مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، سال سیزدهم، شماره سوم (پیاپی ۵۰)، پاییز ۹۵، ص ص ۹۶-۸۷
شاپا ۷۲۸۶-۲۲۵۱

یک عملگر غیرخطی پیوسته برای بازی تکاملی با زمان گسسته در بازارهای تصادفی دوگانه

مهدی کشتکار[۱]، حمیدرضا نویدی[*۲]، الیاس شیوانیان[۳]
۱- دانشجوی دکتری، دانشگاه شاهد، گروه ریاضی کاربردی، تهران، ایران
۲- دانشیار، دانشگاه شاهد، گروه ریاضی کاربردی، تهران، ایران
۳- استادیار، دانشگاه بین المللی امام خمینی(ره)، گروه ریاضی، قزوین، ایران

رسید مقاله: ۲۰ اسفند ۱۳۹۴
پذیرش مقاله: ۱ مرداد ۱۳۹۵

چکیده
در این مقاله به مطالعه دینامیک تکاملی جامعه‌ای می‌پردازیم که از دو دسته افراد ستیزه‌جو و سازش‌گر تشکیل شده است. در این مدل از بازی، افراد همان بنگاه‌های اقتصادی هستند که دو به دو به طور تصادفی با یکدیگر تبادلات مالی انجام می‌دهند؛ البته افراد در طول بازی دارای رفتار ثابتی هستند و تکامل در دوره‌های متعددی از زمان بین افراد اتفاق می‌افتد. یک عملگر غیرخطی پیوسته را برای این بازی تکاملی در زمان گسسته ارایه می‌دهیم. روابط ریاضی لازم را برای به دست آوردن نقطه تعادلی این عملگر بیان و نشان می‌دهیم که در نهایت مالکیت بنگاه‌های اقتصادی از بین می‌رود.

کلمات کلیدی: بازی تکاملی، بازارهای تصادفی دوگانه، عملگر غیرخطی، نقطه تعادلی، توزیع ثروت.

۱ مقدمه
جامعه متشکل از افرادی است که دو استراتژی مجزا دارند و موفقیت و شکست این استراتژی‌ها رابطه‌ی مستقیمی با موفقیت بنگاه‌های اقتصادی خواهد داشت [۱]. نظریه بازی تکاملی به دنبال ساختن دینامیکی برای رسیدن به رفتار تعادلی است و معروف‌ترین دینامیک‌های تکاملی، دینامیک ریپلیکیتور و لاگیت می‌باشد [۲-۵]. یافتن یک استراتژی مناسب در یک بازی که از دو دسته افراد تشکیل شده و به صورت سازمانی عمل می‌کند و به دنبال تعادل می‌باشد نیز نوع دیگری از این بازی‌هاست [۶]. رویکرد معمول در این زمینه، در نظر گرفتن بازی‌هایی با تعداد متناهی استراتژی است که با دینامیک‌هایی به تعادل نش همگرا می‌شوند. فناوری ریزآرایه یک ابزار تحلیلی کوچک دیگری است که به کمک آن می‌توان ده‌ها هزار بازیکن را در جامعه‌ای که به طور همزمان با یکدیگر برخورد دارند مورد کاوش قرار داد[۷]. در سال های اخیر دانشمندان روش‌ها و مدل‌های مختلفی از فیزیک آماری را به طور موفقیت‌آمیزی در داده‌های واقعی مشاهده شده در اقتصاد به کار گرفته‌اند [۸-۹]. مدل‌های

* عهده‌دار مکاتبات
آدرس الکترونیکی: hnavidi@gmail.com

مختلفی برای تفسیر منشا توزیع‌های ثروت به کار گرفته شده است. از نگاه کلی لازم به ذکر است که بازارها به طور ذاتی تصادفی در نظر گرفته می‌شوند به دلیل اینکه تعداد نامعینی از بنگاه‌های اقتصادی در هر لحظه به صورت غیرقابل پیش‌بینی با یکدیگر وارد معامله می‌شوند. این نوع از مدل‌های اقتصادی که بیان‌گر تبادل مالی بین بازارهای تصادفی هستند اغلب به صورت مدل‌های گازمانند شناخته می‌شوند [۱۰]. به این ترتیب برای تفسیر انواع مختلفی از رفتارهای آماری در مدل‌های اقتصادی، انواع مختلفی از مدل‌های گازمانند پیشنهاد شده است. از طرف دیگر توزیع نمایی برای تعبیر بنگاه‌های اقتصادی که بیش‌تر شبیه ذرات گاز به صورت کاملا تصادفی و دوبه‌دو تبادل مالی دارند به کار گرفته می‌شود [۱۱-۱۳]. در کنار این رویکرد یک ادبیات قابل ملاحظه‌ای وجود دارد و آن گسترش دینامیک‌های تکاملی بازی‌هایی با عملگرهای غیرخطی است [۱۹-۱۴]. این مقاله برای بازی‌های با دو نوع بازیکن که همان بنگاه‌های اقتصادی هستند و برای به دست آوردن ثروت با یکدیگر در حال رقابت می‌باشند یک عملگر غیرخطی برای کنترل تکامل توزیع ثروت جامعه‌ای که متشکل از دو نوع افراد ستیزه‌جو و سازش‌گر است و به‌طور تصادفی و دوبه‌دو دارایی خود را تقسیم می‌کنند، در نظر می‌گیرد. وقتی افراد ستیزه‌جو را از جامعه حذف کنیم توزیع ثروت نمایی که حالت خاصی از مدل ارایه شده است حاصل می‌شود [۱۵]. کارهای اخیر به‌ویژه [۱۴-۱۶] بنگاه‌های اقتصادی را از یک نوع و با یک استراتژی در نظر گرفته است و این موضوع کم‌تر در واقعیت دیده می‌شود. این مقاله با توسیع کارهای قبلی و با در نظر گرفتن دو نوع بازیکن که هرنوع از بازیکنان استراتژی خاص خود را دارند عملگر متناسب با این بازی را ارایه داده و تعادل بازی را به دست خواهد آورد.

در ادامه، مقاله به صورت زیر سازماندهی می‌شود. در بخش دوم به معرفی مدل غیرخطی برای بازی‌های جمعیتی با دو نوع بازیکن می‌پردازیم. در بخش سوم ویژگی‌های ریاضی عملگر را بیان خواهیم کرد و در بخش چهارم مثال‌هایی برای تشریح عملگر غیرخطی ارایه شده است. در نهایت نتیجه‌گیری نیز در بخش پنجم بیان خواهد شد.

۲ مدل غیرخطی

یک مجموعه از بنگاه‌های اقتصادی که در دو دسته ستیزه‌جو و سازش‌گر پول‌شان را دوبه دو به طور تصادفی تبادل می‌کنند در نظر می‌گیریم. سه نوع معامله بین آن ها صورت می‌گیرد. قبل از اینکه حالت‌ها را بیان کنیم در همه حالت‌ها $\varepsilon \in (\circ,\text{۱})$ و بنگاه‌های اقتصادی (i,j) به طور تصادفی انتخاب می‌شود و پول اولیه آن ها در زمان nام به میزان (m_i,m_j) می‌باشد که بعد از تعامل با یکدیگر پول‌شان در زمان $n+\text{۱}$ام به (m_i',m_j') تبدیل می‌شود.

حالت اول: بازی‌های بین بازیکنان نوع اول (سازش‌گر و سازش‌گر)

قاعده معاملات را برای هر دوتایی (m_i,m_j) از نوع اول می‌توان به صورت زیر نوشت [۱۳]:

$$\begin{aligned} m_i' &= \varepsilon(m_i+m_j), \\ m_j' &= (\text{۱}-\varepsilon)(m_i+m_j), \\ i,\ j &= \text{۱},\text{۲},\ldots,N_{\text{۱}}. \end{aligned} \qquad (\text{۱})$$

احتمال داشتن x واحد پول در زمان $n+1$ برابر خواهد بود با مجموع احتمالات همه دوتایی‌های بنگاه‌های اقتصادی (u,v) که این توانایی را دارند به میزان x واحد پول بعد از تعاملاتشان تولید کنند، به عبارت دیگر همه دوتایی‌هایی که در شرط $u+v>x$ صدق کنند.

حالت دوم: بازی‌های بین بازیکنان نوع دوم (ستیزه‌جو و ستیزه‌جو)

قاعده معاملات را برای هر دوتایی (m_i,m_j) از نوع دوم می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} m_i' &= \varepsilon(m_i+m_j-c),\\ m_j' &= (1-\varepsilon)(m_i+m_j-c),\\ i,j &= 1,2,\ldots,N_2. \end{aligned} \tag{2}$$

در این حالت هر تعامل به میزان $c>0$ واحد هزینه دارد. در واقع وقتی یک ستیزه‌جو با یک ستیزه‌جو تعامل می‌کند به میزان c واحد پول در این بازی از دست می‌رود.

حالت سوم: بازی‌های بین بازیکنان نوع سوم (ستیزه‌جو و سازش‌گر)

این حالت همان حالت اول است با این تفاوت که دارایی ستیزه‌جو و سازش‌گر به ترتیب برابر خواهد بود با m_i+m_j و ۰، به عبارت دیگر:

$$\begin{aligned} m_i' &= m_i+m_j, \quad i\in F,\\ m_j' &= 0, \qquad\quad j\in Y,\\ j &= 1,2,\ldots,N_1, \quad i=1,2,\ldots,N_2. \end{aligned} \tag{3}$$

N_1 و N_2 اعداد به اندازه کافی بزرگ که به ترتیب تعداد افراد سازش‌گر (Y) و ستیزه‌جو (F) می‌باشد. با مجموع سه حالت بالا توزیع ثروت اولیه $p_0(m)$ با اعمال عملگر غیرخطی بر روی آن از مرحله n به مرحله $n+1$ به توزیع تعادلی صفر میل خواهد کرد؛ یعنی:

$$\lim_{n\to\infty} T^n(p_0(m)) \to 0 \tag{4}$$

منشا عملگر T در [۱۴-۱۶] آمده است. فرض کنید p_n توزیع ثروت جامعه در دوره زمانی nام باشد.

مجموع احتمالات همه دوتایی‌های (u,v) از بنگاه‌های اقتصادی که در تعامل با یکدیگر قادر به تولید x واحد پول می‌باشند معادل احتمال وقوع x واحد پول در مرحله $n+1$ام خواهد بود، این یعنی همه دوتایی‌های (u,v) حالت‌های اول و سوم که در شرط $u+v>x$ و همه دوتایی‌های حالت دوم که در شرط $u+v-c>x$ صدق می‌کنند؛ بنابراین احتمال اینکه دوتایی (u,v) از بنگاه‌های اقتصادی که با یکدیگر تعامل داشته باشند برابر $p_n(u)*p_n(v)$ است و این تعاملات کاملاً تصادفی است و به ازای هر x از بازه $(0,u+v)$ در همه حالت‌ها با احتمال برابر می‌تواند رخ دهد، از این رو احتمال به دست آوردن یک مقدار معین x برای همه دوتایی (u,v) برابر $\frac{p_n(u)*p_n(v)}{u+v}$ خواهد بود. در این صورت یک عملگر غیرخطی پیوسته را برای بازی تکاملی با زمان گسسته که ترکیبی از سه حالت گفته شده است، به صورت زیر ارایه می‌دهیم:

$$\begin{aligned} p_{n+1}(x) &= Tp_n(x) \\ &= \frac{1}{3}\iint_{u+v>x} \frac{p_n(u)p_n(v)}{u+v}dudv + \frac{1}{3}\iint_{u+v>x+c} \frac{p_n(u)p_n(v)}{u+v}dudv \\ &\quad + \frac{1}{3}\iint_{u+v>x} \frac{p_n(u)p_n(v)}{u+v}dudv \end{aligned} \tag{5}$$

با توجه به اینکه جملات انتگرالی از سمت چپ به ترتیب مربوط به حالت‌های (سازش‌گر و سازش‌گر)، (ستیزه‌جو و ستیزه‌جو) و (سازش‌گر و ستیزه‌جو) می‌باشند، در واقع اگر $c = 0$ یا به عبارت دیگر تفاوتی بین افراد ستیزه‌جو و سازش‌گر قایل نشویم همان مدل [۱۴-۱۶] حاصل خواهد شد.

۳ ویژگی‌های ریاضی عملگر

در ابتدا مفاهیم و تعاریف ریاضی لازم را برای عملگر ارایه شده بیان خواهیم کرد.

تعریف ۱. فضای L_1^+ از توابع مثبت (توزیع‌های ثروت) در بازه $[0,\infty)$ را معرفی می‌کنیم [۱۷]

$$L_1^+[0,\infty) = \{y:[0,\infty) \to R^+ \cup \{0\}, \|y\| < \infty\} \tag{6}$$

با نرم یک

$$\|y\| = \int_0^\infty y(x)dx \tag{7}$$

در حالت خاص، زیرمجموعه‌ای از $L_1^+[0,\infty)$؛ یعنی گوی واحد

$$B = \left\{ y \in L_1^+[0,\infty), \quad \|y\| = 1 \right\}$$

را در نظر می‌گیریم.

تعریف ۲. برای $x \geq 0$ و $y \in L_1^+[0,\infty)$ عملگر T را بر روی y به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} T(y(x)) &= \frac{1}{3}\iint_{S(x)} \frac{y(u)y(v)}{u+v}dudv + \frac{1}{3}\iint_{S_c(x)} \frac{y(u)y(v)}{u+v}dudv \\ &\quad + \frac{1}{3}\iint_{S(x)} \frac{y(u)y(v)}{u+v}dudv \end{aligned} \tag{8}$$

که $S(x)$ و $S_c(x)$ ناحیه نمایش دوتایی‌های (u,v) هستند که می‌توانند بعد از تعاملاتشان x را تولید کنند. به عبارت دیگر:

$$S(x) = \{(u,v): u,v > 0, u+v > x\}$$
$$S_c(x) = \{(u,v): u,v > 0, u+v > x+c\}$$

اگر هزینه تعامل c برای هیچ یک از افراد در بازی وجود نداشته باشد، عملگر T تعریف شده در (۸) تعداد نهایی افراد در بازی را حفظ می‌کند. به عبارت دیگر $\|Tp\| = \|p\| = 1$ و این ایجاب می‌کند ثروت نهایی سیستم حفظ شود؛ اما در مدل ارایه شده فرض برآن است $c > 0$، که در این صورت، عملگر T تعداد نهایی افراد فعال در بازی را حفظ نمی‌کند؛ زیرا تعدادی از آن ها دارایی خود را از دست می‌دهند؛ بنابراین $\|Tp\| < \|p\|$ معتبر است.

لم ۱. برای هر $y \in L_1^+[0,\infty)$ و $c > 0$ ادعا می‌کنیم:

$$c\int_c^\infty \int_c^\infty \frac{y(u)y(v)}{u+v}dudv < \|y\|^2$$

برهان: به وضوح داریم:

$$\begin{aligned}
&c\int_c^\infty \int_c^\infty \frac{y(u)y(v)}{u+v}dudv + \int_c^\infty du\int_c^\infty dv\int_0^{u+v-c}\frac{y(u)y(v)}{u+v}dx \\
&= c\int_c^\infty \int_c^\infty \frac{y(u)y(v)}{u+v}dudv - c\int_c^\infty \int_c^\infty \frac{y(u)y(v)}{u+v}dudv + \int_c^\infty y(u)du\int_c^\infty y(v)dv \\
&= \left[\int_c^\infty y(u)du\right]^2 < \|y\|^2
\end{aligned}$$

چون جمله دوم از سطر اول مثبت است ،پس نامساوی در لم معتبر است. ■

قضیه ۱. برای هر $y \in L_1^+[0,\infty)$ داریم:

$$\|Ty\| \le \|y\|^2 - c\int_c^\infty\int_c^\infty \frac{y(u)y(v)}{u+v}dudv$$

آن بدین معنی است که تعداد افراد فعال در سیستم اقتصادی در دوره‌های زمانی حفظ نمی‌شود؛ یعنی در گوی واحد Bاگر $y \in B$،آنگاه $Ty \notin B$.

برهان: با توجه به تعریف ۱ می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
\|Ty\| &= \int_0^\infty \left[\frac{2}{3}\iint_{S(x)} \frac{y(u)y(v)}{u+v}dudv + \frac{1}{3}\iint_{S_c(x)} \frac{y(u)y(v)}{u+v}dudv\right]dx \\
&= \frac{2}{3}\int_0^\infty du\int_0^\infty dv\int_0^{u+v}\frac{y(u)y(v)}{u+v}dx + \frac{1}{3}\int_c^\infty du\int_c^\infty dv\int_0^{u+v-c}\frac{y(u)y(v)}{u+v}dx \\
&= \frac{2}{3}\int_0^\infty y(u)du\int_0^\infty y(v)dv + \frac{1}{3}\int_c^\infty du\int_c^\infty dv\int_0^{u+v-c}\frac{y(u)y(v)}{u+v}dx \\
&= \frac{2}{3}\|y\|^2 + \frac{1}{3}\int_c^\infty y(u)du\int_c^\infty y(v)dv - \frac{1}{3}c\int_c^\infty\int_c^\infty \frac{y(u)y(v)}{u+v}dudv \\
&\le \frac{2}{3}\|y\|^2 + \frac{1}{3}\|y\|^2 - \frac{2}{3}\left(\int_0^\infty y(x)dx\int_0^c y(x)dx\right) + \frac{1}{3}\left(\int_0^c y(x)dx\right)^2 - \frac{1}{3}c\int_c^\infty\int_c^\infty \frac{y(u)y(v)}{u+v}dudv \\
&\le \|y\|^2 - \frac{1}{3}\left(\int_0^c y(x)dx\right)^2 - \frac{1}{3}c\int_c^\infty\int_c^\infty \frac{y(u)y(v)}{u+v}dudv \\
&\le \|y\|^2 - \frac{1}{3}c\int_c^\infty\int_c^\infty \frac{y(u)y(v)}{u+v}dudv.
\end{aligned}$$

چون $\|y\| = \|y\|^2$ پس $\|Ty\| < \|y\|^2$ و طبق تعریف ۱، $\|Ty\| < 1$. $Ty \notin B$. ■

قضیه ۲. گوی واحد $B = \{y \in L_1^+[0,\infty),\ \|y\| = 1\}$ را در نظر می‌گیریم. اگر $y \in B$، آنگاه با فرض اینکه $y_n(x) \in L_1^+[0,\infty)$، $y_{n+1}(x) = Ty_n(x) = T^n y(x)$ یک عملگر نزولی نسبت به نرم یک است.

برهان: با توجه به لم۱ و قضیه۱ به وضوح داریم:

$$\|Ty\| \le \|y\|^{۲} - c\int_{c}^{\infty}\int_{c}^{\infty}\frac{y(u)y(v)}{u+v}dudv > ۰$$

بنابراین $\|Ty\| < \|y\|^{۲}$ برقرار است. ■

نتیجه ۱. فرض کنید $y \in B$ در این صورت سیستم به توزیع تعادلی صفر میل می‌کند؛ یعنی:

$$\lim_{n\to\infty} T^{n}(y(x)) \to ۰.$$

٤ مثال‌های عددی

در این بخش با شبیه سازی عددی درستی بخش قبل را نشان می‌دهیم که:

$$\lim_{n\to\infty}\|T^{n}p(x)-۰\| = ۰$$

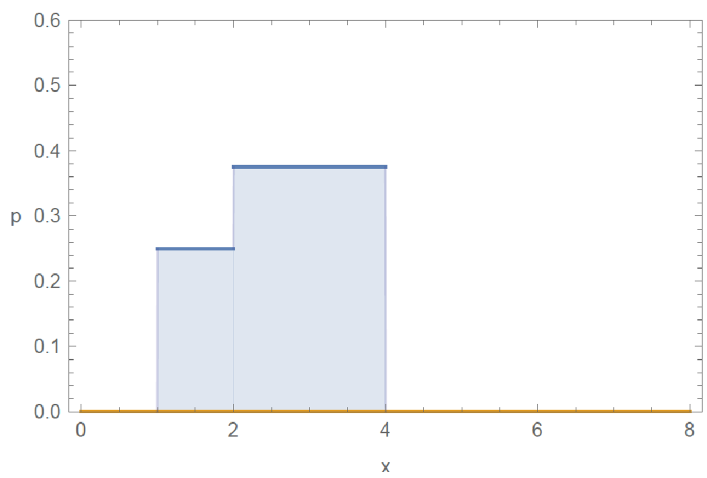
مثال ۱. یک تابع تکه‌ای خطی را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$p(x) = \begin{cases} ۰ & x < ۱ \\ \frac{۱}{۴} & ۱ \le x < ۲ \\ \frac{۳}{۸} & ۲ \le x < ۴ \\ ۰ & x \ge ۴ \end{cases}$$

بنابراین انتظار داریم:

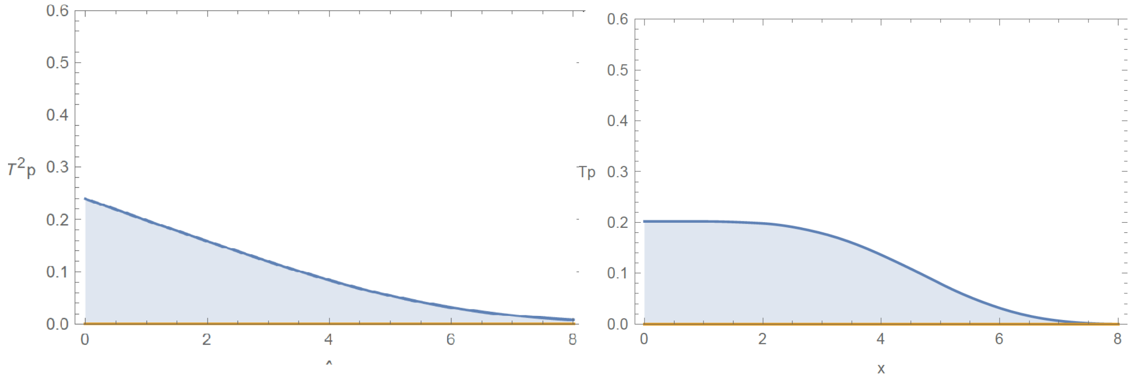
$$\lim_{n\to\infty}\|T^{n}p(x)-۰\| = ۰$$

با توجه به اینکه نمودار $p(x)$ به ازای مقادیر مختلف c ثابت است، نمودار آن را در شکل ۱ به طور مجزا آورده‌ایم.

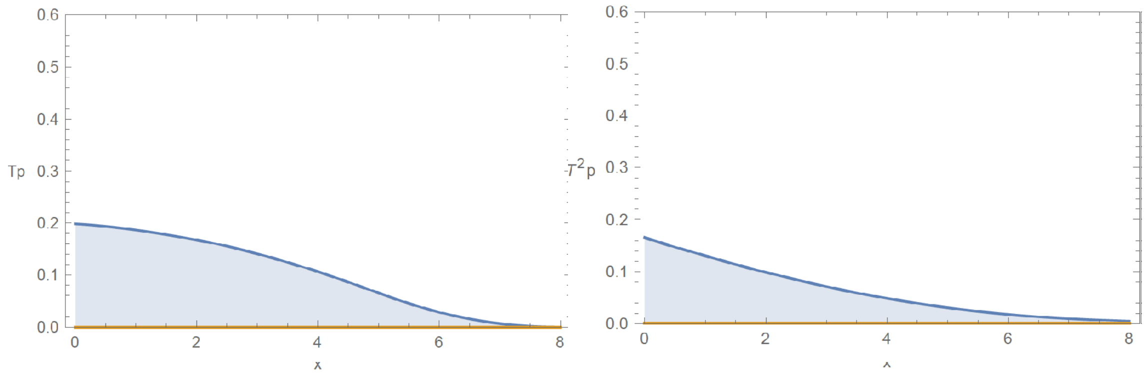


شکل ۱. نمودار $p(x)$ در مثال ۱

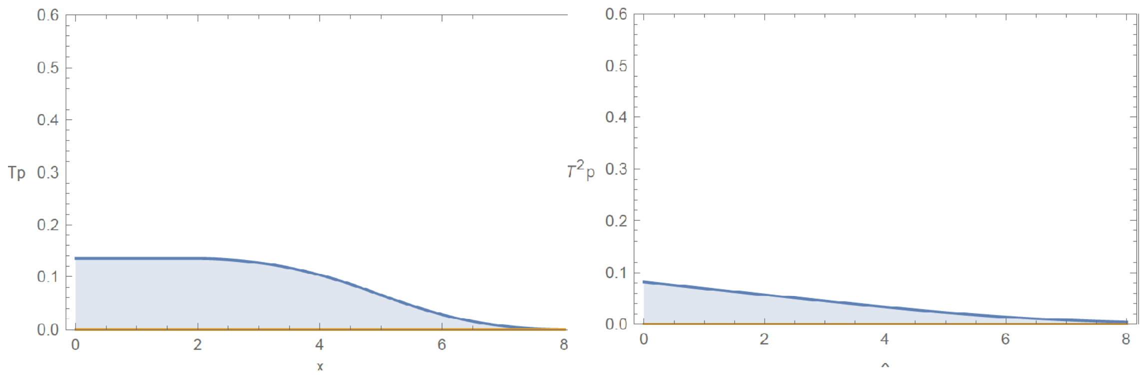
نمودارهای $Tp(x)$ و $T^{۲}p(x)$ را به ازای مقادیر مختلف c در شکل‌های ۲، ۳ و ۴ ببینید. همان‌طور که دیده می‌شود توزیع ثروت در حالت تعادلی با افزایش مقدار c به سمت صفر میل می‌کند.



شکل ۲. از چپ به راست $Tp(x)$ و $T^{۲}p(x)$ به ازای $c=۱$



شکل ۳. از چپ به راست $Tp(x)$ و $T^{۲}p(x)$ به ازای $c=۳$



شکل ٤. از چپ به راست $Tp(x)$ و $T^{۲}p(x)$ به ازای $c=۱۰$

همان‌طور که در شکل‌های ۲ تا ۴ مشاهده می‌شود به ترتیب عملگر T بر روی $p(x)$ به طور تکراری اثر گذاشته و ناحیه رنگی را به سمت صفر سوق می‌دهد، که با افزایش مقدار c ناحیه رنگی با سرعت بیش‌تری کاهش می‌یابد.

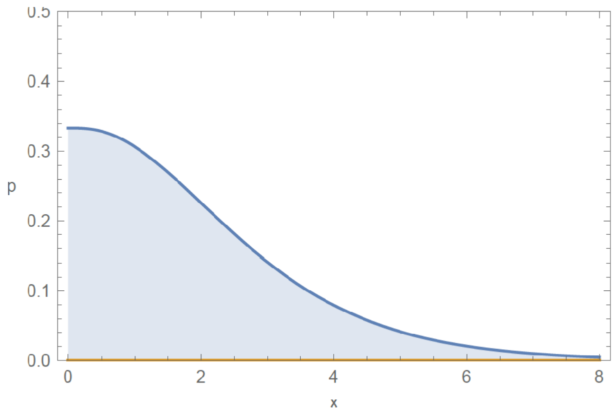
مثال ۲. تابع $p(x)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$p(x)=\mathrm{e}^{-x}\left(\frac{۱}{۳}+\frac{x}{۳}+\frac{x^{۲}}{۶}\right)$$

بنابراین انتظار داریم:

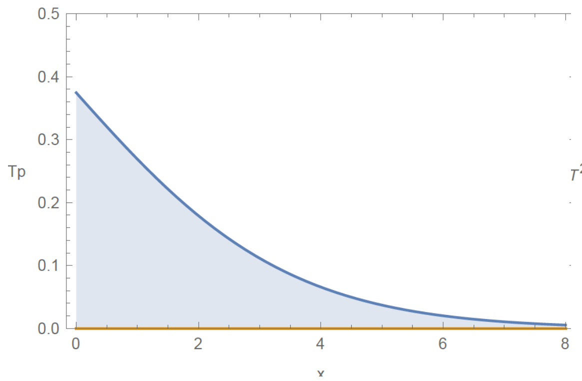
$$\lim_{n\to\infty}\left\|T^{n}p(x)-۰\right\|=۰$$

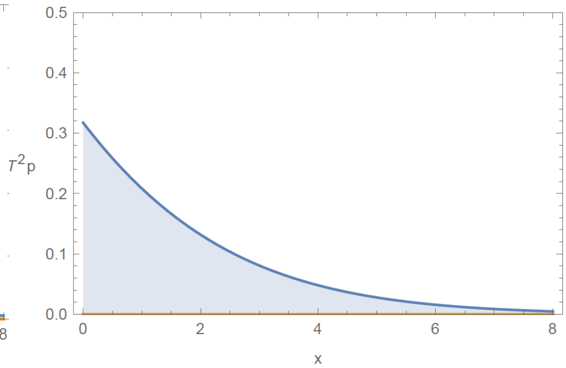
با توجه به اینکه نمودار $p(x)$ به ازای مقادیر مختلف c ثابت است، نمودار آن را در شکل ۵ به طور مجزا آورده‌ایم.



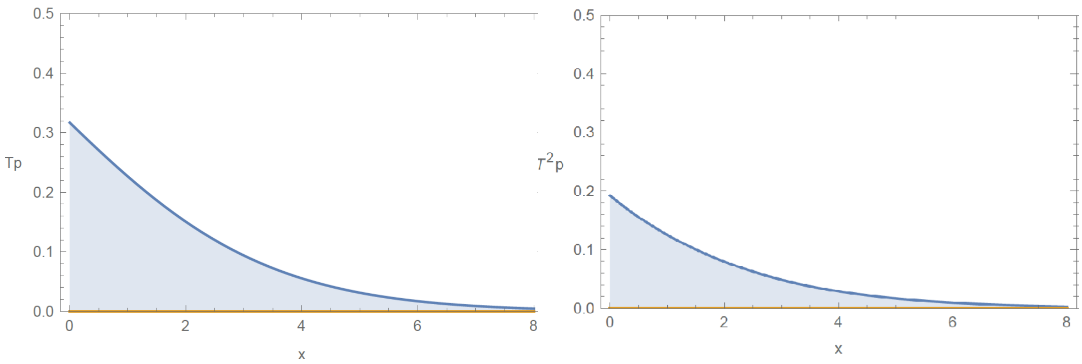
شکل ۵. نمودار $p(x)$ در مثال ۲

نمودارهای $Tp(x)$ و $T^{۲}p(x)$ را در شکل‌های ۶، ۷ و ۸ ببینید. همان طور که دوباره مشاهده می‌کنیم با افزایش مقدار c حالت تعادلی صفر سریع‌تر رخ می‌دهد.

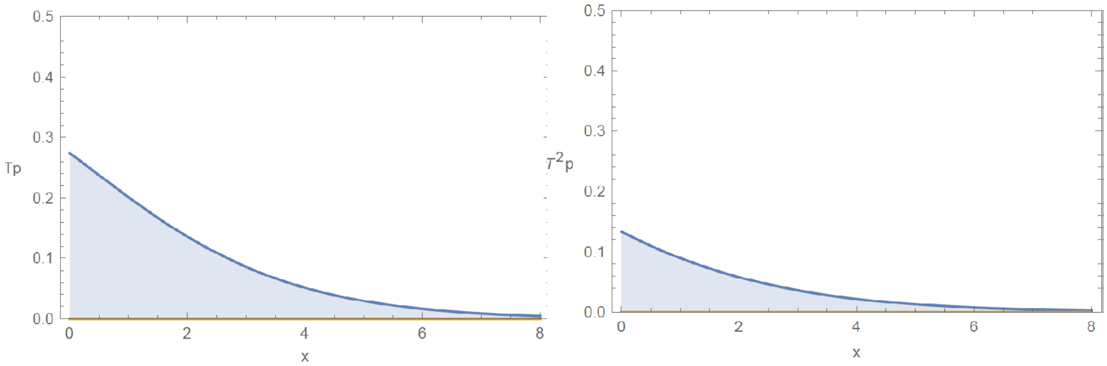




شکل ٦. از چپ به راست $Tp(x)$ و $T^{۲}p(x)$ به ازای $c=۱$



شکل ۷. از چپ به راست $p(x)$ ، $Tp(x)$ و $T^{۲}p(x)$ به ازای $c=۳$



شکل ۸. از چپ به راست $Tp(x)$ و $T^{۲}p(x)$ به ازای $c=۱۰$

مشابه آنچه که در مثال قبل گفته شد در شکل‌های فوق نیز به وضوح قابل مشاهده است و ناحیه رنگی روند کاهشی داشته و به صفر می‌گراید.

۵ تحلیل و نتیجه‌گیری

به طور خلاصه در جامعه‌ای متشکل از دو نوع افراد که با یکدیگر در بازار دوگانه به طور تصادفی تبادلات مالی دارند، یک عملگر غیرخطی پیوسته را معرفی کرده که پارامتر c درآن سبب شد این عملگر حافظ نرم نگردد، بر این اساس پارامتر c نقش اصلی را در هدایت نقطه تعادلی این عملگر به سمت صفر بازی کرد. مبتنی بر این حالت تعادلی از عملگر تکاملی، ثابت شد مالکیت افراد که همان بنگاه‌های اقتصادی هستند در دوره‌های زمانی متعدد از بین می‌رود. در نهایت برای بررسی بیش‌تر، مثال‌هایی را نیز بیان نمودیم. همان طور که در شکل‌ها دیده شد با اعمال عملگر بر روی توزیع ثروت در دوره‌های زمانی، سطح زیر منحنی به سمت صفر میل کرده است. برای کارهای آتی برای نزدیک شدن به مسایل واقعی می‌توان رقابت چندجانبه استکلبرگ (مدل پیش‌رو و پیرو) را که در آن بنگاه‌های اقتصادی در میزان تولید کالا با هم رقابت می‌کنند در شرایطی که یکی از آن ها پس از دیگری بازی می‌کند مدنظر قرار داد.

منابع

[۶] خوراکیان، ع. ر.، جان نثاراحمدی، ه.، (۱۳۹۳). نقش رهبری معنوی در کاهش مقاومت کارکنان در برابر تغییرات سازمانی با استفاده از رهیافت تئوری بازی‌ها. مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، ۱۱(۴)، ۸۹–۱۰۰.

[۷] کردوندی، ی.، نویدی، ح. ر.، حسن پور عزتی، م.، (۱۳۹۲). یک مدل بازی مشارکت برای تحلیل داده‌های بیان ژنی آزمایش ریزآرایه. مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، ۱۰(۴)، ۸۳–۶۹.

[1] Hofbauer, J., Sigmund, K., (1998). The Theory of Evolution and Dynamic Systems. C. U. P., Cambridge.

[2] Taylor, P. D., Jonker, L., (1978). Evolutionarily stable strategies and game dynamics. Math. Biosci. 40, 145-156.

[3] Fudenberg, D., Levine, D., (1998). Theory of Learning in Games. MIT Press, Cambridge, MA.

[4] Hofbauer, J., Sandholm, W., (2002). On the global convergence of stochastic fictitious play. Econometrica70, 2265–2294.

[5] Hofbauer, J., Sandholm, W., (2007). Evolution in games with randomly disturbed payoffs. J. Econ. Theory132, 47–69.

[8] Chakrabarti, B. K., Chatterjee, A., Chakraborti, A., Sinha, S., (2010). Econophysics: An Introduction, Willey-VCH Verlag GmbH, Germany.

[9] Pomeau, Y., Lopez-Ruiz, R., (2014). Study of a model for the distribution of wealth. arXiv:1407.7447v1 [nlin.AO] 28.

[10] Yakovenko, V. M., (2009). Econophysics, Statistical Mechanics Approach to, in Encyclopedia of Complexity and System Science, Meyers, R.A. (Ed.), Springer, Germany.

[11] Dragulescu, A., Yakovenko, V. M., (2000). Statistical mechanics of money, Eur. Phys. J. B 17 723–729.

[12] Gonzalez-Estevez, J., Cosenza, M. G., Lopez-Ruiz, R., Sanchez, J. R., (2008). Pareto and Boltzmann-Gibbs behaviors in a deterministic multi-agent system, Physica A 387, 4637–4642.

[13] Pellicer-Lostao, C., Lopez-Ruiz, R., (2011). Transition from exponential to power law income distributions in a chaotic market, Int. J. Mod. Phys. C 22 21–33.

[14] Lopez-Ruiz, R., Lopez, J. L., Calbet, X., (2012). Exponential wealth distribution: A new approach from functional iteration theory, ESAIM: Proceedings (of ECIT-2010 Conference) 36 183–190.

[15] Lopez, J. L., Lopez-Ruiz, R., Calbet, X., (2012). Exponential wealth distribution in a random market. A rigorous explanation. J. Math. Anal. Appl. 386 195–204.

[16] Lopez-Ruiz, R., Shivanian, E., Abbasbandy, S., Lopez, J. L., (2013). A Generalized Continuous Model for Random Markets. Mathematica Aeterna 3 317–328.

[17] Shivanian, E., Lopez-Ruiz, R., (2012). A new model for ideal gases. Decay to the Maxwellian distribution. Physica A 391 2600–2607.

[18] Apenko, S. M., (2013). Monotonic entropy growth for a nonlinear model of random exchanges. Phys. Rev. E 87 024101(4).

[19] Gutriel, K., (2014). Convergence to the exponential wealth distribution in a discrete time random market model. Applicable Analysis 93 1256-1263.