مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، سال سیزدهم، شماره سوم (پیاپی ۵۰)، پاییز ۹۵، ص ص ۱۲۰-۱۱۱
شاپا ۷۲۸۶-۲۲۵۱

مدلی غیرشعاعی برای ارزیابی عملکرد واحدهای تصمیم‌گیرنده با داده‌های فازی

عباس برزگری‌نژاد[۱]، فرهاد حسین زاده‌لطفی*[۲]، محسن رستمی‌مال‌خلیفه[۳]

۱- دانشجوی دکتری، دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات تهران، گروه ریاضی، تهران، ایران.

۲- استاد، دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات تهران، گروه ریاضی، تهران، ایران

۳- دانشیار، دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات تهران،گروه ریاضی، تهران، ایران

رسید مقاله: ۲۲ اسفند ۱۳۹۴
پذیرش مقاله: ۲۹ مرداد ۱۳۹۵

چکیده

تحلیل پوششی داده‌ها تکنیکی توانمند در اندازه‌گیری کارایی نسبی گروهی از واحدهای تصمیم‌گیرنده با چند ورودی و چند خروجی می‌باشد. در دنیای پیرامون ما، اغلب داده‌های ورودی‌ها و خروجی‌ها نادقیق یا فازی است. این در حالی است که در مدل‌های تحلیل پوششی داده‌های اولیه باید واحدهای تصمیم‌گیرنده مطلق باشند. از طرفی چون در مدل‌های تحلیل‌پوششی‌داده‌های شعاعی تنها با تغییرات متناسب با ورودی‌ها یا خروجی‌ها سروکار داریم، لذا در ارایه مقادیر کارایی برای ارزیابی عملکرد واحدها وجود مقادیر اسلک‌ها نادیده گرفته می‌شود و این یک نقیصه در این نوع مدل‌ها می‌باشد. از طرفی دیگر مدل‌های غیرشعاعی به عنوان بهترین برآوردگر برای کارایی در مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها محسوب می‌شوند. این مطالب ما را بر آن داشت تا در این مقاله یک مدل غیرشعاعی با داده‌های فازی برای ارزیابی عملکرد واحدهای تصمیم‌گیرنده معرفی کنیم. در پایان یک مثال عددی برای تشریح اهمیت و ویژگی‌های مدل ارایه شده آورده شده است.

کلمات کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها، مدل‌های غیرشعاعی، توابع رتبه‌بندی، اعداد فازی.

۱ مقدمه

مساله ارزیابی عملکرد واحدها از دیرباز مورد توجه مدیران بوده است. امروزه پیشرفت صنایع، پیچیدگی مسایل، حجم بسیار بالای اطلاعات، رقابت شدید جهانی و... محققان را بیش از پیش بر آن داشت که جهت بررسی عملکرد سیستم‌ها روش‌های علمی و دقیق ابداع کنند. در این راستا آن‌ها سعی بر آن داشتند که با برخورد علمی با این عوامل، راهکارهایی مناسب در جهت بهبود کارایی و بهره‌وری بهتر ارایه دهند. یکی از این روش‌های علمی، تحلیل پوششی داده‌ها (Data Envelopment Analysis) می‌باشد که به اختصار آن را DEA می‌نامند. DEA یک تکنیک ریاضی موثر برای ارزیابی کارایی نسبی گروهی از واحدهای تصمیم‌گیرنده متجانس با چند ورودی و چند خروجی می‌باشد که برای اولین بار توسط چارنز و همکاران [۱] معرفی گردید. مقبولیت این تکنیک اغلب به

*عهده‌دار مکاتبات
آدرس الکترونیکی: hosseinzadeh_lotfi@yahoo.com

این دلیل می‌باشد که بدون نیاز به شناخت تابع تولید، قادر به اندازه‌گیری کارایی نسبی واحدهای تصمیم‌گیرنده می‌باشد. مدل‌های DEA به دو دسته اصلی تقسیم می‌شوند: شعاعی و غیرشعاعی. مدل شعاعی برای اولین بار توسط چارنز و همکاران [۱] پیشنهاد گردید که به مدل CCR مشهور می‌باشد. مدل‌های DEA با تشکیل یک مرز کارایی به شناسایی واحدهای تصمیم‌گیرنده(Decision Making Units) کارا می‌پردازند. بدین صورت که هر واحدی که روی مرز کارایی قرار گیرد DMU کارا و در غیر این صورت آن را DMU ناکارا معرفی می‌کنند. در مدل‌های شعاعی می‌توان DMUهای ناکارا را با کاهش ورودی‌ها یا افزایش خروجی‌ها به روی مرز کارایی تصویر نمود. در مدل‌های شعاعی از قبیل CCR، حداکثر کاهش(حداکثر افزایش) ممکن برای ورودی‌ها (خروجی‌ها) برای رسیدن به مرز کارایی، به عنوان کارایی CCR معرفی می‌شود که این مقدار کاهش (افزایش) به ازای تمام ورودی‌ها یکسان در نظر گرفته می‌شود. این در حالی است که در مسایل واقعی پیرامون ما، برخورد ما با تمام ورودی‌ها (خروجی‌ها) یکسان نمی‌باشد. از طرفی دیگر مدل‌های شعاعی بدون در نظر گرفتن مقادیر اسلک‌ها، کارایی واحدها را معرفی می‌کنند، ولی در بعضی از مواقع مقداری از این اسلک‌های غیرشعاعی، باقی می‌مانند که در محاسبات کارایی آن‌ها را نادیده گرفته‌ایم. مدل‌های غیرشعاعی بر خلاف مدل‌های شعاعی بر اساس مقادیر اسلک‌ها ارایه می‌شوند. مدل‌های غیرشعاعی زیادی در سال‌های اخیر ارایه شده که از جمله آن‌ها می‌توان به مدل راسل اصلاح شده اشاره نمود که توسط پاستور و همکاران[۲] معرفی گردید. تن[۳] مدلی براساس مقادیر اسلک پیشنهاد کرد که به طور مستقیم با مقادیر اسلک‌ها سرو کار داشت. لوزانو و ویلا[۴] روشی را پیشنهاد کردند که تنها با حل یک مساله برنامه‌ریزی خطی قادر به تصویر کردنDMUها روی مرز کارا بود. از طرفی چون در دنیای پیرامون ما، اغلب، ورودی‌ها و خروجی‌ها نادقیق یا فازی می‌باشند و یا دانش ما درباره آن‌ها نادقیق می‌باشد، لذا این مطلب محققان را بر آن داشت تا به دنبال راهکارهایی برای اندازه‌گیری کارایی در حالتی که داده‌ها نادقیق‌اند، باشند.

بر اساس نظریه مجموعه فازی و ترکیب آن با تحلیل پوششی داده‌ها، مدل‌های تحلیل پوششی داده‌های فازی ارایه شد. سنگوپتا[۵] تابع هدف و محدودیت‌های مدل DEA اولیه را، فازی در نظر گرفت و با تعریف سطوح تحمل، یک مساله برنامه‌ریزی ریاضی پیشنهاد کرد و نتایج آن را با استفاده از روش‌های زیمرمن[۶] تحلیل کرد.

تیریانتیس وگیرود[۷] با بهره‌گیری از مقادیر تابع عضویت و همچنین تبدیل داده‌های ورودی و خروجی فازی به داده‌های مطلق، یک مساله برنامه‌ریزی ریاضی معرفی کردند. تیریانتیس[۸] روش پیشنهادی تیریانتیس وگیرود[۷] را برای اندازه‌گیری کارایی تکنیکی در مدل DEA فازی غیرشعاعی، گسترش داد. یکی از محبوب‌ترین و پر کاربردترین مدل‌های تحلیل‌پوششی داده‌های فازی روش $\alpha-$برش می‌باشد. کائو و لیو[۹] روشی برای یافتن توابع عضویت کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده در حالی که مشاهدات فازی می‌باشند ارایه کردند. ساعتی و همکاران[۱۰] با بکارگیری مفهوم $\alpha-$برش در تابع هدف و محدودیت‌های مدل تحلیل پوششی داده‌های فازی، یک مساله برنامه‌ریزی پارامتری ارایه کردند. ساعتی و معماریانی[۱۱]، روشی برای تعیین مجموعه مشترک وزن‌ها در مدل اولیه تحلیل پوششی داده‌های فازی، بر اساس مدل پیشنهادی ساعتی و همکاران[۱۰]، پیشنهاد کردند. لیو[۱۲] با استفاده از تحمیل اهمیت نسبی ورودی‌ها و خروجی‌ها، مدلی برای ارزیابی عملکرد

واحدهای تصمیم‌گیرنده با داده‌های فازی ارایه نمود. وانگ و چین[۱۳] بر اساس مقدار مورد انتظار فازی، به ازای تمام واحدها، کارایی خوش‌بینانه و بدبینانه محاسبه نمودند و سپس میانگین هندسی این دو را معیاری برای ارزیابی نهائی عملکرد واحدها و رتبه‌بندی آن‌ها معرفی نمودند. ون وهمکاران[۱۴] بر اساس اندازه اعتبار و به کمک $\alpha-$ برش، یک مدل برنامه‌ریزی‌خطی پارامتری ارایه کردند. وانگ و همکاران[۱۵] بر پایه محاسبات فازی، سه مدل معرفی کردند که کران‌های پایین و بالا و مقدار میانی کارایی فازی همه واحدها را محاسبه می‌کرد. لتووریسیکول و همکاران[۱۶] یک روش امکان، برای حل کردن مدل CCR فازی، در نظر گرفتند که در آن، محدودیت‌ها به عنوان پیشامدهای فازی در نظر گرفته می‌شود. آن‌ها با استفاده از اندازه امکانِ یک پیشامد فازی، مدل DEA فازی را به مساله برنامه‌ریزی امکان، تبدیل کردند. گو و تاناکا[۱۷] یک مساله برنامه‌ریزی دوهدفه، جهت ارزیابی عملکرد واحدهای تصمیم‌گیرنده با داده‌های فازی پیشنهاد کردند. آن‌ها در این مدل پیشنهادی، از یک سطح اطمینان که از قبل توسط تصمیم‌گیرنده تعیین می‌شود، استفاده کردند. یکی از روش‌های متداول و پر کاربرد در حل مسایل برنامه‌ریزی خطی فازی، بر اساس مقایسه اعداد فازی به وسیله توابع رتبه‌بندی می‌باشد. با به کارگیری توابع رتبه‌بندی می‌توان مدل‌های تحلیل پوششی داده‌های فازی را تبدیل به مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها با داده‌های مطلق نمود و سپس با استفاده از روش‌های رایج به ارزیابی عملکرد واحدهای تحت ارزیابی پرداخت. حسین‌زاده‌لطفی و همکاران[۱۸] با استفاده از توابع رتبه‌بندی خطی ارایه شده توسط ملکی[۱۹]، روشی برای اندازه‌گیری کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده با داده‌های فازی اتخاذ کردند. ژو و همکاران[۲۰] برای اندازه‌گیری ریسک سرمایه‌گذاری املاک و مستغلات، یک مدل تحلیل پوششی داده‌های فازی پیشنهاد کردند. آن‌ها از رتبه‌بندی اعداد فازی برای حل مدل‌شان استفاده کردند و یک کنترل کننده نسبتاً موثر طراحی کردند. ظرافت‌انگیزلنگرودی[۲۱] با استفاده از مفهوم فازی و با بهره‌گیری از تحلیل پوششی داده‌ها روشی برای رتبه‌بندی گزینه‌ها در سیستم‌های رای‌گیری ارایه نمود. در این مقاله ما روشی برای ارزیابی عملکرد واحدهای تصمیم‌گیرنده با مشاهدات فازی ارایه می‌کنیم. ایده اصلی ما در این مقاله بر اساس استفاده از مدل‌های غیرشعاعی و تبدیل این مدل DEA غیرشعاعی پیشنهادی، به یک مدل DEA مطلق اولیه به کمک توابع رتبه‌بندی می‌باشد. بخش‌های پیش‌رو بدین صورت ساماندهی می‌شود: در بخش۲، مروری بر مفاهیم اولیه اعداد فازی خواهیم داشت. سپس در بخش۳ به معرفی تابع رتبه‌بندی می‌پردازیم. در بخش۴ مدل غیرشعاعی پیشنهادی معرفی خواهد شد. برای تشریح روش پیشنهادشده، در بخش ۵ یک مثال عددی بیان می‌شود. در نهایت نتایج به‌دست آمده از این مطالعه آورده می‌شود.

۲ تعاریف اولیه

در این بخش قصد داریم به تعریف برخی از مفاهیم اولیه مورد نیاز مجموعه‌های فازی بپردازیم[۲۲].

تعریف ۱: عدد فازی $\tilde{A}=(a^L,a^M,a^U)$ را یک عدد فازی مثلثی گوییم هرگاه تابع عضویت آن $\mu_{\tilde{A}}(x):R\to[0,1]$ به صورت زیر باشد:

$$\mu_{\tilde{A}}(x)=\begin{cases}\dfrac{x-a^L}{a^M-a^L}, & a^L\le x\le a^M,\\ \dfrac{a^U-x}{a^U-a^M}, & a^M\le x\le a^U,\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

که در آن a^L و a^U به ترتیب بیانگر کران‌های پایین و بالا و a^M نیز مقدار میانی عدد فازی $\tilde{A}$ می‌باشند.

تعریف۲: عدد فازی مثلثی $\tilde{A}=(a^L,a^M,a^U)$ را نامنفی گویند اگرو فقط اگر $a^L\ge 0$.

تعریف۳: فرض کنید $\tilde{A}=(a^L,a^M,a^U)$ و $\tilde{B}=\left(b^L,b^M,b^U\right)$ دو عدد فازی باشند. در این صورت عملگرهای جبری آن‌ها را بدین صورت تعریف می‌کنیم:

$$\begin{array}{ll}\text{(i) } \tilde{A}\oplus\tilde{B}=(a^L+b^L,a^M+b^M,a^U+b^U), & a^L\ge 0, b^L\ge 0,\\ \text{(ii) } \tilde{A}-\tilde{B}=(a^L-b^U,a^M-b^M,a^U-b^L), & a^L\ge 0, b^L\ge 0,\\ \text{(iii) } \tilde{A}\otimes\tilde{B}\cong(a^Lb^L,a^Mb^M,a^Ub^U), & a^L\ge 0, b^L\ge 0,\\ \text{(iv) } \tilde{A}/\tilde{B}\cong\left(\dfrac{a^L}{b^U},\dfrac{a^M}{b^M},\dfrac{a^U}{b^L}\right), & a^L\ge 0, b^L\ge 0.\end{array}$$

توجه داشته باشید که جمع جبری و تفریق دو عدد فازی مثلثی یک عدد فازی مثلثی می‌باشد، ولی ضرب و تقسیم آن‌ها لزوماً یک عدد فازی مثلثی نمی‌باشد. به همین دلیل ضرب و تقسیم آن‌ها را تقریباً یک عدد فازی مثلثی فرض کردیم.

۳ توابع رتبه‌بندی

روش‌های مختلفی تاکنون برای حل مسایل برنامه‌ریزی خطی فازی، در مقالات ارایه شده است(به منابع[۲۵-۲۳] رجوع کنید). یکی از پر کاربردترین و ساده‌ترین این روش‌ها، تکنیکی می‌باشد که بر اساس مقایسه اعداد فازی، به وسیله توابع رتبه‌بندی می‌باشد. تابع رتبه‌بندی، تابعی است همانند $R:F(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ که هر عدد فازی را به یک مقدار حقیقی نگاشت می‌کند. به ازای هر دو عدد فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned}&\tilde{A}\succeq\tilde{B}\quad\text{iff } R(\tilde{A})\ge R(\tilde{B}),\\ &\tilde{A}\succ\tilde{B}\quad\text{iff } R(\tilde{A})> R(\tilde{B}),\\ &\tilde{A}\cong\tilde{B}\quad\text{iff } R(\tilde{A})= R(\tilde{B}).\end{aligned}\tag{۱}$$

در اینجا فرض می‌کنیم که R یک تابع رتبه‌بندی خطی دلخواه باشد. در این صورت به ازای هر عدد فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ در $F(\mathbb{R})$ و هر مقدار ثابت $k\in\mathbb{R}$، خواهیم داشت:

$$R(k\tilde{A}+\tilde{B})=kR(\tilde{A})+R(\tilde{B})\tag{۲}$$

در اینجا ما از تابع رتبه‌بندی ارایه شده توسط فورتمپس و روبنز[۲۶] استفاده می‌کنیم. برای یک عدد فازی مثلثی $\tilde{A}=(a^L,a^M,a^U)$ تابع رتبه‌بندی مورد نظر بدین‌صورت تعریف می‌شود:

$$R(\tilde{A})=\frac{1}{2}\int_0^1(\inf\tilde{A}_\alpha+\sup\tilde{A}_\alpha)\,d\alpha\tag{۳}$$

رابطه فوق را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت:

$$R(\tilde{A}) = \frac{۱}{۴}(a^L + ۲a^M + a^U) \qquad (۴)$$

بنابراین به ازای هر دو عدد فازی $\tilde{A} = (a^L, a^M, a^U)$ و $\tilde{B} = (b^L, b^M, b^U)$ خواهیم داشت:

$$\tilde{A} \succeq \tilde{B} \text{ iff } (a^L + ۲a^M + a^U) \geq (b^L + ۲b^M + b^U), \qquad (۵)$$
$$\tilde{A} \succ \tilde{B} \text{ iff } (a^L + ۲a^M + a^U) > (b^L + ۲b^M + b^U),$$
$$\tilde{A} \cong \tilde{B} \text{ iff } (a^L + ۲a^M + a^U) = (b^L + ۲b^M + b^U).$$

با استفاده از تابع رتبه‌بندی تعریف شده فوق، می‌توان به راحتی اعداد فازی را با یکدیگر مقایسه و به این ترتیب نامعادلات فازی را تبدیل به معادلات مطلق نمود.

٤ متدولوژی پیشنهادی

مجموعه‌ای شامل n واحد تصمیم‌گیرنده را در نظر بگیرید که هر $DMU_j\ (j = ۱,\ldots,n)$ با به‌کارگیری m ورودی متمایز $x_{ij}\ (i = ۱,\ldots,m)$، سعی در تولید s خروجی متمایز $y_{rj}\ (r = ۱,\ldots,s)$ دارد. بدون از دست دادن کلیت استدلال، فرض کنید تمام داده ورودی و خروجی x_{ij} و y_{rj} فازی باشند که آن‌ها را با اعداد فازی مثلثی $\tilde{x}_{ij} = (x_{ij}^L, x_{ij}^M, x_{ij}^U)$ و $\tilde{y}_{rj} = (y_{rj}^L, y_{rj}^M, y_{rj}^U)$ نمایش می‌دهیم که در آن $x_{ij}^L > ۰$ و $y_{rj}^L > ۰$ می‌باشند. فرض کنید می‌خواهیم کارایی DMU_p را بهبود دهیم. این عمل را با کاهش تک تک شاخص‌های ورودی و نیز افزایش یکایک شاخص‌های خروجی انجام می‌دهیم. به عبارتی می‌خواهیم:

$$\begin{cases} \tilde{\theta}_i \tilde{x}_{ip} \preceq \tilde{x}_{ip}, & i = ۱,\ldots,m, \\ \tilde{\varphi}_r \tilde{y}_{rp} \succeq \tilde{y}_{rp}, & r = ۱,\ldots,s. \end{cases} \qquad (۶)$$

که در آن $\tilde{\theta}_i = (\theta_i^L, \theta_i^M, \theta_i^U)$ و $\tilde{\varphi}_r = (\varphi_r^L, \varphi_r^M, \varphi_r^U)$ و نیز $\begin{pmatrix} \tilde{\theta}_i \tilde{x}_{ip} \\ \tilde{\varphi}_r \tilde{y}_{rp} \end{pmatrix}$ متعلق به مجموعه امکان تولید

$$T_c^* = \left\{ (\tilde{x}, \tilde{y}) \middle| \tilde{x} \succeq \sum_{j=۱}^{n} \tilde{\lambda}_j \tilde{x}_j,\ \tilde{y} \preceq \sum_{j=۱}^{n} \tilde{\lambda}_j \tilde{y}_j,\ \tilde{\lambda}_j \geq ۰ \right\}$$

می‌باشد. با توجه به تعریف۳، می‌توان نامعادلات فازی (۶) را به صورت ذیل بازنویسی نمود:

$$\begin{aligned} &(\theta_i^L x_{ip}^L, \theta_i^M x_{ip}^M, \theta_i^U x_{ip}^U) \preceq (x_{ip}^L, x_{ip}^M, x_{ip}^U), \quad i = ۱,\ldots,m, \\ &(\varphi_r^L y_{rp}^L, \varphi_r^M y_{rp}^M, \varphi_r^U y_{rp}^U) \succeq (y_{rp}^L, y_{rp}^M, y_{rp}^U), \quad r = ۱,\ldots,s. \end{aligned} \qquad (۷)$$

با به کارگیری تابع رتبه‌بندی ارایه شده در بخش۳، به سادگی می‌توان نامعادلات فازی فوق را تبدیل به نامعادلات مطلق ذیل نمود:

$$\begin{aligned}&\theta_i^L x_{ip}^L + ۲\theta_i^M x_{ip}^M + \theta_i^U x_{ip}^U \le x_{ip}^L + ۲x_{ip}^M + x_{ip}^U, \quad i = ۱,\dots,m,\\&\varphi_r^L y_{rp}^L + ۲\varphi_r^M y_{rp}^M + \varphi_r^U y_{rp}^U \ge y_{rp}^L + ۲y_{rp}^M + y_{rp}^U, \quad r = ۱,\dots,s.\end{aligned} \tag{۸}$$

از طرفی تحت شرایط ذیل، روابط (۸) همواره برقرار می‌باشند:

$$\begin{aligned}&\theta_i^L \le ۱,\ \theta_i^M \le ۱,\ \theta_i^U \le ۱, \quad i = ۱,\dots,m,\\&\varphi_r^L \ge ۱,\ \varphi_r^M \ge ۱,\ \varphi_r^U \ge ۱, \quad r = ۱,\dots,s.\end{aligned} \tag{۹}$$

حال برای بررسی عملکرد واحدهای تصمیم‌گیرنده، با عنایت به مطالب گفته شده و با در نظر گرفتن تابع رتبه‌بندی R، مدل ذیل را پیشنهاد می‌کنیم:

$$\begin{aligned}&\min\ \{\theta_۱^L,\dots,\theta_m^L,\theta_۱^M,\dots,\theta_m^M,\theta_۱^U,\dots,\theta_m^U\}\\&\max\{\varphi_۱^L,\dots,\varphi_s^L,\varphi_۱^M,\dots,\varphi_s^M,\varphi_۱^U,\dots,\varphi_s^U\}\\&s.t.\\&\quad\begin{pmatrix}(\theta_i^L x_{ip}^L,\theta_i^M x_{ip}^M,\theta_i^U x_{ip}^U)\\(\varphi_r^L y_{rp}^L,\varphi_r^M y_{rp}^M,\varphi_r^U y_{rp}^U)\end{pmatrix}\in T_c^*\\&\quad\theta_i^L \le ۱,\ \theta_i^M \le ۱,\ \theta_i^U \le ۱, \quad i = ۱,\dots,m,\\&\quad\varphi_r^L \ge ۱,\ \varphi_r^M \ge ۱,\ \varphi_r^U \ge ۱, \quad r = ۱,\dots,s.\end{aligned} \tag{۱۰}$$

همان طور که ملاحظه می‌کنید، مدل پیشنهادی(۱۰)، یک مدل کاملاً فازی می‌باشد. با توجه به تعریف T_c^*، مدل (۱۰)تبدیل به مدل ذیل می‌گردد:

$$\begin{aligned}&min\ \{\theta_۱^L,\dots,\theta_m^L,\theta_۱^M,\dots,\theta_m^M,\theta_۱^U,\dots,\theta_m^U\}\\&max\ \{\varphi_۱^L,\dots,\varphi_s^L,\varphi_۱^M,\dots,\varphi_s^M,\varphi_۱^U,\dots,\varphi_s^U\}\\&s.t.\\&\quad\sum_{j=۱}^{n}(\lambda_j^L x_{ij}^L,\lambda_j^M x_{ij}^M,\lambda_j^U x_{ij}^U)\preceq(\theta_i^L x_{ip}^L,\theta_i^M x_{ip}^M,\theta_i^U x_{ip}^U), \quad i = ۱,\dots,m,\\&\quad\sum_{j=۱}^{n}(\lambda_j^L y_{rj}^L,\lambda_j^M y_{rj}^M,\lambda_j^U y_{rj}^U)\succeq(\varphi_r^L y_{rp}^L,\varphi_r^M y_{rp}^M,\varphi_r^U y_{rp}^U), \quad r = ۱,\dots,s,\\&\quad\theta_i^L \le ۱,\ \theta_i^M \le ۱,\ \theta_i^U \le ۱, \quad i = ۱,\dots,m,\\&\quad\varphi_r^L \ge ۱,\ \varphi_r^M \ge ۱,\ \varphi_r^U \ge ۱, \quad r = ۱,\dots,s,\\&\quad\lambda_j^M - \lambda_j^L \ge ۰,\ \lambda_j^U - \lambda_j^M \ge ۰,\ \lambda_j^L \ge ۰, \quad j = ۱,\dots,n.\end{aligned} \tag{۱۱}$$

با به کارگیری تابع رتبه‌بندیR، مساله برنامه‌ریزی چند هدفه(۱۱) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی نمود:

$$\min \quad \tau = \frac{\frac{1}{4m}(\sum_{i=1}^{m}\theta_i^L + 2\theta_i^M + \theta_i^U)}{\frac{1}{4s}(\sum_{r=1}^{s}\varphi_r^L + 2\varphi_r^M + \varphi_r^U)}$$

$$\begin{aligned}
& s.t. \\
& \sum_{j=1}^{n}(\lambda_j^L x_{ij}^L + 2\lambda_j^M x_{ij}^M + \lambda_j^U x_{ij}^U) \le (\theta_i^L x_{ip}^L + 2\theta_i^M x_{ip}^M + \theta_i^U x_{ip}^U), \quad i = 1,\dots,m, \\
& \sum_{j=1}^{n}(\lambda_j^L y_{rj}^L + 2\lambda_j^M y_{rj}^M + \lambda_j^U y_{rj}^U) \ge (\varphi_r^L y_{rp}^L + 2\varphi_r^M y_{rp}^M + \varphi_r^U y_{rp}^U), \quad r = 1,\dots,s, \\
& \theta_i^L \le 1,\ \theta_i^M \le 1,\ \theta_i^U \le 1, \qquad i = 1,\dots,m, \\
& \varphi_r^L \ge 1,\ \varphi_r^M \ge 1,\ \varphi_r^U \ge 1, \qquad r = 1,\dots,s, \\
& \lambda_j^M - \lambda_j^L \ge 0, \lambda_j^U - \lambda_j^M \ge 0, \lambda_j^L \ge 0, \quad j = 1,\dots,n.
\end{aligned} \tag{12}$$

با استفاده از تبدیلات چارنز و کوپر[1] مدل (۱۲) تبدیل به مدل خطی زیر می‌شود:

$$\tau^* = min \quad \tau = \frac{1}{4m}(\sum_{i=1}^{m}\Theta_i^L + 2\Theta_i^M + \Theta_i^U) \tag{13}$$

$$s.t.$$

$$\frac{1}{4s}(\sum_{r=1}^{s}\Phi_r^L + 2\Phi_r^M + \Phi_r^U) = 1 \tag{13a}$$

$$\sum_{j=1}^{n}(\mu_j^L x_{ij}^L + 2\mu_j^M x_{ij}^M + \mu_j^U x_{ij}^U) \le (\Theta_i^L x_{ip}^L + 2\Theta_i^M x_{ip}^M + \Theta_i^U x_{ip}^U), \quad i = 1,\dots,m, \tag{13b}$$

$$\sum_{j=1}^{n}(\mu_j^L y_{rj}^L + 2\mu_j^M y_{rj}^M + \mu_j^U y_{rj}^U) \ge (\Phi_r^L y_{rp}^L + 2\Phi_r^M y_{rp}^M + \Phi_r^U y_{rp}^U), \quad r = 1,\dots,s, \tag{13c}$$

$$0 \le \Theta_i^L \le \Theta_i^M \le \Theta_i^U \le t, \qquad i = 1,\dots,m, \tag{13d}$$

$$\Phi_r^L \ge \Phi_r^M \ge \Phi_r^U \ge t, \qquad r = 1,\dots,s, \tag{13e}$$

$$\varepsilon \le t \le 1, \tag{13f}$$

$$\mu_j^M - \mu_j^L \ge 0, \mu_j^U - \mu_j^M \ge 0, \mu_j^L \ge 0, \qquad j = 1,\dots,n. \tag{13g}$$

قضیه ۱: مدل (۱۳) همواره شدنی می‌باشد و $0 < \tau^* \le 1$.

برهان: با فرض

$$\begin{aligned}
& \bar{\Theta}_i^L = \bar{\Theta}_i^M = \bar{\Theta}_i^U = 1, \qquad i = 1,\dots,m, \\
& \bar{\Phi}_r^L = \bar{\Phi}_r^M = \bar{\Phi}_r^U = 1, \qquad r = 1,\dots,s, \\
& \bar{\mu}_p^L = \bar{\mu}_p^M = \bar{\mu}_p^U = 1, \\
& \bar{\mu}_j^L = \bar{\mu}_j^M = \bar{\mu}_j^U = 0, \qquad j = 1,\dots,n,\ j \ne p, \\
& \bar{t} = 1,
\end{aligned} \tag{14}$$

به وضوح $(\overline{\mu}^L, \overline{\mu}^M, \overline{\mu}^U, \overline{t}, \overline{\Theta}^L, \overline{\Theta}^M, \overline{\Theta}^U, \overline{\Phi}^L, \overline{\Phi}^M, \overline{\Phi}^U)$ یک جواب شدنی مدل (۱۳) می‌باشد. مقدار تابع هدف این جواب ۱می‌باشد. با توجه به اینکه مساله از نوع مینیمم‌سازی است، لذا مقدار بهینه تابع هدف، کوچک‌تر یا مساوی یک می‌باشد. حال فرض کنید که $(\mu^{*L}, \mu^{*M}, \mu^{*U}, t^*, \Theta^{*L}, \Theta^{*M}, \Theta^{*U}, \Phi^{*L}, \Phi^{*M}, \Phi^{*U})$ جواب بهینه مساله(۱۳) باشد. با توجه به تابع هدف داریم:

$$\tau^* = \frac{1}{4m}\left(\sum_{i=1}^{m} \Theta_i^{*L} + 2\Theta_i^{*M} + \Theta_i^{*U}\right)$$

با توجه به قیود $(13d)$ در مدل (۱۳) بدیهی است $\tau^* \geq 0$. حال کافیست نشان دهیم که $\tau^* \neq 0$. فرض کنید چنین نباشد. در این صورت

$$\Theta_i^{*L} = 0,\ \Theta_i^{*M} = 0,\ \Theta_i^{*U} = 0, \qquad i = 1,\ldots,m,$$

با توجه به محدودیت‌های $(13b)$در مدل(۱۳) داریم:

$$\sum_{j=1}^{n}(\mu_j^{*L}x_{ij}^L + 2\mu_j^{*M}x_{ij}^M + \mu_j^{*U}x_{ij}^U) \leq (\Theta_i^{*L}x_{ip}^L + 2\Theta_i^{*M}x_{ip}^M + \Theta_i^{*U}x_{ip}^U) = 0,\ \ i = 1,\ldots,m,$$

از طرف دیگر چون $x_{ij}^L > 0$، بنابراین:

$$\mu_j^{*L} = \mu_j^{*M} = \mu_j^{*U} = 0, \qquad j = 1,\ldots,n.$$

با توجه به محدودیت‌های خروجی مدل(۱۳) خواهیم داشت:

$$\Phi_r^{*L} y_{rp}^L + 2\Phi_r^{*M} y_{rp}^M + \Phi_r^{*U} y_{rp}^U \leq 0,\ \ r = 1,\ldots,s.$$

بنا به فرض اولیه $y_{rp}^L > 0$. از این رو از نامعادله فوق می‌توان نتیجه گرفت که

$$\Phi_r^{*L} = \Phi_r^{*M} = \Phi_r^{*U} = 0,\ \ r = 1,\ldots,s,$$

که این مطلب با قیود$(13e)$و $(13f)$ مدل(۱۳) در تناقض است. پس فرض خلف باطل و لذا برهان کامل می‌باشد.

۵ مثال عددی

در این بخش قصد داریم برای تشریح مدل پیشنهادی در این مطالعه، یک مثال عددی ارایه کنیم. فرض کنید می خواهیم عملکرد ۸ شرکت تولیدی[1] را ارزیابی کنیم که همگی دارای تولیدات یکسان ولی با کیفیت‌های مختلف می‌باشند. هر یک از این شرکت‌های تولیدی را به عنوان یک DMU در نظر می‌گیریم. همان‌طور که از جدول۱نیز بر می‌آید، اینDMUها، دارای دو ورودی و دو خروجی می‌باشند. این مثال برگرفته شده از [۱۵] می‌باشد. نتایج حاصل از به‌کارگیری مدل پیشنهادی در جدول۲ آورده شده است. همان‌طور که ملاحظه می‌کنید DMU_E دارای بهترین عملکرد در بین تمامDMUها می‌باشد و همچنین DMU_F بدترین عملکرد را به خود اختصاص داده است.

[1] *Manufacturing Enterprises*

جدول ۱. ورودی‌ها و خروجی‌های ۸ شرکت تولیدی [۱۵]

DMUs	ورودی‌ها		خروجی‌ها	
	$I_۱$	$I_۲$	$O_۱$	$O_۲$
A	(۲۱۲۰،۲۱۷۰،۲۲۱۰)	۱۸۷۰	(۱۴۵۰۰،۱۴۷۹۰،۱۴۸۶۰)	(۳/۱،۴/۱،۴/۹)
B	(۱۴۲۰،۱۴۶۰،۱۵۰۰)	۱۳۴۰	(۱۲۴۷۰،۱۲۷۲۰،۱۲۷۹۰)	(۱/۲،۲/۳،۱/۰)
C	(۲۵۱۰،۲۵۷۰،۲۶۱۰)	۲۳۶۰	(۱۷۹۰۰،۱۸۲۶۰،۱۸۴۰۰)	(۳/۴،۳/۵،۳/۰)
D	(۲۳۰۰،۲۳۵۰،۲۴۰۰)	۲۰۲۰	(۱۴۹۷۰،۱۵۲۷۰،۱۵۴۰۰)	(۲/۳،۷/۴،۷/۶)
E	(۱۴۸۰،۱۵۲۰،۱۵۶۰)	۱۵۵۰	(۱۳۹۸۰،۱۴۲۶۰،۱۴۳۳۰)	(۱/۱،۰/۲،۸/۷)
F	(۱۹۹۰،۲۰۳۰،۲۱۰۰)	۱۷۶۰	(۱۴۰۳۰،۱۴۳۱۰،۱۴۴۰۰)	(۱/۲،۶/۳،۶/۶)
G	(۲۲۰۰،۲۲۶۰،۲۳۰۰)	۱۹۸۰	(۱۶۵۴۰،۱۶۸۷۰،۱۷۰۰۰)	(۲/۳،۴/۴،۴/۴)
H	(۲۴۰۰،۲۴۶۰،۲۵۲۰)	۲۲۵۰	(۱۷۶۰۰،۱۷۹۶۰،۱۸۱۰۰)	(۲/۳،۶/۴،۶/۶)

جدول ۲. نتایج

DMUs	τ^*
A	۰/۸۶۹۹
B	۰/۷۶۷۰
C	۰/۷۹۵۰
D	۰/۷۵۸۹
E	۱/۰۰۰۰
F	۰/۶۲۹۹
G	۰/۷۶۸۶
H	۰/۷۳۲۵

۶ نتیجه‌گیری

از آنجا که غالباً در مسایل روزمره ما در دنیای واقعی، اکثر داده‌های ورودی و خروجی نادقیق می‌باشند، لذا این واقعیت ما را بر آن داشت تا یک مدل تحلیل پوششی داده‌های فازی توسعه دهیم. در این مقاله با استفاده از مفهوم مقایسه اعداد فازی به وسیله توابع رتبه‌بندی، یک روش تحلیل پوششی داده‌های فازی پیشنهاد گردید. از آنجایی که مدل‌های DEA فازی که تاکنون ارایه گردیده است غالباً با استفاده از مدل‌های شعاعی اقدام به اندازه‌گیری کارایی DMUها می‌کنند، لذا وجود مقادیر اسلک‌ها را نادیده می‌گیرند که این مطلب به عنوان یک نقص در ارزیابی عملکرد محسوب می شود. به همین دلیل ما در این مقاله سعی داشتیم تا یک مدل غیرشعاعی فازی برای اندازه‌گیری کارایی DMUها به‌کار گیریم. از جمله مزایای این مدل نسبت به سایر مدل‌های ارایه شده مشابه تاکنون، آن است که بر خلاف سایرمدل‌های DEA فازی، دارای پیچیدگی محاسباتی بالایی نمی‌باشد.

منابع

[۲۱] ظرافت انگیز لنگرودی، م.، (۱۳۹۰). روشی برای رتبه‌بندی گزینه ها به کمک مفهوم فازی و تحلیل پوششی داده‌ها. مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، ۸(۴)، ۴۹–۵۷.

[1] Charnes, A., Cooper, W. W., Rhodes, E., (1978). Measuring the efficiency of decision making units European Journal of Operational Research, 2, 429-444.

[2] Pastor, J. T., Ruiz, J. L., Sirvent, I., (1999). An enhanced DEA Russell graph efficiency measure, European Journal of Operational Research, 115, 569-607.

[3] Tone, K., (2001). A slacks-based measure of efficiency in data envelopment analysis, European Journal of Operational Research, 130, 498-509.

[4] Lozano, S., Villa, G., (2004). Centralized resource allocation using data envelopment analysis, Journal of Productivity Analysis, 22, 143-161.

[5] Sengupta, J. K., (1992). A fuzzy systems approach in data envelopment analysis, Computers and Mathematics with Applications, 24, 259-266.

[6] Zimmermann, H. J., (1976). Description and optimization of fuzzy system, International Journal of general System, 2, 209-216.

[7] Triantis, K., Girod, O., (1998). A mathematical programming approach for measuring technical efficiency in a fuzzy environment. Journal of Productivity Analysis, 10, 85-102.

[8] Triantis, K., (2003). Fuzzy non-radial data envelopment analysis (DEA) measures of technical efficiency in support of an integrated performance measurement system. International Journal of Automotive Technology and Management, 33, 28-53.

[9] Kao, C., Liu, S. T., (2000). Fuzzy efficiency measures in data envelopment analysis, Fuzzy Sets and Systems, 119, 149-160.

[10] Saati Mohtadi, S., Memariani, A., Jahanshahloo, G. R., (2002). Efficiency analysis and ranking of DMUs with fuzzy data. Fuzzy Optimization and Decision Making, 1, 255-267.

[11] Saati, S., Memariani, A., (2005). Reducing weight flexibility in fuzzy DEA. Applied Mathematics and Computation, 161, 611-622.

[12] Liu, S. T., (2008). A fuzzy DEA/AR approach to the selection of flexible manufacturing system. Computer and Industrial Engineering, 54, 66-76.

[13 Wang, Y.M., Chin, K.S., (2011). Fuzzy data envelopment analysis: A fuzzy expected value approach. Expert Systems with Applications, 37, 11678-11685.

[14] Wen, M., You, C., Kang, R., (2010). A new ranking method to fuzzy data envelopment analysis Computers & Mathematics with Applications, 59, 3398-3404.

[15] Wang, Y. M., Luo, Y., Liang, L., (2009). Fuzzy data envelopment analysis based upon fuzzy arithmetic with an application to performance assessment of manufacturing enterprises, Expert Systems with Applications, 36, 5205-5211.

[16] Lertworasirikul, S., Fang, S. C., Joines, J. A., Nuttle, H. L. W., (2003). Fuzzy data envelopment analysis (DEA): a possibility approach, Fuzzy Sets and Systems, 139, 379-394.

[17] Guo, P., Tanaka, H., (2001). Fuzzy DEA: a perceptual evaluation method, Fuzzy Sets and Systems, 119, 149-160.

[18] Hosseinzadeh Lotfi, F., Jahanshahloo, G. R., Alimardani, M., (2007). A New Approach for Efficiency Measures by Fuzzy Linear Programming and Application in Insurance Organization, Applied Mathematical Sciences, 14, 647-663.

[19] Maleki, H. R., (2002). Ranking functions and their applications to fuzzy linear programming, Far East Journal of Mathematical Sciences, 4, 283-301.

[20] Zhou, S. J., Zhang, Z. D., Li, Y. C., (2008). Research of Real Estate Investment Risk Evaluation Based on Fuzzy Data Envelopment Analysis Method. Proceeding of the International Conference on Risk Management and Engineering Management, 444-448.

[22] Kaufmann, A., Gupta, M. M., (1985). Introduction to Fuzzy Arithmetic Theory and Applications, Van Nostrand Reinhold, New York.

[23] Tanaka, H., Ichihashi, H., (1984). A formulation of fuzzy linear programming problem based on comparison of fuzzy numbers, Control Cyber, 13, 185-194.

[24] Fang, S. C., Hu, C. F., (1999). Linear programming with fuzzy coefficients in constraints, Comput. Math. Appl, 37, 63-76.

[25] Lai, Y. J., Hwang, C. L., (1992) Fuzzy Mathematical Programming Methods and Applications, Springer, Berlin.

[26] Fortemps, P., Roubens, M., (1996). Ranking and defuzzification methods based on area compensation, Fuzzy Sets and Systems, 82,319-330.