underline{b}_i;\ i = 1,\dots,m.$$
$$\tilde{a}_{ij}(\otimes) = \delta_{ij}\overline{a}_{ij} + (1-\delta_{ij})\underline{a}_{ij};\ i = 1,\dots,m;\ j = 1,\dots,n.$$

که در آن $\tilde{A}(\otimes),\tilde{b}(\otimes),\tilde{C}(\otimes)$ به ترتیب بردار سفید شده هزینه، محدودیت منابع و ماتریس سفید شده مصرف هستند. آنگاه

$$\begin{aligned} &Max\ S = \tilde{C}(\otimes)X \\ &s.t. \\ &\quad \tilde{A}(\otimes)X \le \tilde{b}(\otimes), \\ &\quad X \ge 0. \end{aligned} \tag{2}$$

برنامه‌ریزی مکانی برنامه‌ریزی خطی با پارامترهای خاکستری نامیده می‌شود.

$\rho_j\,(j=1,\dots,n)$ ضرایب مکانی بردار هزینه، $\beta_i\,(i=1,\dots,m)$ ضرایب مکانی بردار محدودیت منابع $\delta_{ij}\,(i=1,\dots,m;\ j=1,\dots,n)$ ضرایب مکانی مصرف می‌باشد.

در تعریف فوق، ρ_j بازتاب نوسان قیمت jامین محصول می‌باشد که می‌تواند با استفاده از تحلیل بازار تعیین شود. مقادیر کوچک‌تر ρ_j نمایشگر کم‌ترین قیمت مورد انتظار از jامین محصول و مقادیر بزرگ‌تر ρ_j قیمت مورد انتظار بالاتری از jامین محصول است.

ضریب β_i بازتابی از موجودی بازار i امین منبع است. کم‌ترین مقدار β_i بیانگر کسری موجودی i امین منبع بوده و بزرگ‌ترین مقدار β_i کفایت موجودی i امین منبع را بیان می‌کند.

به‌طور مشابه کم‌ترین مقدار δ_{ij} بیانگر کم‌ترین مقدار مصرف i امین منبع برای تولید یک واحد از jامین محصول و مقادیر بزرگ‌تر δ_{ij} نشانگر بالاترین مصرف از i امین منبع برای تولید یک واحد از jامین محصول می‌باشد.

گزاره ۱: مقدار بهینه ماکزیمم S برنامه‌ریزی مکانی یک برنامه‌ریزی خطی با پارامترهای خاکستری تابعی با $m+n+mn$ متغیر $\rho_j,\beta_i,\delta_{ij}\,(i=1,\dots,m;\ j=1,\dots,n)$ می‌باشد [۱۹].

از گزاره ۱ مقدار بهینه ماکزیمم S از برنامه‌ریزی مکانی می‌تواند به‌صورت زیر نشان داده شود:

$$Max\ S = f((\rho_j,\beta_i,\delta_{ij})\,|\,i=1,\dots,m;\ j=1,\dots,n)$$

به‌طور مشابه برنامه‌ریزی مکانی آن را می‌تواند به‌صورت $LP((\rho_j,\beta_i,\delta_{ij})\,|\,i=1,\dots,m;\ j=1,\dots,n)$ نشان داد:

برای راحتی، مفروضات زیر را در نظر می‌گیریم.

فرض ۱. $rank(\tilde{A}(\otimes)) = m < n.$

فرض ۲. مجموعه متشکل از جواب‌های شدنی $LP((\rho_j,\beta_i,\delta_{ij})\,|\,i=1,\dots,m;\ j=1,\dots,n)$ ناتهی است.

فرض ۳. مجموعه $\{X\,|\,\tilde{A}(\otimes)X \le \tilde{b}(\otimes),\ X \ge 0\}$ متشکل از بردارهای حقیقی کران‌دار است.

درعین‌حال برنامه‌ریزی مکانی $((\rho_j,\beta_i,\delta_{ij})\,|\,i=1,\dots,m;\ j=1,\dots,n)$ می‌تواند به‌صورت زیر بازنویسی شود:

$$
\begin{aligned}
& Max\ S=[\tilde{C}_B(\otimes),\tilde{C}_N(\otimes)]\begin{bmatrix}X_B\\X_N\end{bmatrix}\\
& s.t.\\
& \quad [\tilde{B}(\otimes),\tilde{N}(\otimes)]\begin{bmatrix}X_B\\X_N\end{bmatrix}\le \tilde{b}(\otimes),\\
& \quad X_B,X_N\ge 0.
\end{aligned}
\qquad (۳)
$$

یعنی، m ستون اول ماتریس سفید شده مصرف $\tilde{A}(\otimes)$ ماتریس پایه $\tilde{B}(\otimes)$ می‌باشند و n-m ستون دیگر $\tilde{N}(\otimes)$ غیر پایه‌ای می‌باشند. بردارهای پایه‌ای و غیر پایه‌ای متناظر با $\tilde{B}(\otimes)$ و $\tilde{N}(\otimes)$ به ترتیب X_B و X_N می‌باشند. همچنین بردارهای سفید شده هزینه متناظر با X_B و X_N به ترتیب به‌صورت $\tilde{C}_N(\otimes)$, $\tilde{C}_B(\otimes)$ نوشته می‌شوند. از فرض ۳ و با توجه به اینکه $X_N=0$، بدیهی است که

$$
\begin{aligned}
& X=[X_B,X_N]^T=\left[\tilde{B}^{-1}(\otimes)\tilde{b}(\otimes),0\right]^T\\
& S=\tilde{C}_B(\otimes)\tilde{B}^{-1}(\otimes)\tilde{b}(\otimes)
\end{aligned}
$$

و بردار آزمون بهینگی به‌صورت زیر است:

$$
r=\tilde{C}_B(\otimes)-\tilde{C}_B(\otimes)\tilde{B}^{-1}(\otimes)\tilde{A}(\otimes)
$$

گزاره ۲: فرض کنید برنامه‌ریزی مکانی (۳) مفروضات ۲،۱ و ۳ بالا را برآورده می‌سازد و $X=[x_1,x_2,\dots,x_n]^T$ یک جواب پایه‌ای از برنامه‌ریزی مکانی (۳) باشد. آنگاه $\{x_j \mid j=1,\dots,n\}$ کران‌دار است [۱۹].

گزاره ۳: حداقل یک جواب شدنی پایه‌ای برای مساله برنامه‌ریزی مکانی $LP((\rho_j,\beta_i,\delta_{ij})$ $(i=1,\dots,m;\ j=1,\dots,n)$ وجود دارد که در مفروضات ۲،۱ و ۳ صدق می‌کند [۱۹].

برنامه‌ریزی خطی با پارامترهای خاکستری همچنین برنامه‌ریزی خطی شناور خاکستری نیز نامیده می‌شود. در حقیقت، یک مساله برنامه‌ریزی خطی با پارامترهای خاکستری، مجموعه‌ای مرکب از تعدادی مسایل معمولی از برنامه‌ریزی خطی است. فرض می‌کنیم بردارها و ماتریس‌های سفید شده داده‌شده در زیر خاصیت نامنفی بودن را حفظ می‌کنند.

$$
\begin{aligned}
& Max\ S=[\tilde{C}_B(\otimes),\tilde{C}_N(\otimes)]\begin{bmatrix}X_B\\X_N\end{bmatrix}\\
& s.t.\\
& \quad [\tilde{B}(\otimes),\tilde{N}(\otimes)]\begin{bmatrix}X_B\\X_N\end{bmatrix}\le \tilde{b}(\otimes),\\
& \quad X_B,X_N\ge 0.
\end{aligned}
$$

تعریف ۲: فرض کنید بـرای هـر $i=1,...,m$ و $j=1,...,n$ داشته باشیم: $\rho_j=\rho,\ \beta_i=\beta,\ \delta_{ij}=\delta$ آنگـاه برنامه‌ریزی مکانی متناظر (ρ,β,δ)-برنامـه‌ریـزی مکـانی نامیـده مـی‌شـود و بـه‌صـورت $LP(\rho,\beta,\delta)$ نوشـته می‌شود. مقدار بهینه آن با ماکزیمم $S(\rho,\beta,\delta)$ نمایش داده و مقدار بهینه (ρ,β,δ)- مکانی نامیده می‌شود.

قضیه‌ی ۱[۱۹]: برای برنامه‌ریزی مکانی $LP(\rho,\beta,\delta)$ داریم:

۱) هنگامی که $\rho=\rho_0,\beta=\beta_0,\delta_1\le\delta_2$ آنگاه $Max\,S(\rho_0,\beta_0,\delta_1)\ge Max\,S(\rho_0,\beta_0,\delta_2)$.

۲) هنگامی که $\rho_1\le\rho_2,\beta=\beta_0,\delta=\delta_0$ آنگاه $Max\,S(\rho_1,\beta_0,\delta_0)\ge Max\,S(\rho_2,\beta_0,\delta_0)$.

۳) هنگامی که $\rho=\rho_0,\beta_1\le\beta_2,\delta=\delta_0$ آنگاه $Max\,S(\rho_0,\beta_1,\delta_0)\ge Max\,S(\rho_0,\beta_2,\delta_0)$.

در اینجا ρ نشانگر سطح هزینه کلی n نوع از محصولات، β بیانگر وضـعیت کلـی عرضـه m نـوع منـابع و همچنین δ بازتاب جامع از سطوح روش صنعتی، اندازه نیروی کار و سطوح مدیریتی کاربردی در تولید می‌باشد.

تعریف ۳: زمانی که $\rho=\beta=1,\delta=0$، برنامه‌ریزی مکانی متناظر آن $LP(1,1,0)$ یک مدل ایده آل برای مساله برنامه‌ریزی خطی با پارامترهای خاکستری نامیده می‌شود که مقدار بهینه آن به‌صورت $Max\,\overline{S}$ نوشته می‌شود.

تعریف ٤: وقتی $\rho=\beta=0,\delta=1$، برنامه‌ریزی مکانی متناظر آن $LP(0,0,1)$ یـک مـدل بحرانـی بـرای مسـاله برنامه‌ریزی خطی با پارامترهای خاکستری نامیده می‌شود که مقدار بهینه آن به‌صورت $Max\,\underline{S}$ نوشته می‌شود.

تعریف ٥: هنگامی که $\rho=\beta=\delta=\theta$، برنامه‌ریزی مکانی متناظر یک برنامه‌ریزی θ-مکانی نامیـده مـی‌شـود و بـا $LP(\theta)$ نشـان مـی‌دهنـد. بـه‌طـور مشـابه، مقـدار بهینـه آن بـه‌صـورت $Max\,S(\theta)$ نوشـته و مقـدار بهینـه θ-مکانی نامیده می‌شود. به‌ویژه زمانی که $\theta=0/5$، برنامـه‌ریـزی θ-مکـانی متنـاظر $LP(0/5)$ برنامـه‌ریـزی سفید شده متوسط نامیده می‌شود.

به‌طورکلی، برنامه‌ریزی سفید شده متوسط رایج‌ترین نوع از برنامه‌ریزی خطی با پارامترهای خاکستری است.

قضیه‌ی ۲[۱۹]: برای هر $\rho,\beta,\delta\in[0,1]$ خواهیم داشت:

۱) $Max\,\underline{S}\le MaxS(\rho,\beta,\delta)\le Max\overline{S}$

۲) $Max\,\underline{S}\le Max\,S(\theta)\le Max\,\overline{S}$

اثبات: تنها به اثبات (۱) می‌پردازیم. اثبات دومین گزاره مشابه (۱) می‌باشد که از بیان آن صرف‌نظر می‌شود.

ازآنجایی که $0\le\rho\le1,0\le\beta\le1,0\le\delta\le1$ از قضیه ۱ نتیجه می‌شود که

$$Max\,\underline{S}=Max\,S(0,0,1)\le Max\,S(\rho,0,1)\le Max\,S(\rho,\beta,1)\le Max\,S(\rho,\beta,\delta).$$

به‌طور مشابه می‌توان نشان داد: $Max\,S(\rho,\beta,\delta)\le Max\,\overline{S}$.

٤ ارایه مدل خاکستری و مقایسه آن با مدل‌های ریاضی در تنظیم جیره دام

در این بخش چهار مساله مدل‌سازی آورده می‌شود تا با مثال ضرورت استفاده از رویکرد سیسـتم هـای خاکسـتری در مدل‌سازی ریاضی توصیف گردد.

مساله ۱: (بیان مساله به فرم برنامه‌ریزی خطی کلاسیک) دریک مرغداری ۱۰۰۰ جوجه نگهداری می‌شوند که برای خوراک آن‌ها از دو نوع ماده خوراکی سویا و ارزن استفاده می‌شود. هر جوجه ۱/۱۵ کیلوگرم غذا در روز می‌خورد و روزانه حداقل ۰/۲۲ کیلوگرم پروتئین و ۰/۰۰۵ کیلوگرم کلسیم نیاز دارد. همچنین هر کیلوگرم سویا ۵۰ درصد پروتئین و ۰/۶۵ درصد کلسیم دارد. قیمت هر کیلوگرم آن ۰/۴ دلار است. هر کیلوگرم ارزن شامل ۱۰ درصد پروتئین و ۰/۳ درصد کلسیم است و قیمت هر کیلوگرم آن ۰/۲ دلار می‌باشد. ارزن و سویا به چه نسبتی باید مخلوط شوند تا هزینه خوراک دام حداقل گردد؟

هرگاه x_1 مقدار سویا و x_2 مقدار ارزن موردنیاز برحسب کیلوگرم باشد، مدل مساله به‌صورت زیر خواهد بود:

$$
\begin{aligned}
&Min\ \ Z = 0.40x_1 + 0.20x_2 \\
&s.t. \\
&\qquad x_1 + x_2 = 1150, \\
&\qquad 0.5x_1 + 0.10x_2 \geq 220, \\
&\qquad 0.0065x_1 + 0.003x_2 \geq 5, \\
&\qquad x_1, x_2 \geq 0.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

مساله ۲: (بیان مساله به فرم برنامه‌ریزی خطی فازی) در یک مرغداری ۱۰۰۰ جوجه نگهداری می‌شوند که برای خوراک آن‌ها از دو نوع ماده خوراکی سویا و ارزن استفاده می‌شود. هر جوجه در حدود ۱/۱۵ کیلوگرم غذا در روز می‌خورد و روزانه حداقل ۰/۲۲ کیلوگرم پروتئین و در حدود ۰/۰۰۵ کیلوگرم کلسیم نیاز دارد. همچنین هر کیلوگرم سویا در حدود ۵۰ درصد پروتئین و در حدود ۰/۶۵ درصد کلسیم دارد. قیمت هر کیلوگرم آن در حدود ۰/۴ دلار است. هر کیلوگرم ارزن شامل تقریباً ۱۰ درصد پروتئین و تقریباً ۰/۳ درصد کلسیم است و قیمت هر کیلوگرم آن ۰/۲ دلار می‌باشد. ارزن و سویا به چه نسبتی باید مخلوط شوند تا هزینه خوراک دام حداقل گردد؟ کم‌ترین هزینه چقدر است؟

درصورتی‌که x_1 مقدار سویا و x_2 مقدار ارزن موردنیاز برحسب کیلوگرم باشد، خواهیم داشت:

$$
\begin{aligned}
&Min\ \ Z = \overline{0.40}\ x_1 + 0.20\ x_2 \\
&s.t. \\
&\qquad x_1 + x_2 = \overline{1150}, \\
&\qquad \overline{0.5}x_1 + \overline{0.10}\ x_2 \geq \overline{220}, \\
&\qquad \overline{0.0065}x_1 + 0.003x_2 \geq \bar{5}, \\
&\qquad x_1, x_2 \geq 0.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

که در آن $\overline{0.40}$ به‌عنوان یک عدد فازی است. این مدل، یک مساله برنامه‌ریزی خطی با ضرایب فازی محسوب می‌شود.

مساله ۳: (بیان مساله به فرم برنامه‌ریزی بازه‌ای) در یک مرغداری ۱۰۰۰ جوجه نگهداری می‌شود که برای تهیه خوراک آن‌ها از دو نوع ماده سویا و ارزن استفاده می‌گردد. هر جوجه ۱/۳–۱ کیلوگرم سویا و ارزن در روز

می‌خورد و روزانـه حـداقل بـه ۰/۲۳–۰/۲۱ کیلـوگرم پـروتئین و ۰/۰۰۶–۰/۰۰۴ کیلـوگرم کلسـیم نیـاز دارد. هـر کیلـوگرم از سـویا شـامل ۵۲–۴۸ درصـد پـروتئین و ۰/۸– ۰/۵ درصـد کلسـیم مـی‌باشـد. قیمـت هـر کیلـوگرم ۰/۴۲–۰/۳۸ دلار است. هر کیلوگرم از ارزن شامل ۱۱/۵–۸/۵ درصد پروتئین و ۰/۳ درصد کلسیم مـی‌باشـد کـه قیمت هر کیلوگرم آن ۰/۲ دلار می‌باشد. ارزن و سویا به چه نسبتی باید مخلوط شوند تا هزینه خوراک مرغـداری حداقل گردد؟ کم‌ترین هزینه چقدر است؟

واضح است که پارامترها در مساله بهینـه‌سـازی فـوق اعـداد بـازه‌ای هسـتند کـه بـرای حـل آن بایـد مسـایل بی‌شماری را بهینه‌سازی نمود؛ لذا از روش‌های معمولی برنامـه‌ریـزی خطـی نمـی‌تـوان آن را حـل نمـود و نیـاز بـه روش‌های مناسب‌تری است. ازاین‌رو مساله را به‌صورت قالب برنامه‌ریزی بازه‌ای ذیل بیان می‌کنیم:

هرگاه x_1 مقدار سویا و x_2 مقدار ارزن موردنیاز برحسب کیلوگرم باشد، خواهیم داشت:

$$
\begin{aligned}
&Min\ \ Z=[0/38,0/42]x_1+0/20x_2\\
&s.t.\\
&\qquad x_1+x_2=[1000,1300],\\
&\qquad [0/48,0/52]x_1+[0/085,0/115]x_2\geq[210,230],\\
&\qquad [0/005,0/008]x_1+0/003x_2\geq[4,6],\\
&\qquad x_1,x_2\geq 0.
\end{aligned}
\qquad (6)
$$

که در آن $[0/38,0/42]$ عدد بازه‌ای نامیده می‌شود و $0/20=[0/20\ ,\ 0/20]$.

مساله ٤: (توصیف مساله از نگاه برنامه‌ریزی خاکستری) ۱۰۰۰ جوجه در مزرعه پرورش جوجه که دو نوع علوفـه سویا و ارزن مصرف می‌کنند، وجود دارند. چون شرایط برای هر جوجه متفاوت است، نمی‌توان اطلاعـات کـافی را به‌منظور محاسبه مقدار ارزن واقعی که هر جوجه روزانه بـه آن نیـاز دارد را جمع‌آوری کـرد. اگرچـه، بررسـی روش‌های مناسب نشان مـی‌دهـد مقـدار واقعـی علوفـه‌ای کـه یـک جوجـه در روز بایـد بخـورد در دامنـه ۱/۳-۱ کیلوگرم می‌باشد و علوفه موردنیاز همه جوجه‌ها در روز خیلی مشابه است. بـرای بـه دسـت آوردن وزن مناسـب، هر جوجه به مقادیر مختلفی از پروتئین و کلسیم نیاز دارد. همچنین مقدار واقعی که هر جوجه روزانه به پـروتئین و کلسیم نیاز دارد را نمی‌دانیم زیرا شرایط متفاوت است؛ اما با مشاهدات عملی می‌تـوان مشـخص کـرد کـه مقـادیر واقعی پروتئین و کلسیم مصرفی هر جوجه به ترتیـب ۰/۲۳-۰/۲۱ کیلـوگرم مـی‌باشـد. بـه‌عـلاوه، بـه خـاطر اینکـه شرایط تولید استفاده‌شده توسط هر تولیدکننده متفاوت است مقدار واقعی پـروتئین و کلسـیم سـویا را نمـی‌دانـیم؛ بنابراین آن‌ها به ترتیب میان بازه [۰/۴۸،۰/۵۲] و [۰/۰۰۵،۰/۰۰۸] هستند. قیمت واقعـی سـویا در یـک روز خـاص معلوم نیست به خاطر پیچیدگی بازار، اما باید بین ۰/۳۸ تا ۰/۴۲ دلار باشد. به دلایل مشابه، مقدار واقعـی پروتئینـی که ارزن دارد بین [۰/۱۱۵، ۰/۰۸۵] کیلوگرم و مقـدار کلسـیم واقعـی آن ۰/۰۰۳ کیلـوگرم و قیمـت آن ۰/۲ دلار برای هر کیلوگرم می‌باشد. علوفه چطور باید مخلوط شود که هزینه آن برای یک روز خاص مینیمم شود؟

برای مساله‌های مشابه، از نگاه بازه مقادیر طولانی‌مدت بررسی می‌شود درحالی‌که از دید خاکسـتری مقـادیر فقط برای یک روز بررسی می‌شوند. گذشته از یک‌زمـان طـولانی، هـر مقـدار در دامنـه داده‌هـا از مسـایل بـازه‌ای

می‌تواند درست باشد بنابراین دامنه همه داده‌ها بازه‌ها هستند. برای یک روز، مقدار واقعی داده می‌تواند تنها یک مقدار باشد و نمی‌توان به خاطر اطلاعات ضعیف آن را مشخص کرد. اگرچه می‌توان دامنه تغییرات آن را با استفاده از روش‌های بررسی مناسب مشخص کرد. این نکته قابل‌ذکر است که مقدار واقعی یک متغیر در روز دیگر ممکن متفاوت باشد، حتی اگر دامنه یکسانی به دست آوریم. برای مثال، یک جوجه را در نظر بگیرید که ۰/۲۲۲ کیلوگرم پروتئین در یک روز و ۰/۲۲۳ کیلوگرم در روز بعدی مصرف می‌کند. هردوی ۰/۲۲۲ و ۰/۲۲۳ متعلق به بازه [۰/۲۳، ۰/۲۱] می‌باشند اما مقادیر واقعی متفاوت هستند. اگر هزینه واقعی سویا در یک روز مشخص نباشد آنگاه قیمت آن‌یک عدد خاکستری است. با استفاده از روش‌های بررسی مناسب می‌توان تخمینی از دامنه [۰/۴۲، ۰/۳۸] را به دست آورد و اطمینان داد که قیمت واقعی باید در این بازه قرار داشته باشد. در این صورت به این بازه مجموعه عدد پوشاننده می‌گویند؛ اما یک عدد بازه‌ای است. به‌طور مشابه برای متغیرهای دیگر هم این موضوع صادق است. حال اگر x_1 مقدار سویا و x_2 مقدار ارزن موردنیاز برحسب کیلوگرم باشد، مدل خاکستری آن به‌صورت زیر خواهد بود:

$$
\begin{aligned}
& Min\ \ Z = c_1(\otimes)x_1 + 0.2x_2 \\
& s.t. \\
& \qquad x_1 + x_2 = b_1(\otimes), \\
& \qquad a_{21}(\otimes)x_1 + a_{22}(\otimes)x_2 \geq b_2(\otimes), \\
& \qquad a_{31}(\otimes)x_1 + 0.003x_2 \geq b_3(\otimes), \\
& \qquad x_1, x_2 \geq 0.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

مدل پوشاننده رابطه فوق به‌صورت زیر خواهد بود:

$$
\begin{aligned}
& Min\ \ Z = [0.38, 0.42]x_1 + 0.20x_2 \\
& s.t. \\
& \qquad x_1 + x_2 = [1000, 1300], \\
& \qquad [0.48, 0.52]x_1 + [0.085, 0.115]x_2 \geq [210, 230], \\
& \qquad [0.005, 0.008]x_1 + 0.003x_2 \geq [4, 6], \\
& \qquad x_1, x_2 \geq 0.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

ظاهراً معادله (۶) و (۷) یکسان هستند. هرچند مدل پوشاننده رابطه (۸) متفاوت از مدل رابطه (۶) است. وقتی‌که اطلاعات بیش‌تری جمع‌آوری شود مدل پوشاننده ممکن است تغییر کند و تنها یک فرم نمایش از رابطه (۷) است. مدل واقعی تنها یکی از موارد داخل مدل پوشاننده است و آن تنها مدل بالقوه واقعی نامیده می‌شود. با اضافه شدن اطلاعات، مدل پوشاننده ممکن است تغییر کند اما مدل بالقوه واقعی تغییر نمی‌کند و در بین مدل پوشاننده جدید قرار می‌گیرد. درحالی‌که مدل بازه‌ای ثابت است. هر مدل مشخص بین آن صحیح است و همه آن‌ها مربوط به یک واقعیت خاص برای روزهای متفاوت می‌باشند.

مساله‌های بیان‌شده با رویکردهای متفاوت برنامه‌ریزی خطی ساده، برنامه‌ریزی خطی بازه‌ای، برنامه‌ریزی خطی فازی و برنامه‌ریزی خطی خاکستری را با روش‌های معمول مربوطه حل‌شده و جواب‌های به‌دست‌آمده در جدول زیر آورده شده است:

جدول ۱. مقایسه جواب رویکردهای قطعی، فازی، بازه‌ای و خاکستری مساله جیره خوراکی

نوع مساله	x_1	x_2	Z
برنامه‌ریزی خطی کلاسیک	۴۴۲/۸۶	۷۰۷/۱۷	۳۱۸/۵۷
برنامه‌ریزی خطی فازی (تانگ شوچنگ)	۳۹۷	۵۶۴	[۲۲۸, ۳۴۶]
برنامه‌ریزی خطی بازه‌ای (تانگ شوچنگ)	[۲۳۴/۵۷, ۱۰۵۰]	[۲۵۰, ۷۶۵/۴۳]	[۲۴۲/۲۲, ۴۹۱]
برنامه‌ریزی خطی خاکستری (جواب پوشاننده)	[۲۸۱, ۸۲۶/۸۵]	[۲۶۳/۱۵, ۸۱۹]	[۱۵۹/۴۱, ۵۰۲/۸۱]

بر اساس نتایج جدول ۱ مشاهده می‌شود که مدل برنامه‌ریزی خطی با روش سادک حل‌شده، جواب قطعی و مقدار بهینه آن در سطر اول جدول آمده است. تانگ شوچنگ [۲۰] یک جواب برای مدل برنامه‌ریزی بازه‌ای و فازی مساله را به دست آورد و نشان داده است که می‌توان مساله را با انعطاف بیش‌تری حل کرد. لی و همکاران [۱۰] یک جواب پوششی برای مساله با رویکرد خاکستری به دست آوردند که در سطر آخر جدول آمده است.

حال به‌منظور حل مساله برنامه‌ریزی خطی خاکستری با روش برنامه‌ریزی مکانی ابتدا مقادیر سفید شده پارامترهای خاکستری را نوشته سپس جواب مساله به ازای مقادیر مختلف ρ، β و δ محاسبه می‌شود. مدل برنامه‌ریزی خطی سفید شده مساله برنامه‌ریزی خطی با پارامترهای خاکستری مساله جیره فوق به‌صورت زیر می‌باشد:

$$
\begin{aligned}
&Min\ \ Z=(0/42\rho_1+0/38(1-\rho_1))x_1+0/2x_2\\
&s.t.\\
&\quad x_1+x_2=1300\beta_1+1000(1-\beta_1),\\
&\quad (0/52\delta_{21}+0/48(1-\delta_{21}))x_1+(0/115\delta_{22}+0/085(1-\delta_{22}))x_2\geq 230\beta_2+210(1-\beta_2),\\
&\quad (0/008\delta_{31}+0/005(1-\delta_{31}))x_1+0/003x_2\geq 6\beta_3+4(1-\beta_3),\\
&\quad x_1,x_2\geq 0.
\end{aligned}
$$

ضرایب هر یک از پارامترهای سفید شده را می‌توان به‌صورت جداگانه اعمال کرد که برای سهولت و بدون از دادن کلیت، ضرایب پارامترهای هزینه ρ و ضرایب پارامترهای منابع β و ضرایب پارامترهای تکنولوژیکی δ در نظر گرفته‌شده است. مدل‌های روش برنامه‌ریزی مکانی با مقادیر مختلف ρ، β و δ و با استفاده از نرم‌افزار GAMS حل‌شده و جواب‌های به‌دست‌آمده در جدول ۲ آمده است.

نتایج جدول ۲ نشان می‌دهد که بهترین مقدار جواب (ایده‌آل) برابر ۴۹۱ و بحرانی‌ترین مقدار جواب ۲۴۲/۲۲ می‌باشد که شباهت زیادی به جواب مدل بازه‌ای دارد. مقدار جواب برنامه‌ریزی سفید شده متوسط ۳۲۲/۸۶ به‌دست‌آمده است که خیلی نزدیک به روش برنامه‌ریزی خطی می‌باشد. مشاهده می‌شود مقدار ضرایب در پارامترهای سفیده شده به‌طور مستقیم بر روی مقدار جواب نهایی تاثیرگذار است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود در جدول ۲ مجموعه‌ای از جواب‌ها وجود دارد که همگی در دامنه قابل قبولی بوده، اما میزان مناسب بودن آن‌ها متفاوت است. در این میان می‌توان بررسی کرد که بیش‌تر بودن کدام ضریب‌ها می‌تواند روی مقدار

بهینه تاثیر بیش‌تری داشته باشد. درکل حالات بسیار زیادی را می‌توان در نظر گرفت که ما فقط چند نمونه از آن را بررسی نموده‌ایم.

جدول ۲. جواب برنامه‌ریزی مکانی مساله جیره با ازای مقادیر مختلف

(ρ,β,δ)	x_1	x_2	Z
(۰,۰,۱)	۲۳۴/۵۷	۷۵۶/۴۳	۲۴۲/۲۲
(۱,۱,۰)	۱۰۵۰	۲۵۰	۴۹۱
(۰/۵,۰/۵,۰/۵)	۳۱۴/۲۹	۹۸۵/۷۱	۳۲۲/۸۶
(۰/۳,۰/۳,۰/۳)	۳۲۰/۶۹	۷۶۹/۳۱	۲۷۹/۵۷
(۰/۸,۰/۸,۰/۸)	۵۲۹/۵۵	۵۶۰/۴۶	۳۳۰/۲۶
(۰/۸,۰/۵,۰/۳)	۵۹۶/۵۵	۴۹۳/۴۵	۳۴۴/۴۷
(۰/۷,۰/۹,۰/۵)	۵۶۸/۵۷	۷۰۱/۴۳	۳۷۲/۲۶
(۰/۳,۰/۵,۰/۸)	۳۵۲/۲۷	۷۹۷/۷۳	۲۹۷/۶۴

۵ نتیجه‌گیری

به‌طورمعمول در تنظیم جیره خوراکی دام روش برنامه‌ریزی خطی کلاسیک به‌کاربرده می‌شود؛ اما با توجه به این‌که اغلب داده‌ها تجربی، نادقیق و تقریبی هستند از مدل‌های فازی و بازه‌ای استفاده‌شده تا جیره تنظیمی از انعطاف‌پذیری لازم برخوردار باشد. بازه‌ها معمولاً برای مقادیر تقریبی و یا زمان طولانی‌مدت بررسی می‌شوند درحالی‌که از دید خاکستری مقادیر فقط برای یک‌زمان خاص بررسی می‌شوند. گذشته از این، هر مقدار در دامنه داده‌ها از مسایل بازه‌ای می‌تواند درست باشد و این در حالی است که برای یک عدد خاکستری، مقدار واقعی داده می‌تواند تنها یک مقدار باشد و نمی‌توان به خاطر اطلاعات ضعیف آن را مشخص کرد. برای تصمیم‌گیری در محیط فازی نیاز به تابع عضویت و خبره دارید که همواره امکان‌پذیر نمی‌باشد. مزیت نظریه دستگاه‌های خاکستری این است که شرایط فازی بودن را در برمی‌گیرد. هدف اصلی این پژوهش معرفی روشی جدید برای جیره‌نویسی دام در شرایط عدم قطعیت بوده است که بسیار کاربردی و مناسب‌تر باشد. در حقیقت نتایج حاصل از حل و مقایسه مدل رویکردهای مختلف، موید این مطلب است که به‌غیراز رویکرد کلاسیک جواب‌های همه به‌صورت یک بازه بیان می‌شوند که تنها طول بازه‌های آن‌ها متفاوت است؛ اما با رویکرد خاکستری و با روش برنامه‌ریزی مکانی می‌توان بدون نیاز به حل مسایل بازه‌ای یا تابع عضویت، آن را حل نمود و مقدار قطعی تابع هدف را برای مقادیر مختلف به دست آورد و این رویکرد ازلحاظ محاسباتی بسیار حایز اهمیت است. درواقع مجموعه‌ای از جواب‌ها وجود دارد که همگی در دامنه قابل قبولی بوده، اما میزان مناسب بودن آن‌ها متفاوت است. به‌طوری‌که مقدار جواب برنامه‌ریزی سفید شده متوسط به‌دست‌آمده خیلی نزدیک به روش برنامه‌ریزی خطی می‌باشد. با استفاده از این روش می‌توان جواب‌های بهینه متفاوتی با توجه به نوسان قیمت نهاده‌ها و همچنین میزان موجودی و مقدار مصرف منابع با نظر مدیر به دست آورد. با استفاده از توانایی این روش نویسندگان

درصددند چنین روشی را برای کاربردهای واقعی دیگر و نیز برای مسایل با عدم قطعیت ادراکی مطالعه نمایند. به‌ویژه می‌توان در مطالعات آتی از روش‌های پایه‌ای برنامه‌ریزی خطی همچون الگوریتم سیمپلکس اولیه خاکستری که اخیراً توسط ناصری و همکاران [۲۱] پیشنهاد نمودند برای حل این مسایل برنامه‌ریزی خطی خاکستری استفاده کرد. علاوه بر آن، با توسعه نتایج اخیر می‌توان امکان تحلیل حساسیت پارامترهای مدل در شرایط عدم قطعیت را نیز فراهم کرد.

منابع

[۲] ناصری، س. ه.، (۱۳۸۶). روش های سیمپلکس فازی برای حل مسایل برنامه‌ریزی خطی فازی. مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، ۴(۱۳)، ۷۶-۶۷.

[۱۱] باغبان، ع. ، امیری، م. ، افت، ل. ، شرفی آورزمان، ز.، (۱۳۹۳). ارزیابی و رتبه‌بندی پیمانکاران و ارتقاء پیمانکاران ناکارا با رویکرد تحلیل پوششی داده‌های خاکستری-مورد مطالعه پیمانکاران گروه مپنا. مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، ۹(۲)، ۳۸-۲۱.

[۱۲] ثابت مطلق، م. ، صالحی صدقیانی، ج. ، ایازی، س. ع. ، عابدی نایینی، م.، (۱۳۹۳). ارزیابی و انتخاب تامین کنندگان استراتژیک با استفاده از روش ترکیبی فرآیند تحلیل سلسله مراتبی و تاپسیس خاکستری. مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، ۱۱(۴)، ۱۱۷-۱۰۱.

[۱۳] جباری، ر. ، صدقیانی، ج. ص. ، امیری، م.، (۱۳۹۱). ارزیابی عملکرد و انتخاب پرتفوی از صندوق‌های سرمایه‌گذاری سهام. مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، ۹(۱)، ۱۹-۱.

[۱۴] اقدس طینت، ج. ، مرتضوی، س. ا.، (۱۳۸۳). تنظیم جیره جوجه‌های گوشتی در فاصله ۳ تا ۶ هفتگی با استفاده از برنامه‌ریزی خطی فازی متقارن. مجموعه مقالات، پنجمین کنفرانس سیستم‌های فازی، ایران، تهران، ۴۸۱-۴۷۳.

[۱۶] یاقوتی خراسانی، م. ، بخشوده، م.، (۱۳۸۶). تعیین ترکیب بهینه جیره غذایی گاوهای شیری با روش برنامه‌ریزی فازی. فصلنامه اقتصاد و کشاورزی، ۲(۱)، ۱۱۷-۱۰۳.

[1] Waugh, F., (1951). The minimum cost dairy feed. Farm Economics, 33, 299-310.

[3] Deng, J., (1982). The control problems of grey systems, System Control Letter, 5, 288–294.

[4] Deng, J., (1989). Introduction to grey system theory. The Journal of Grey Systems, 1(1), 1-24.

[5] Zheng, Y., Lewis, R. W., (1993). On the optimization concept of grey systems. Applied Mathematical Modelling, 17, 388-392.

[6] Chen, Z., Chen, Q., Chen, W., Wang, Y., (2004). Grey linear programming. Kybernetes, 33(2), 238-246.

[7] Liu, S., Dang, Y., Forrest, J., (2009). On positioned solution of linear programming with grey parameters. International Conference on Systems, Man and Cybernetics, USA, 751-756.

[8] Razavi Hajiagha, S. H., Akrami, H., Hashemi, Sh. S., (2012). A multi-objective programming approach to solve grey linear programming. Grey Systems: Theory and Application, 2(2), 259-271.

[9] Ren, J., Tan, Sh., Dong, L., Zhou, Z., Gao, S., Pan, C., (2013). A planning model for the chemical integrated system under uncertainty by grey programming approach. Journal of Chemical Technology, 15(2), 16-22.

[10] Li, Q. X., Liu, S., Wang, N. A., (2014). Covered solution for a grey linear program based on a general formula for the inverse of a grey matrix. Grey Systems: Theory and Application, 4(1), 72-94.

[15] Cadenas, J. M., Pelta, D. A., Pelta, H. R., Verdegay, J. L., (2004). Application of fuzzy optimization to diet problems in Argentienan farms. European Journal of Operational Research, 158, 218-228.

[17] Darvishi SalooKolayi, D., Teimouri Yansari, A., Nasseri, S. h., (2011). Application of fuzzy optimization in diet formulation. The Journal of Mathematics and Computer Science, 2, 459-468.

[18] Li, G. D., Yamaguchi, D., Nagai, M., (2007). A grey based decision-making approach to the supplier selection problem. Mathematical and Computer Modeling, 46(3-4), 573-581.

[19] Liu, S., Lin, Y., (2006). Grey Information: Theory and Practical Applications. London, Springer-Verlag, London Limited.
[20] Shoacheng, T., (1994). Interval number and fuzzy number linear programming. Fuzzy Sets and Systems, 66, 301-306.
[21] Nasseri, S. H., Yazdani, A. and Darvishi salikolaei, D., (2016). A primal simplex algorithm for solving linear programming problem with grey cost coefficients. Journal of New Researches in Mathematics, 1(4), 121-141.