

## یک الگوریتم کارا برای زیر مساله‌ی ناحیه اطمینان توسیع یافته با دو قید خطی

اکرم طاعتی<sup>۱</sup>، مازیار صلاحی<sup>۲\*</sup>

۱- دانشجوی دکتری، دانشگاه گیلان، دانشکده علوم ریاضی، رشت، ایران

۲- دانشیار، دانشگاه گیلان، دانشکده علوم ریاضی، رشت، ایران

رسید مقاله: ۲۰ آذر ۱۳۹۴

پذیرش مقاله: ۹ اردیبهشت ۱۳۹۵

### چکیده

زیر مساله‌ی ناحیه اطمینان (TRS) که در واقع مساله‌ی مینیمم‌سازی یک تابع درجه‌ی دوم روی یک گوی است، نقش کلیدی در حل مسایل بهینه‌سازی غیرخطی نامقید ایفا می‌کند و علی‌رغم این که لزوماً محدب نیست، الگوریتم‌های کارای متعددی برای حل آن به ویژه برای حل آن در ابعاد بزرگ ارایه شده است. اخیراً توسیع زیر مساله‌ی ناحیه اطمینان به مساله‌ای با قیود خطی اضافی مورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفته است. مطالعات انجام شده نشان می‌دهد هنگامی که قیود خطی مساله‌ی توسیع یافته درون گوی اشتراک ندارند، جواب بهینه‌ی مساله را می‌توان از طریق حل یک مساله‌ی بهینه‌سازی مخروطی به دست آورد. در هر صورت حل مسایل بهینه‌سازی مخروطی در ابعاد بزرگ و حتی در ابعاد متوسط عملی نیست. در این مقاله حل مساله‌ی ناحیه اطمینان توسیع یافته با دو قید خطی بدون در نظر گرفتن هیچ شرطی روی قیود آن مورد مطالعه قرار گرفته است. جدیدترین الگوریتم‌های موجود برای حل زیر مساله‌ی ناحیه اطمینان و محاسبه‌ی مینیمم موضعی غیر سراسری آن که مساله را از طریق حل یک مساله‌ی مقدار ویژه‌ی تعمیم یافته حل می‌کنند برای حل مساله‌ی توسیع یافته در ابعاد بزرگ توسعه داده می‌شود. در پایان کارایی الگوریتم پیشنهادی روی دسته‌ای از مسایل تصادفی ارزیابی می‌شود.

**کلمات کلیدی:** زیر مساله‌ی ناحیه اطمینان توسیع یافته، مساله‌ی مقدار ویژه‌ی تعمیم یافته، بهینه‌سازی سراسری.

### ۱ مقدمه

مساله‌ی ناحیه اطمینان توسیع یافته‌ی (eTRS) زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{Min } q(x) &:= \frac{1}{2} x^T A x + a^T x \\ \|x\|^2 &\leq \delta, \\ b_i^T x &\leq \beta_i, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (1)$$

\* عهده‌دار مکاتبات

آدرس الکترونیکی: salahim@guilan.ac.ir

که در آن  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ماتریس متقارن،  $b_1, b_2 \in \mathbb{R}^n$ ،  $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$  و  $\delta \in \mathbb{R}^{++}$ . این دسته از مسایل در حل سایر مسایل بهینه‌سازی غیرخطی به ویژه در حل مسایل بهینه‌سازی نامقید به روش ناحیه اطمینان [۱،۲] و همچنین در حل مسایل بهینه‌سازی غیرخطی به روش برنامه‌ریزی درجه‌ی دوم متوالی (SQP) [۳] ظاهر می‌شود. در حالتی که  $(b_i, \beta_i) = (0, 0)$ ،  $i = 1, 2$ ، مساله‌ی (۱) به زیر مساله‌ی ناحیه اطمینان (TRS) معروف است که علی‌رغم این که لزوماً محذب نیست، الگوریتم‌های کارایی برای حل آن ارایه شده است [۴-۸] که پایه و اساس همه‌ی آن‌ها را می‌توان در شرایط بهینگی لازم و کافی آن دانست. در این بین الگوریتم پیشنهادی در منبع [۵] مساله‌ی (TRS) را از طریق حل یک مساله‌ی مقدار ویژه تعمیم یافته حل می‌کند. این روش با بهره‌گیری از الگوریتم‌های کارای موجود برای حل مسایل مقدار ویژه‌ی ماتریس‌های تنک و بزرگ برای حل مساله‌ی (TRS) در ابعاد بزرگ بسیار کاراست. همچنین، ارتباط بین روش‌های حل مساله‌ی (TRS) و برنامه‌ریزی نیمه معین که در منبع [۹] به آن پرداخته شده است، نشان می‌دهد مساله‌ی آزادسازی نیمه معین مساله‌ی (TRS) دقیق است و با استفاده از تجزیه‌ی رتبه یک می‌توان جواب بهینه‌ی مساله‌ی (TRS) را از جواب مساله‌ی آزادسازی آن به دست آورد [۹].

اخیراً توسعه مساله‌ی (TRS) به مساله‌ای با قیود خطی اضافی موضوع تحقیق بسیاری از مقالات قرار گرفته است [۹-۱۵]. مطالعات انجام شده نشان می‌دهد بر خلاف مساله‌ی (TRS)، مساله‌ی آزادسازی نیمه معین مساله‌ی توسعه یافته لزوماً دقیق نیست. هدف تعدادی از مطالعات انجام شده بیان شرایطی بوده است که تحت آن مساله‌ی آزادسازی نیمه معین توسعه‌یافته (TRS) دقیق است [۱۰، ۱۱]. تعدادی از مقالات نیز به معرفی یک مساله‌ی آزادسازی جدید پرداخته‌اند که با افزودن تعدادی قیود مخروطی درجه‌ی دوم و قیود خطی به مساله‌ی آزادسازی نیمه معین به دست می‌آید [۱۲، ۱۳]. در برخی از موارد براساس ماهیت قیود خطی تشکیل دهنده‌ی مساله‌ی توسعه یافته، می‌توان جواب بهینه‌ی مساله را از حل مساله‌ی آزادسازی جدید آن به دست آورد و در برخی از موارد نیز می‌توان کرانی بهتر از کران به دست آمده از مساله‌ی آزادسازی نیمه معین به دست آورد. هنگامی که  $m$  قید خطی مساله‌ی توسعه یافته،  $b_i^T x \leq \beta_i$ ،  $i = 1, \dots, m$ ، درون گوی  $\|x\|^2 \leq \delta$  اشتراک ندارند، جواب بهینه‌ی مساله‌ی توسعه یافته را می‌توان با حل مساله‌ی محذب زیر به دست آورد [۱۲]:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \frac{1}{2} A \bullet X + a^T x \\ \text{trac}(X) & \leq \delta, \quad X \geq xx^T, \\ \|\beta_i x - X b_i\| & \leq \sqrt{\delta} (\beta_i - b_i^T x), \quad i = 1, \dots, m, \\ \beta_i \beta_j - \beta_j b_i^T x - \beta_i b_j^T x + b_i^T X b_j & \geq 0, \quad 1 \leq i < j \leq m. \end{aligned} \quad (2)$$

در هر صورت حل مسایل بهینه‌سازی مخروطی تنها در ابعاد کوچک امکان‌پذیر است و این بدان معناست که حتی تحت شرایطی که مساله‌ی (eTRS) با مساله‌ی (۲) معادل است، نمی‌توان از آن برای حل (eTRS) در ابعاد بزرگ و یا حتی در ابعاد متوسط بهره برد. در منبع [۱۱] مساله‌ی (TRS) با  $m$  قید خطی اضافی مورد مطالعه قرار گرفته است. نویسندگان با تکیه بر نتایج به دست آمده توسط مارتینز در خصوص مینیمم موضعی غیر سراسری مساله‌ی (TRS) [۱۶]، نشان دادند

جواب بهینه‌ی مساله‌ی مورد مطالعه را می‌توان از میان مینیموم موضعی غیر سراسری مساله‌ی (TRS) و جواب‌های بهینه‌ی به دست آمده از حل دنباله‌ای از زیر مسایل ناحیه اطمینان، تعیین کرد. لازم به ذکر است که هیچگونه نتایج عددی توسط نویسندگان مقاله گزارش نشده است. الگوریتم ارائه شده توسط مارتینز در هر تکرار به حل یک دستگاه معادلات خطی نامعین نیاز دارد، از این رو برای حل مساله در ابعاد بزرگ هزینه‌بر به نظر می‌رسد. در منبع [۱۴] زیر مساله‌ی ناحیه اطمینان با یک قید خطی اضافی موضوع تحقیق نویسندگان قرار گرفته است. در مقاله‌ی مذکور تحت شرط اینکه چندگانگی جبری کوچک‌ترین مقدار ویژه‌ی ماتریس  $A$  حداقل دو است، با استفاده از روش قطری‌سازی و استفاده از دوگانی لاگرانژ مساله‌ی مورد مطالعه از طریق حل یک مساله‌ی دو متغیره‌ی محذب مقید حل می‌شود. با توجه به اینکه روش قطری‌سازی به تجزیه‌ی مقادیر ویژه‌ی ماتریس  $A$  نیازمند است، استفاده از این روش برای حل مساله در ابعاد بزرگ مناسب نمی‌باشد. اخیراً در منبع [۱۵] حل مساله‌ی (TRS) با یک قید خطی اضافی در ابعاد بزرگ مورد توجه قرار گرفته است. در منبع مذکور ابتدا نشان داده می‌شود که مینیموم موضعی مساله‌ی (TRS) را همانند مینیموم سراسری آن می‌توان از طریق حل یک مساله‌ی مقدار ویژه‌ی تعمیم یافته محاسبه کرد، سپس با استفاده از این واقعیت، الگوریتمی کارا برای حل مساله‌ی مورد مطالعه در ابعاد بزرگ ارائه شده است.

در این پژوهش حل زیر مساله‌ی ناحیه اطمینان با دو قید خطی اضافی مورد توجه قرار گرفته است. با بهره‌گیری از جدیدترین نتایج به دست آمده که نشان می‌دهند مینیموم موضعی و سراسری مساله‌ی (TRS) را می‌توان از طریق حل یک مساله‌ی مقدار ویژه‌ی تعمیم یافته حل کرد، الگوریتمی کارا برای حل مساله‌ی مورد مطالعه در ابعاد بزرگ پیشنهاد می‌شود. در واقع الگوریتم پیشنهادی مساله را از طریق حل تعدادی مساله‌ی مقدار ویژه‌ی تعمیم یافته حل می‌کند. در پایان کارایی روش پیشنهادی روی دسته‌ای از مسایل تصادفی مورد ارزیابی قرار می‌گیرد.

## ۱-۱ نمادگذاری

در سرتاسر این مقاله،  $\lambda_{\min}(A)$  به کوچک‌ترین مقدار ویژه‌ی ماتریس  $A$ ،  $Range(A)$  به برد ماتریس  $A$  و  $Null(A)$  به فضای پوچ ماتریس  $A$  اشاره می‌کند. همچنین ماتریس معین مثبت (نیمه معین مثبت) به صورت  $A \succ 0$  ( $A \succcurlyeq 0$ ) نشان داده می‌شود و  $I$  به ماتریس همانی اشاره می‌کند.

## ۲ الگوریتم پیشنهادی

در سرتاسر این مقاله، فرض می‌کنیم هیچ یک از قیود خطی مساله‌ی (۱) زاید نیست؛ چون در غیر این صورت مساله‌ی (۱) به مساله‌ی (TRS) یا مساله‌ی (TRS) با یک قید خطی اضافی تبدیل می‌شود که در منابع [۵] و [۱۵] مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. حل مساله‌ی (۱) را براساس ماهیت قیود خطی تشکیل دهنده‌ی آن در دو حالت جداگانه بررسی می‌کنیم. حالت اول را حالتی در نظر می‌گیریم که دو ابرصفحه‌ی  $b_1^T x = \beta_1$  و  $b_2^T x = \beta_2$  درون گوی  $\|x\| \leq \delta$  هیچ اشتراکی ندارند. به عبارت دیگر به ازای هر  $x$  که  $b_1^T x = \beta_1$  و  $b_2^T x = \beta_2$  آنگاه  $\|x\| \geq \delta$ . حالت دوم حالتی است که دو ابرصفحه مذکور درون گوی یکدیگر را قطع می‌کنند؛ یعنی  $x$  وجود دارد به طوری که  $b_1^T x = \beta_1$ ،

توجه می‌کنیم که هر یک از این حالات به آسانی قابل شناسایی است. دو ابرصفحه‌ی  $b_1^T x = \beta_1$  و  $b_2^T x = \beta_2$  موازی هستند اگر و فقط اگر  $b_1 \parallel b_2$  باشد. حال حالتی را در نظر بگیرید که دو ابرصفحه‌ی مذکور موازی نیستند. فرض کنید  $x^*$  جواب بهینه‌ی مسأله‌ی بهینه‌سازی درجه‌ی دوم

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \|x\|^2 \\ & b_1^T x = \beta_1, \\ & b_2^T x = \beta_2, \end{aligned}$$

است. اگر  $\|x^*\|^2 < \delta$  باشد، آنگاه دو ابرصفحه درون گوی  $\|x\|^2 \leq \delta$  اشتراک دارند. در غیر این صورت دو ابرصفحه خارج از گوی یا روی گوی یکدیگر را قطع می‌کنند.

**۱-۲ دو ابرصفحه‌ی  $b_1^T x = \beta_1$  و  $b_2^T x = \beta_2$  درون گوی  $\|x\|^2 \leq \delta$  هیچ اشتراکی ندارند**

در این حالت الگوریتم ۱ برای حل مسأله‌ی (۱) پیشنهاد می‌شود. مسایل زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \frac{1}{2} x^T A x + a^T x \\ & \|x\|^2 \leq \delta, \\ & b_1^T x = \beta_1. \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \frac{1}{2} x^T A x + a^T x \\ & \|x\|^2 \leq \delta, \\ & b_2^T x = \beta_2. \end{aligned} \quad (4)$$

### الگوریتم ۱.

**گام اول.** مسأله‌ی (TRS) را حل کنید. فرض کنید  $x_g^*$  جواب بهینه‌ی آن است، اگر  $b_1^T x_g^* \leq \beta_1$  و  $b_2^T x_g^* \leq \beta_2$  باشد، آنگاه  $x_g^*$  جواب بهینه‌ی مسأله‌ی (۱) نیز است، بنابراین متوقف شوید. در غیر این صورت به گام دوم بروید.

**گام دوم.** مینیمم موضعی مسأله‌ی (TRS)،  $x_\ell^*$  را در صورت وجود محاسبه کنید. اگر  $b_1^T x_\ell^* \leq \beta_1$  و  $b_2^T x_\ell^* \leq \beta_2$ ،  $x_\ell^*$  را به عنوان کاندیدای جواب بهینه در نظر بگیرید. مسایل (۳) و (۴) را حل کنید و جواب بهینه‌ی آن‌ها را نیز به عنوان کاندیدای جواب بهینه در نظر بگیرید. از میان جواب‌های موجود، جواب با کم‌ترین مقدار تابع هدف، جواب بهینه‌ی مسأله‌ی (۱) است.

**۲-۲ دو ابرصفحه‌ی  $b_1^T x = \beta_1$  و  $b_2^T x = \beta_2$  درون گوی  $\|x\|^2 \leq \delta$  یکدیگر را قطع می‌کنند**

در این حالت الگوریتم ۲ برای حل مسأله‌ی (۱) پیشنهاد می‌شود. مسایل زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \frac{1}{2} x^T A x + a^T x \\ & \|x\|^2 \leq \delta, \\ & b_1^T x \leq \beta_1, \\ & b_2^T x = \beta_2, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \frac{1}{2} x^T A x + a^T x \\ & \|x\|^2 \leq \delta, \\ & b_1^T x = \beta_1, \\ & b_2^T x \leq \beta_2. \end{aligned} \tag{۶}$$

## الگوریتم ۲.

**گام اول.** مساله‌ی (TRS) را حل کنید. فرض کنید  $x_g^*$  جواب بهینه‌ی آن است. اگر  $b_1^T x_g^* \leq \beta_1$  و  $b_2^T x_g^* \leq \beta_2$  باشد، آنگاه  $x_g^*$  جواب بهینه‌ی مساله‌ی (۱) نیز است؛ بنابراین متوقف شوید، در غیر این صورت به گام دوم بروید.

**گام دوم.** مینیمم موضعی مساله‌ی (TRS)،  $x_\ell^*$  را در صورت وجود محاسبه کنید. اگر  $b_1^T x_\ell^* \leq \beta_1$  و  $b_2^T x_\ell^* \leq \beta_2$ ،  $x_\ell^*$  را به عنوان کاندیدای جواب بهینه در نظر بگیرید، مسایل (۵) و (۶) را حل کنید و جواب بهینه‌ی آن‌ها را نیز به عنوان کاندیدای جواب بهینه در نظر بگیرید. از میان جواب‌های موجود، جواب با کم‌ترین مقدار تابع هدف، جواب بهینه‌ی مساله‌ی (۱) است.

## ۳ حل زیر مسایل موجود در الگوریتم ۱ و ۲

در این بخش به جزئیات حل هر یک از زیر مسایل موجود در الگوریتم ۱ و ۲ می‌پردازیم.

### ۱-۳ مساله‌ی (TRS)

همان‌طور که در مقدمه اشاره شد تاکنون الگوریتم‌های کارای متعددی برای مساله‌ی (TRS) ارایه شده است که پایه و اساس همه آن‌ها را می‌توان در شرایط بهینگی لازم و کافی آن دانست. در این مقاله الگوریتم ارایه شده در منبع [۵] برای حل مساله‌ی (TRS) پیشنهاد می‌شود که قادر است مساله‌ی (TRS) مقیاس شده زیر را از طریق حل یک مساله‌ی مقدار ویژه‌ی تعمیم یافته حل کند:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \frac{1}{2} x^T A x + a^T x \\ & x^T B x \leq \delta, \end{aligned} \tag{۷}$$

که در آن  $B$  یک ماتریس معین مثبت است. الگوریتم مذکور که بر پایه نتایج زیر استوار است، با بهره‌گیری از الگوریتم‌های کارای موجود برای حل مساله‌ی مقدار ویژه‌ی ماتریس‌های بزرگ و تنک، برای حل مساله‌ی (TRS) در ابعاد بزرگ بسیار کاراست.  $x_g^*$  جواب بهینه‌ی مساله‌ی (۷) است اگر و فقط اگر  $\lambda_g^* \geq 0$  وجود دارد به طوری که [۵]

$$(A + \lambda_g^* B) x_g^* = -a, \tag{۸}$$

$$x_g^{*T} B x_g^* \leq \delta, \tag{۹}$$

$$\lambda_g^* (x_g^{*T} B x_g^* - \delta) = 0, \tag{۱۰}$$

$$A + \lambda_g^* B \succeq 0. \tag{۱۱}$$

لم [۵]. به ازای هر ضریب  $\lambda \neq 0$  که در روابط (۸) تا (۱۰) صدق می‌کند، داریم  $\det(M(\lambda)) = 0$  که:

$$M(\lambda) = \begin{bmatrix} -B & A + \lambda B \\ A + \lambda B & -\frac{aa^T}{\delta} \end{bmatrix}.$$

**قضیه ۱** ([۵]). فرض کنید  $(x_g^*, \lambda_g^*)$  یک جواب بهینه‌ی مسأله‌ی (۷) با  $x_g^{*T} B x_g^* = \delta$  باشد، در این صورت ضریب لاگرانژ بهینه،  $\lambda_g^*$ ، با بزرگ‌ترین مقدار ویژه‌ی حقیقی ماتریس  $M(\lambda)$  برابر است و  $\lambda_g^* \in [\mu_n, \infty)$  که  $\mu_n$  بزرگ‌ترین مقدار ویژه  $A + \lambda B$  است. به علاوه اگر  $\lambda_g^* > \mu_n$ ، آنگاه  $x_g^* = -\frac{\delta}{a^T y_\uparrow} y_\uparrow$  که در آن بردار ویژه‌ی  $M(\lambda)$  متناظر با مقدار ویژه‌ی  $\lambda_g^*$  است و همچنین داریم  $a^T y_\uparrow \neq 0$ .

### الگوریتم ۳ (حل مسأله‌ی (۷) [۵])

**گام اول.** دستگاه معادلات خطی  $Ax_0 = -a$  را با استفاده از روش گرادیان مزدوج حل کنید. اگر  $x_0^T B x_0 \leq \delta$ ،  $x_0$  را به عنوان کاندیدای جواب بهینه در نظر بگیرید.

**گام دوم.** بزرگ‌ترین مقدار ویژه‌ی حقیقی  $M(\lambda)$ ،  $\lambda_g^*$ ، و بردار ویژه‌ی متناظر با آن،  $\begin{pmatrix} y_\uparrow \\ y_\downarrow \end{pmatrix}$  را محاسبه کنید به طوری که

$$\begin{bmatrix} -B & A \\ A & -\frac{aa^T}{\delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_\uparrow \\ y_\downarrow \end{bmatrix} = -\lambda_g^* \begin{bmatrix} O_{n \times n} & B \\ B & O_{n \times n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_\uparrow \\ y_\downarrow \end{bmatrix}.$$

**گام سوم.** اگر  $\|y_\uparrow\| \leq \tau$  (به طور پیش فرض  $\tau = 10^{-4}$ ) آنگاه مسأله‌ی (۷) یک نمونه‌ی سخت است. گام‌های چهارم تا ششم را اجرا کنید، در غیر این صورت به گام هفتم بروید.

**گام چهارم.** ماتریس  $H := A + \lambda_g^* B + \alpha \sum_{i=1}^d B v_i v_i^T B$  را محاسبه کنید که در آن  $\alpha$  یک عدد مثبت دلخواه و  $V = [v_1, \dots, v_d]$  یک پایه‌ی  $B$ -متعامد برای فضای پوچ ماتریس  $A + \lambda_g^* B$  است؛ یعنی  $V^T B V = I$ .

**گام پنجم.** دستگاه  $Hq = -a$  را با استفاده از روش گرادیان مزدوج حل کنید.

**گام ششم.** مقدار  $\eta$  را طوری محاسبه کنید که  $(q + \eta v)^T B (q + \eta v) = \delta$  که در آن  $v$  یکی از بردارهای محاسبه شده در گام چهارم است.  $x_g^* = q + \eta v$  جواب بهینه‌ی مسأله‌ی (۷) است و متوقف شوید.

**گام هفتم.**  $x_\uparrow = -\text{sign}(a^T y_\uparrow) \sqrt{\delta} \frac{y_\uparrow}{\sqrt{y_\uparrow^T B y_\uparrow}}$  را به عنوان کاندیدای جواب بهینه در نظر بگیرید.

**گام هشتم.** از میان جواب‌های موجود، جواب با کم‌ترین تابع هدف، جواب بهینه‌ی مسأله‌ی (۷) است.

### ۲-۳ مینیموم موضعی مسأله‌ی (TRS)

در سرتاسر این مقاله، منظور از مینیموم موضعی، مینیموم موضعی غیر سراسری است. فرض کنید  $x^*$  جواب بهینه‌ی مسأله‌ی (۱) است، اگر  $b_\uparrow^T x^* < \beta_\uparrow$  و  $b_\downarrow^T x^* < \beta_\downarrow$  باشد، آنگاه  $x^*$  یک مینیموم موضعی (نه لزوماً مینیموم سراسری) مسأله‌ی (TRS) است؛ لذا مطالعه و ارزیابی روشی کارا برای محاسبه‌ی مینیموم موضعی مسأله‌ی (TRS) حائز اهمیت است.

در ادامه ابتدا به مطالعات اولیه انجام شده توسط مارتینز در این زمینه اشاره می‌کنیم [۱۶]، سپس به نتایج به دست آمده در منبع [۱۵] اشاره می‌کنیم که نشان می‌دهد مینیمم موضعی مساله‌ی (TRS) همانند مینیمم سراسری آن در صورت وجود می‌تواند از طریق حل یک مساله‌ی مقدار ویژه‌ی تعمیم یافته محاسبه شود. برخلاف مینیمم سراسری، مساله‌ی (TRS) می‌تواند فاقد مینیمم موضعی باشد. به وضوح اگر ماتریس  $A$  نیمه معین مثبت باشد، مساله‌ی (TRS) محدب و لذا فاقد مینیمم موضعی است. لم زیر حالت‌هایی را که در آن مساله‌ی نامحدب (TRS) فاقد مینیمم موضعی است، بیان می‌کند.

**لم ۲ ([۱۶]).** اگر چندگانگی جبری کوچک‌ترین مقدار ویژه‌ی ماتریس  $A$ ،  $\lambda_{\min}(A)$ ، حداقل دو یا بردار  $a$  بر برخی از بردارهای ویژه‌ی متناظر با  $\lambda_{\min}(A)$  عمود باشد، آنگاه مساله‌ی (TRS) فاقد مینیمم موضعی است.

فرض کنید  $A = Q\Lambda Q^T$  تجزیه‌ی مقادیر ویژه‌ی ماتریس  $A$  باشد که در آن  $Q = [q_1, q_2, \dots, q_n]$  ماتریس متعامد و  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  با  $\lambda_{\min}(A) := \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ . قضیه‌ی زیر شرایط لازم برای مینیمم موضعی را بیان می‌کند.

**قضیه ۲ ([۱۶]).** فرض کنید  $x_\ell^*$  مینیمم موضعی مساله‌ی (TRS) باشد، آنگاه  $\lambda^* \in (\max\{0, -\lambda_\ell\}, -\lambda_\ell)$  وجود دارد به طوری که:

$$(A + \lambda^* I)x_\ell^* = -a, \quad \|x_\ell^*\|^2 = \delta. \quad (12)$$

تابع  $\phi(\lambda) = \|(A + \lambda I)^{-1}a\|^2$  را روی بازه‌ی  $(\max\{0, -\lambda_\ell\}, -\lambda_\ell)$  در نظر بگیرید. با استفاده از تجزیه‌ی مقادیر ویژه‌ی ماتریس  $A$  داریم

$$\begin{aligned} \phi(\lambda) &= \sum_{i=1}^n \frac{(q_i^T a)^2}{(\lambda_i + \lambda)^2}, \\ \phi'(\lambda) &= -2 \sum_{i=1}^n \frac{(q_i^T a)^2}{(\lambda_i + \lambda)^3}, \\ \phi''(\lambda) &= 6 \sum_{i=1}^n \frac{(q_i^T a)^2}{(\lambda_i + \lambda)^4}. \end{aligned} \quad (13)$$

معادله (۱۳) نشان می‌دهد که تابع  $\phi(\lambda)$  روی بازه‌ی  $(\max\{0, -\lambda_\ell\}, -\lambda_\ell)$  اکیداً محدب است و لذا معادله‌ی  $\phi(\lambda) - \delta = 0$  در این بازه حداکثر دو ریشه دارد. قضیه‌ی زیر بیان می‌کند که تنها بزرگ‌ترین ریشه در این بازه می‌تواند ضریب لاگرانژ متناظر با مینیمم موضعی مساله‌ی (TRS) باشد.

**قضیه ۳ ([۱۶]).** مساله‌ی (TRS) حداکثر یک مینیمم موضعی دارد که در روابط (۱۲) صدق می‌کند و  $\phi'(\lambda^*) \geq 0$ . در ادامه به نتیجه‌ی به دست آمده در منبع [۱۵] اشاره می‌کنیم که نشان می‌دهد ضریب لاگرانژ متناظر با مینیمم موضعی مساله‌ی (TRS)،  $\lambda^*$ ، در صورت وجود از طریق حل یک مساله‌ی مقدار ویژه‌ی تعمیم یافته به دست می‌آید. در این مقاله اثبات جدیدی برای این قضیه بیان می‌کنیم.

**قضیه ۴ ([۱۵]).** ماتریس  $M(\lambda)$  که در آن  $B = I$  را در نظر بگیرید. فرض کنید  $x_\ell^*$  مینیمم موضعی یکتای مساله‌ی (TRS) باشد، آنگاه ضریب لاگرانژ متناظر،  $\lambda^*$ ، با دومین بزرگ‌ترین مقدار ویژه‌ی حقیقی ماتریس  $M(\lambda)$

برابر است. به علاوه  $x_i^* = -\frac{\delta}{a^T y_\nu} y_\nu$  که در آن بردار ویژه‌ی  $M(\lambda)$  متناظر با مقدار ویژه‌ی  $\lambda^*$  است و همچنین داریم  $a^T y_\nu \neq 0$ .

**اثبات.** ابتدا توجه می‌کنیم چون  $x_i^*$  مینیمم موضعی مسأله‌ی (TRS) است؛ بنابراین با توجه به لم ۲، چندگانگی جبری  $\lambda_1$  برابر است با یک و  $a^T v \neq 0$  که در آن  $v$  بردار ویژه‌ی متناظر با  $\lambda_1$  است. به عبارت دیگر (TRS) یک نمونه آسان است. بر اساس لم ۱،  $\lambda^*$  یک مقدار ویژه‌ی  $M(\lambda)$  است؛ یعنی  $\det(M(\lambda^*)) = 0$ . به علاوه بنا بر قضیه‌ی ۱، بزرگ‌ترین مقدار ویژه‌ی حقیقی ماتریس  $M(\lambda)$  که ضریب لاگرانژ متناظر با مینیمم سراسری مسأله‌ی (TRS) است، ریشه‌ی منحصر به فرد معادله  $\phi(\lambda) - \delta = 0$  در بازه‌ی  $(-\lambda_1, \infty)$  است. همچنین با توجه به قضیه‌ی ۳، ضریب لاگرانژ متناظر با مینیمم موضعی مسأله‌ی (TRS)، بزرگ‌ترین ریشه‌ی معادله‌ی  $\phi(\lambda) - \delta = 0$  در بازه‌ی  $(\max\{0, -\lambda_1\}, -\lambda_1)$  است. توجه می‌کنیم  $-\lambda_1$  مقدار ویژه‌ی  $M(\lambda)$  نیست. برای اثبات این واقعیت فرض خلف می‌کنیم که چنین باشد؛ بنابراین بردار ناصفر  $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_\nu \end{pmatrix}$  وجود دارد به طوری که

$$(A - \lambda_1 I) y_\nu = y_1, \quad (14)$$

$$(A - \lambda_1 I) y_1 = \frac{aa^T}{\delta} y_\nu. \quad (15)$$

اگر  $a^T y_\nu \neq 0$ ، بنا بر (۱۵)  $a \in \text{Range}(A - \lambda_1 I)$  که متناقض است با فرض اینکه (TRS) یک نمونه‌ی آسان است. به علاوه اگر  $a^T y_\nu = 0$  آنگاه از رابطه‌ی (۱۵) نتیجه می‌شود  $y_1 \in \text{Null}(A - \lambda_1 I)$ . همچنین بنا بر (۱۴) داریم  $y_1 \in \text{Range}(A - \lambda_1 I)$ ؛ بنابراین  $y_1 = 0$  است. حال اگر  $y_1 = 0$  باشد، آنگاه بر اساس رابطه‌ی (۱۴)،  $y_\nu$  یک بردار ویژه‌ی متناظر با  $\lambda_1$  است. در این صورت فرض  $a^T y_\nu = 0$  متناقض است با فرض اینکه (TRS) یک نمونه آسان است؛ بنابراین  $-\lambda_1$  نمی‌تواند مقدار ویژه‌ی  $M(\lambda)$  باشد. بحث انجام شده نشان می‌دهد که  $\lambda^*$  دومین بزرگ‌ترین مقدار ویژه‌ی  $M(\lambda)$  است. حال فرض کنید  $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_\nu \end{pmatrix}$  یک بردار ویژه‌ی  $M(\lambda^*)$  باشد، داریم:

$$(A + \lambda^* I) y_\nu = y_1, \quad (16)$$

$$(A + \lambda^* I) y_1 = \frac{aa^T}{\delta} y_\nu. \quad (17)$$

ابتدا نشان می‌دهیم  $a^T y_\nu \neq 0$  است. فرض خلف می‌کنیم  $a^T y_\nu = 0$  باشد، در این صورت چون ماتریس  $A + \lambda^* I$  وارون‌پذیر است از روابط (۱۶) و (۱۷) نتیجه می‌شود  $y_1 = y_\nu = 0$  که متناقض است با فرض اینکه  $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_\nu \end{pmatrix}$  یک بردار

ویژه‌ی  $M(\lambda^*)$  است؛ بنابراین  $a^T y_\nu \neq 0$ . حال با ضرب طرفین رابطه (۱۷) در  $-\frac{\delta}{a^T y_\nu}$ ،

داریم

$$(A + \lambda^* I) \frac{-\delta}{a^T y_\nu} y_1 = -a.$$



قرار دهید  $x_\ell^* = -\frac{\delta}{a^T y_\ell} y_\ell$  از روابط (۱۶) و (۱۷) نتیجه می شود

$$\|x_\ell^*\|^2 = \frac{\delta^2}{(a^T y_\ell)^2} y_\ell^T y_\ell = \frac{\delta^2}{(a^T y_\ell)^2} y_\ell^T (A + \lambda^* I)(A + \lambda^* I)^{-1} \frac{aa^T}{\delta} y_\ell = \delta,$$

که نشان می دهد  $x_\ell^*$  از رابطه  $x_\ell^* = -\frac{\delta}{a^T y_\ell} y_\ell$  محاسبه می شود.

### ۳-۳ حل زیر مسایل (۳) و (۴)

در این بخش به جزئیات حل زیر مسایل (۳) و (۴) می پردازیم. برای سادگی در بیان مطالب، قید تساوی را به صورت  $b^T x = \beta$  نمایش می دهیم؛ بنابراین مساله ی زیر را در نظر می گیریم:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \frac{1}{2} x^T A x + a^T x \\ & \|x\|^2 \leq \delta, \\ & b^T x = \beta. \end{aligned} \tag{۱۸}$$

با حذف قید تساوی  $b^T x = \beta$  مساله ی فوق را به مساله ی معادلی به فرم مساله ی (۷) تبدیل می کنیم. بدین منظور فرض کنید  $|b_\ell| = \max\{|b_i|\}$  که در آن  $b_i$  مولفه ی  $i$  ام بردار  $b$  است، آنگاه ماتریس

$$W = \begin{bmatrix} b_\ell I_{\ell-1} & O_{\ell-1, n-\ell} \\ -b_{\ell+1}^T & -b_{\ell+n}^T \\ O_{n-\ell, \ell-1} & b_\ell I_{n-\ell} \end{bmatrix},$$

یک پایه برای  $Null(b^T)$  است.  $b_{i:j}$  به قسمتی از بردار  $b$  اشاره می کند که شامل درایه های  $i$  ام تا  $j$  ام است.

نقطه ی  $\hat{x}$  را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\hat{x} = \begin{cases} 0 & \text{if } \beta = 0 \\ \frac{\beta}{\|b\|^2} b & \text{if } \beta \neq 0 \end{cases}$$

توجه می کنیم که  $b^T \hat{x} = \beta$ ،  $\|\hat{x}\|^2 \leq \delta$ ،  $W^T \hat{x} = 0$  و همچنین داریم:

$$b^T x = \beta \Leftrightarrow x = \hat{x} + Wy \quad \text{for some } y \in \mathbb{R}^{n-1}$$

با جایگذاری  $x$  در مساله ی (۱۸)، به مساله ی معادل زیر می رسیم:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \frac{1}{2} y^T \bar{A} y + \bar{a}^T y \\ & y^T B y \leq \bar{\delta}, \end{aligned}$$

که در آن

$$\bar{A} = W^T A W, \quad \bar{a} = W^T (A \hat{x} + a), \quad B = W^T W, \quad \bar{\delta} = \delta - \hat{x}^T \hat{x}.$$

مساله ی فوق را می توان با استفاده از الگوریتم ۳ حل کرد.

### ۳-۴ حل زیر مسایل (۵) و (۶)

در این بخش به جزئیات حل زیر مسایل (۵) و (۶) می پردازیم. برای سادگی در بیان مطالب، قید تساوی را به صورت  $b^T x = \beta$  نمایش می دهیم؛ بنابراین مسأله ی زیر را در نظر می گیریم:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \frac{1}{\gamma} x^T A x + a^T x \\ & \|x\|^{\gamma} \leq \delta, \\ & b^T x = \beta, \\ & b_{\gamma}^T x \leq \beta_{\gamma}. \end{aligned} \tag{۱۹}$$

با حذف قید تساوی  $b^T x = \beta$  مسأله ی فوق را به زیر مسأله ی ناحیه اطمینان با یک قید خطی اضافی تبدیل می کنیم. بدین منظور فرض کنید  $|b_{\ell}| = \max\{|b_i|\}$  که در آن مولفه ی  $i$  ام بردار  $b$  است، آنگاه ماتریس

$$W = \begin{bmatrix} b_{\ell} I_{\ell-1} & O_{\ell-1, n-\ell} \\ -b_{\gamma}^T & -b_{\ell+\gamma n}^T \\ O_{n-\ell, \ell-1} & b_{\ell} I_{n-\ell} \end{bmatrix},$$

یک پایه برای  $Null(b^T)$  است. نقطه ی  $\hat{x}$  را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\hat{x} = \begin{cases} 0 & \text{if } \beta = 0 \\ \frac{\beta}{\|b\|^{\gamma}} b & \text{if } \beta \neq 0 \end{cases}$$

توجه می کنیم که  $b^T \hat{x} = \beta$ ،  $\|\hat{x}\|^{\gamma} \leq \delta$ ،  $W^T \hat{x} = 0$  و همچنین داریم:

$$b^T x = \beta \Leftrightarrow x = \hat{x} + Wy \quad \text{for some } y \in \mathbb{R}^{n-1}$$

با جایگذاری  $x$  در مسأله ی (۱۹)، به مسأله ی معادل زیر می رسیم:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \frac{1}{\gamma} y^T \bar{A} y + \bar{a}^T y \\ & y^T B y \leq \bar{\delta}, \\ & \bar{b}^T y \leq \bar{\beta}, \end{aligned}$$

که در آن

$$\bar{A} = W^T A W, \quad \bar{a} = W^T (A \hat{x} + a), \quad B = W^T W, \quad \bar{\delta} = \delta - \hat{x}^T \hat{x}, \quad \bar{b} = W^T b_{\gamma}, \quad \bar{\beta} = \beta_{\gamma} - b_{\gamma}^T \hat{x}.$$

از طرفی  $B = W^T W = b_{\ell}^{\gamma} I_{n-1} + \tilde{b} \tilde{b}^T$  که در آن  $\tilde{b}$  از بردار  $b$  با حذف مولفه ی  $b_{\ell}$  به دست می آید؛ لذا با توجه

به ساختار بهنگام رتبه یک ماتریس معین مثبت  $B$  داریم

$$B^{-\frac{1}{\gamma}} = \frac{1}{|b_{\ell}|} \left( I_{n-1} - \frac{1 + \sqrt{\frac{b_{\ell}^{\gamma}}{b_{\ell}^{\gamma} + \tilde{b}^T \tilde{b}}}}{\tilde{b}^T \tilde{b}} \tilde{b} \tilde{b}^T \right).$$

حال با استفاده از تغییر متغیر  $y := B^{-1} \bar{y}$  به مساله‌ی زیر می‌رسیم:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \frac{1}{2} y^T \hat{A} y + \hat{a}^T y \\ & y^T y \leq \bar{\delta}, \\ & \hat{b}^T y \leq \bar{\beta}, \end{aligned} \quad (20)$$

که در آن

$$\hat{A} = B^{-1} \bar{A} B^{-1}, \quad \hat{a} = B^{-1} \bar{a}, \quad \hat{b} = B^{-1} \bar{b}.$$

حل مساله‌ی (۲۰) که در واقع مساله‌ی ناحیه اطمینان با یک قید خطی اضافی است در منبع [۱۵] به طور گسترده مورد مطالعه قرار گرفته است. الگوریتم ۴ برای حل مساله‌ی فوق پیشنهاد می‌شود.

#### الگوریتم ۴ (حل مساله‌ی (۲۰)).

**گام اول.** مساله‌ی (TRS) متناظر را حل کنید. فرض کنید  $x_g^*$  جواب بهینه‌ی آن است، اگر  $\hat{b}^T x_g^* \leq \bar{\beta}$  باشد، آنگاه  $x_g^*$  جواب بهینه‌ی مساله‌ی (۲۰) نیز است؛ بنابراین متوقف شوید، در غیر این صورت به گام دوم بروید.

**گام دوم.** مینیمم موضعی مساله‌ی (TRS) متناظر،  $x_\ell^*$  را در صورت وجود محاسبه کنید. اگر  $\hat{b}^T x_\ell^* \leq \bar{\beta}$ ، این مساله را که به فرم مساله‌ی (۳) است حل کنید و جواب بهینه‌ی آن را نیز به عنوان کاندیدای جواب بهینه در نظر بگیرید. از میان جواب‌های موجود، جواب با کم‌ترین مقدار تابع هدف، جواب بهینه‌ی مساله‌ی (۲۰) است.

#### ۴ نتایج محاسباتی

در این بخش نتایج عددی حاصل از اجرای الگوریتم پیشنهادی برای حل مساله‌ی (۱) روی دسته‌ای از مسایل تصادفی ارائه می‌شود. از آنجا که حل مساله‌ی (۲) در ابعاد بزرگ امکان‌پذیر نیست، تنها برای مسایل با ابعاد کوچک ( $n \leq 400$ ) و در حالتی که مساله‌ی (۱) با مساله‌ی (۲) معادل است، روش پیشنهادی با مساله‌ی (۲) مقایسه و مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. برای مسایل با ابعاد بزرگ تنها نتایج حاصل از حل مساله‌ی (۱) با الگوریتم پیشنهادی گزارش می‌شود. برای حل مساله (۲) از بسته‌ی نرم‌افزاری CVX استفاده شده است [۱۷]. از تابع  $A = \text{sprandsym}(n, \text{density})$  در متلب برای تولید ماتریس مقارن  $A$  استفاده شده است که در آن  $\text{density}$  به چگالی ماتریس تولید شده و  $n$  به بعد مساله اشاره می‌کند. از لم زیر نیز برای تولید مساله‌ی (TRS) استفاده شده است.

**لم ۳ (۱۵۱، لم ۱۸).** فرض کنید  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ماتریس مقارن با  $\lambda_1 < \min\{0, \lambda_n\}$  باشد، تعریف کنید  $a = -(A + \mu I)v_1$  که در آن  $v_1$  بردار ویژه‌ی متناظر با  $\lambda_1$  با  $\|v_1\| = \delta$  و  $\mu \in (\max\{0, -\lambda_n\}, -\lambda_1)$ ، آنگاه  $v_1$  مینیمم موضعی مساله‌ی (TRS) متناظر است.

#### ۴-۱ دسته‌ی اول از مسایل تست

فرض کنید  $x_{opt}$  جواب بهینه‌ی مسأله‌ی (TRS) تولید شده باشد، به منظور حذف  $x_{opt}$  از ناحیه شدنی مسأله‌ی (۱)، قرار می‌دهیم  $b_1 = 0.9x_{opt}$ ،  $b_2 = -b_1$ ،  $b_3 = \|b_1\|$  و  $\beta_1 = -\beta_2 + 0.1$  و  $\beta_3 = 0$ . در این صورت دو ابرصفحه‌ی  $b_1^T x = \beta_1$  و  $b_2^T x = \beta_2$  موازی هستند و بنابراین مسأله‌ی (۱) تولید شده، با مسأله‌ی (۲) معادل است. نتایج عددی به دست آمده از اجرای الگوریتم پیشنهادی و همچنین حل مسأله‌ی (۲) روی دسته‌ی اول از مسایل تست در ابعاد کوچک در جدول ۱ خلاصه شده است. در هر بعد، ده مسأله تولید و میانگین نتایج به دست آمده گزارش شده است. دقت هر یک از روش‌ها از رابطه زیر محاسبه شده است:

$$\frac{|q(x^*) - q(x_{best})|}{|q(x_{best})|}$$

که در آن  $x^*$  جواب بهینه‌ی به دست آمده از هر روش و  $x_{best}$  جواب با کم‌ترین مقدار تابع هدف از میان دو جواب به دست آمده از دو روش است. همان‌طور که در جدول ۱ مشاهده می‌شود، الگوریتم پیشنهادی جواب بهینه‌ی مسأله‌ی (۱) را با دقت تقریباً یکسان و در مدت زمان کوتاه‌تری نسبت به مسأله‌ی (۲) محاسبه می‌کند. نتایج حاصل از اجرای الگوریتم پیشنهادی روی دسته‌ی اول از مسایل تست در ابعاد بزرگ در جداول ۲ و ۳ بیان شده است. از مباحث مطرح شده در بخش ۲ می‌دانیم جواب بهینه‌ی مسأله‌ی (۱)،  $x^*$ ، یا مینیمم موضعی مسأله‌ی (TRS) متناظر است و یا جواب بهینه‌ی یک زیر مسأله‌ی ناحیه اطمینان است. اگر  $x^*$  مینیمم موضعی مسأله‌ی (TRS) باشد، در تمامی جداول  $KKT_1$  و  $KKT_2$  به ترتیب از روابط زیر محاسبه شده است:

$$KKT_1 = \|(A + \lambda^* I)x^* + a\|_\infty,$$

$$KKT_2 = \lambda^* (\|x^*\|^2 - \delta),$$

که در آن  $\lambda^*$  ضریب لاگرانژ متناظر است. اگر  $x^*$  جواب بهینه یک زیر مسأله‌ی ناحیه اطمینان باشد،  $KKT_1$  و  $KKT_2$  به ترتیب از روابط زیر محاسبه شده است:

$$KKT_1 = \|(\tilde{A} + \lambda^* I)x^* + \tilde{a}\|_\infty,$$

$$KKT_2 = \lambda^* (\|x^*\|^2 - \tilde{\delta}),$$

که در آن  $\lambda^*$  ضریب لاگرانژ متناظر،  $\tilde{A}$  هسیان تابع هدف،  $\tilde{a}$  بردار متناظر با جمله‌ی خطی تابع هدف و  $\tilde{\delta}$  اسکالر مثبت سمت راست قید نرمی مسأله‌ی ناحیه اطمینانی است که  $x^*$  جواب بهینه‌ی آن است. همان‌طور که در جداول ۲ و ۳ مشاهده می‌شود با کاهش میزان چگالی ماتریس  $A$  زمان اجرای الگوریتم نیز کاهش می‌یابد. دلیل این امر را می‌توان در هزینه‌ی محاسباتی حاصل ضرب یک بردار در یک ماتریس دانست که هزینه‌ی غالب در الگوریتم‌های موجود برای حل مسایل مقدار ویژه است و این نیز با کاهش میزان چگالی ماتریس کاهش می‌یابد.

جدول ۱. مقایسه بین الگوریتم پیشنهادی و حل مساله‌ی (۲) روی دسته‌ی اول از مسایل تست

الگوریتم پیشنهادی		مساله‌ی (۲)		بعد
زمان (ثانیه)	دقت	زمان	دقت	
۰/۲۰	$6/2589 \times 10^{-11}$	۲/۶۵	$5/4780 \times 10^{-12}$	۱۰۰
۰/۳۸	$4/5136 \times 10^{-11}$	۱۸/۱۵	$1/6274 \times 10^{-10}$	۲۰۰
۰/۳۹	$2/0858 \times 10^{-10}$	۷۲/۵۷	$5/5983 \times 10^{-12}$	۳۰۰
۰/۵۶	$8/9449 \times 10^{-11}$	۱۹۶/۹۳	$4/1439 \times 10^{-10}$	۴۰۰

جدول ۲. نتایج حاصل از اجرای الگوریتم پیشنهادی روی دسته‌ی اول از مسایل تست با  $\text{density}=0/01$ 

$KKT_2$	$KKT_1$	زمان (ثانیه)	بعد
$-8/2321 \times 10^{-17}$	$1/6338 \times 10^{-10}$	۱/۱۶	۱۰۰۰
$3/1453 \times 10^{-17}$	$8/3511 \times 10^{-10}$	۳/۳۶	۲۰۰۰
$-5/1149 \times 10^{-16}$	$5/6302 \times 10^{-10}$	۶/۸۱	۳۰۰۰
$-2/9622 \times 10^{-14}$	$4/2516 \times 10^{-10}$	۱۲/۵۳	۴۰۰۰
$2/1939 \times 10^{-43}$	$2/0642 \times 10^{-10}$	۲۱/۸۱	۵۰۰۰

جدول ۳. نتایج حاصل از اجرای الگوریتم پیشنهادی روی دسته‌ی اول از مسایل تست با  $\text{density}=0/001$ 

$KKT_2$	$KKT_1$	زمان (ثانیه)	بعد
$-3/8128 \times 10^{-17}$	$2/7767 \times 10^{-9}$	۰/۶۳	۱۰۰۰
$-1/1341 \times 10^{-15}$	$3/3275 \times 10^{-9}$	۱/۵۲	۲۰۰۰
$-1/0726 \times 10^{-16}$	$1/8396 \times 10^{-10}$	۲/۴۸	۳۰۰۰
$1/2528 \times 10^{-16}$	$2/9711 \times 10^{-9}$	۴/۶۱	۴۰۰۰
$2/6681 \times 10^{-16}$	$3/4954 \times 10^{-9}$	۳/۸۸	۵۰۰۰

#### ۴-۲ دسته دوم از مسایل تست

فرض کنید  $x_{opt}$  و  $x_{\ell}$  به ترتیب مینیمم موضعی و مینیمم سراسری مساله‌ی (TRS) تولید شده باشد، قرار می‌دهیم  $b_1 = x_{opt} - x_{\ell}$  و  $\beta_1 = b_1^T x_{\ell} + 0/01 \|b_1\|^2$ . همچنین  $b_r$  را برداری در نظر می‌گیریم که درایه‌های آن دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس ۱ هستند و قرار می‌دهیم  $\beta_r = b_r^T x_{\ell} + 0/1$ . در این صورت  $x_{opt}$  برای مساله‌ی (۱) حاصل، نشدنی و  $x_{\ell}$  شدنی است. همانند دسته‌ی اول از مسایل تست، در هر بعد ده مساله تولید و میانگین نتایج به دست آمده در جداول ۴ و ۵ گزارش شده است. همانند دسته‌ی اول از مسایل تست، با کاهش چگالی ماتریس  $A$  زمان اجرای الگوریتم نیز کاهش می‌یابد.

جدول ۴. نتایج حاصل از اجرای الگوریتم پیشنهادی روی دسته دوم از مسایل تست با  $\text{density} = 0.01$ 

بعد	زمان (ثانیه)	$KKT_1$	$KKT_2$
۱۰۰۰	۳/۴۶	$4/7827 \times 10^{-9}$	$1/2125 \times 10^{-15}$
۲۰۰۰	۶/۲۳	$1/1171 \times 10^{-9}$	$2/3843 \times 10^{-15}$
۳۰۰۰	۱۴/۹۱	$8/0612 \times 10^{-11}$	$-6/4599 \times 10^{-16}$
۴۰۰۰	۵۳/۶۲	$6/0281 \times 10^{-8}$	$1/0053 \times 10^{-14}$
۵۰۰۰	۶۴/۱۲	$4/2163 \times 10^{-11}$	$1/9227 \times 10^{-14}$

جدول ۵. نتایج حاصل از اجرای الگوریتم پیشنهادی روی دسته دوم از مسایل تست با  $\text{density} = 0.001$ 

بعد	زمان (ثانیه)	$KKT_1$	$KKT_2$
۱۰۰۰	۱/۴۲	$7/1172 \times 10^{-10}$	$2/3511 \times 10^{-16}$
۲۰۰۰	۱/۶۸	$7/9524 \times 10^{-10}$	$7/5585 \times 10^{-16}$
۳۰۰۰	۳/۳۲	$2/8822 \times 10^{-10}$	$2/8455 \times 10^{-16}$
۴۰۰۰	۴/۱۷	$5/1819 \times 10^{-7}$	$2/3665 \times 10^{-15}$
۵۰۰۰	۵/۶۹	$4/6716 \times 10^{-11}$	$1/1151 \times 10^{-15}$

## ۵ نتیجه گیری

زیر مسأله‌ی ناحیه اطمینان به همراه قیود خطی در حل سایر مسایل بهینه‌سازی غیرخطی مقید به روش ناحیه اطمینان و همچنین به روش برنامه‌ریزی درجه‌ی دوم ظاهر می‌شوند. در این مقاله حل زیر مسأله‌ی ناحیه اطمینان به همراه دو قید خطی در ابعاد بزرگ مورد مطالعه قرار گرفته است. با بهره‌گیری از جدیدترین نتایج به دست آمده که نشان می‌دهد جواب بهینه زیر مسأله‌ی ناحیه اطمینان و مینیمم موضعی آن را می‌توان از طریق حل یک مسأله‌ی مقدار ویژه‌ی تعمیم یافته محاسبه نمود، به حل زیر مسأله‌ی ناحیه اطمینان به همراه دو قید خطی پرداخته شد. این امر حل مسأله‌ی توسعه یافته را در ابعاد بزرگ از طریق حل تعدادی مسأله‌ی مقدار ویژه‌ی تعمیم یافته ممکن می‌سازد. مقایسه الگوریتم پیشنهادی با فرمول‌بندی مخروطی مسأله‌ی توسعه یافته نشان می‌دهد که روش پیشنهادی جواب بهینه‌ی مسأله را در مدت زمان کوتاه‌تری و با دقت تقریباً یکسانی محاسبه می‌کند.

## سپاسگزاری

نویسنده دوم از حمایت مالی دانشگاه گیلان در طول دوره فرصت مطالعاتی در دانشگاه واترلو کانادا قدردانی می‌نماید.

## منابع

- [1] Conn, A. R., Gould, N. I., Toint, P. L., (2000). Trust region methods. SIAM, Philadelphia, PA.

- [2] Celis, M. R., Dennis, J. E., Tapia, A. R., (1985). A trust region strategy for nonlinear equality constrained optimization. *Numerical Optimization*, 71-82.
- [3] Boggs, P. T., Tolle, J. W., (1995). Sequential quadratic programming. *Acta Numerica*, 4, 1-51.
- [4] Sorensen, D. C., (1997). Minimization of a large-scale quadratic function subject to a spherical constraint. *SIAM Journal on Optimization*, 7(1), 141-161.
- [5] Adachi, S., Iwata, S., Nakatsukasa, Y., Takeda, A., (2015). Solving the trust region subproblem by a generalized eigenvalue problem. Technical report, Mathematical Engineering, The University of Tokyo.
- [6] Rendl, F., Wolkowicz, H., (1997). A semidefinite framework for trust region subproblems with applications to large scale minimization. *Mathematical Programming*, 77(1), 273-299.
- [7] Gould, N. I., Lucidi, S., Roma, M., Toint, P. L., (1999). Solving the trust-region subproblem using the Lanczos method. *SIAM Journal on Optimization*, 9(2), 504-525.
- [8] Fortin, C., Wolkowicz, H., (2004). The trust region subproblem and semidefinite programming. *Optimization Methods and Software*, 19(1), 41-67.
- [9] Sturm, J. F., Zhang, S., (2003). On cones of nonnegative quadratic functions. *Mathematics of Operations Research*, 28(2), 246-267.
- [10] Jeyakumar, V., Li, G. Y., (2014). Trust-region problems with linear inequality constraints: exact SDP relaxation, global optimality and robust optimization. *Mathematical Programming*, 147(1-2), 171-206.
- [11] Hsia, Y., Sheu, R. L., (2013). Trust region subproblem with a fixed number of additional linear inequality constraints has polynomial complexity. Report, Beihang University, Beijing, China.
- [12] Burer, S., Yang, B., (2013). The trust region subproblem with non-intersecting linear constraints. *Mathematical Programming*, 149(1-2), 253-264.
- [13] Burer, S., Anstreicher, K. M., (2013). Second-order-cone constraints for extended trust-region subproblems. *SIAM Journal on Optimization*, 23(1), 432-451.
- [14] Salahi, M., Fallahi, S., (2016). Trust region subproblem with an additional linear inequality constraint. *Optimization Letters*, 10(4), 821-832.
- [15] Salahi, M., Taati, A., Wolkowicz, H., (2016). Local nonglobal minima for solving large scale extended trust region subproblems. *Computational Optimization and Applications*, DOI: 10.1007/s10589-016-9867-4.
- [16] Martínez, J. M., (1994). Local minimizers of quadratic functions on Euclidean balls and spheres. *SIAM Journal on Optimization*, 4(1), 159-176.
- [17] Grant, M., Boyd, S., (2013). CVX: Matlab software for disciplined convex programming. version 2.0 beta. <http://cvxr.com/cvx>.