مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، سال سیزدهم، شماره چهارم (پیاپی ۵۱)، زمستان ۹۵، ص ص ۵۴-۳۹
شاپا ۷۲۸۶-۲۲۵۱

رویکرد فازی در بهینه‌سازی سبد سهام بورس اوراق بهادار با محدودیت‌های منعطف

حسین خنجرپناه [۱]، میرسامان پیشوایی* [۲]، آرمین جبارزاده [۲]
۱- دانشجوی دکتری، دانشگاه علم و صنعت ایران، دانشکده مهندسی صنایع، تهران، ایران
۲- استادیار، دانشگاه علم و صنعت ایران، دانشکده مهندسی صنایع، تهران، ایران

رسید مقاله: ۲۷ اردیبهشت ۱۳۹۵
پذیرش مقاله: ۲۲ مهر ۱۳۹۵

چکیده
مساله انتخاب سبد سهام همواره یکی از موضوعات جذاب وکاربردی در مسایل مالی و بازارهای مالی بوده است. انتخاب یک سبد بهینه برای رسیدن به حداکثر سود در حالی که ریسک آن نیز پایین باشد، همواره مورد توجه سرمایه‌گذاران بازارهای مالی بوده است. در این مقاله ابتدا یک مدل جدید منطقی و کاربردی برای بهینه‌سازی سبد سهام ارایه می‌شود که این مدل دارای محدودیت‌های انعطاف در وزن سهام است که حد مشخص و ثابتی را برای وزن سهام در سبد تعیین نمی‌کند و همچنین تعداد سهام در یک سبد دارای محدودیت است. سپس رویکرد فازی برای برخورد با عدم قطعیت بازده سهام، به کار گرفته می‌شود و مدل ارایه شده با هر دو برنامه‌ریزی منعطف و امکانی که از روش‌های زیرمجموعه برنامه‌ریزی فازی هستند، به یک مساله ساده تبدیل می‌شود. مدل ارایه شده برای ارزیابی، تست کارایی و منطقی بودن آن بر روی نمونه‌ای از بازده یک ماهه شرکت‌های پذیرفته شده در بورس اوراق بهادار تهران اجرا شد و نتایج حاصل از آن ارایه گردید. نتایج حاصله نشان داد که در سطح اطمینان پایین‌تر می‌توان با ریسک کم‌تر، سود بالاتری را از سبد سهام انتخاب شده به دست آورد.

کلمات کلیدی: بهینه‌سازی سبد سهام، برنامه‌ریزی ریاضی فازی، بورس اوراق بهادار تهران، برنامه‌ریزی آرمانی.

۱ مقدمه
مسایل مالی، مانند مساله انتخاب سبد سهام از جمله مسایل جذاب در زمینه برنامه‌ریزی در عدم قطعیت هستند. در سال‌های اخیر شاهد افزایش مطالعات در حوزه مالی بوده‌ایم که در انتخاب سبد سهام و مدیریت آن نیز تحقیقات گسترده‌ای انجام شده است و روش‌های مختلفی برای انتخاب سهام ارایه گردیده است. مطالعه سبد سهام از آن جهت دارای اهمیت است که با سودآوری ارتباط دارد و ارایه یک مدل بهتر برای انتخاب سبد، می‌تواند منجر به سود بالاتر شود. اولین مدل برای مساله سبد سهام توسط مارکویتز [۱] ارایه شد. او بیان کرد که یک سرمایه‌گذار

* عهده‌دار مکاتبات
آدرس الکترونیکی: pishvaee@iust.ac.ir

منطقی فقط بر روی ماکزیمم کردن بازده سبد سهام دقت نمی‌کند؛ بلکه علاوه بر بازده به ریسک آن نیز توجه دارد. در مدل مارکویتز، ریسک به وسیله واریانس بازده تاریخی اندازه‌گیری می‌شود؛ بنابراین با توجه به موارد ذکرشده، دو هدف برای سرمایه‌گذاران از تشکیل سبد سهام شکل می‌گیرد که این مساله سبد سهام را به یک مساله چندهدفه تبدیل می‌کند.

آن چیزی که شرایط را در حل مسایل دشوار می‌کند وجود عدم قطعیت در مسایل است. عدم قطعیت را می‌توان عدم اطلاع کامل درباره رخدادهای آینده توصیف کرد که می‌توان با جمع‌آوری اطلاعات آن را کم کرد؛ اما نمی‌توان آن را حذف نمود. وقوع بحران اقتصادی در سال ۲۰۰۸ باعث شد تا عدم قطعیت در مسایل مالی اهمیت خاصی پیدا کند و مطالعات فراوانی در زمینه مقابله با عدم قطعیت در این مسایل انجام گرفت. مساله انتخاب سبد سهام نیز از جمله مسایلی است که در شرایط عدم قطعیت بررسی می‌گردد، چون سرمایه‌گذار نمی‌تواند میزان دقیق بازدهی یک سهام را پیش‌بینی کند. وجود هر نوع عدم قطعیت در مدل‌سازی بازارهای مالی و عوامل موثر برآن موجب بروز مقداری ریسک در فرآیند تصمیم‌گیری می‌شود. ریسک‌های مختلفی در عملکردهای مالی بسیار متنوع بوده که از جمله این ریسک‌ها می‌توان به ریسک بازار، ریسک عملیاتی، ریسک سیاسی، ریسک نقدینگی و ریسک مدل اشاره کرد. رویکردهای برخورد با عدم قطعیت در ادبیات محدود بوده و می‌توان از آن میان به برنامه‌ریزی فازی و استوار در این زمینه اشاره کرد.

وجود اطلاعات فراوان و عوامل تاثیرگذار دیگر، تصمیم‌گیری فردی جهت انتخاب سبد سهام مناسب را سخت می‌کند، تا آن‌جا که اغلب افراد معیار خود جهت تصمیم‌گیری در مورد انتخاب سهام را، به میزان حجم صف‌های خرید و فروش، اخبار و شایعات شنیده شده در بازار و مسایلی از این دست تقلیل داده‌اند. این حجم انبوه از اطلاعات و استفاده از آن در بهبود تصمیم‌گیری از موضوعات سخت است. تنوع روش‌های سرمایه‌گذاری و پیچیدگی تصمیم‌های مزبور در چند دهه اخیر افزایش چشم‌گیری داشته است. این رشد گسترده، نیاز فزاینده‌ای به مدل‌های فراگیر و یکپارچه ایجاد نموده است [۲]. در این‌جا یک مدل منطقی جدید ارایه می‌گردد که در آن محدودیت‌های کاربردی که سرمایه‌گذاران همواره آن‌ها را در نظر می‌گیرند به مدل افزوده شده است که از جمله آن می‌توان به محدودیت‌های انعطاف در وزن سهام و تعداد سهام در سبد اشاره کرد.

در این مقاله، ابتدا در بخش ۲، مبانی نظری پژوهش عنوان می‌شود و همچنین تحقیقات گذشته در این زمینه نیز در این بخش مرور می‌شود. در بخش ۳، روش شناسی پژوهش ارایه شده است که ابتدا مقدماتی در مورد روش فازی و سپس به انواع برنامه‌ریزی ریاضی فازی اشاره شده است. نتایج تحقیق در بخش ۴ ارایه شده است و نهایتا در بخش ۵، نتیجه‌گیری و تحقیقات آینده بیان شده است.

۲ مبانی نظری و پیشینه تحقیق

یک سبد سهام مجموعه‌ای از دارایی‌های مالی هستند. سبدهای سهام توسط افراد و سازمان‌های مختلفی نظیر بانک و صندوق‌های سرمایه‌گذاری تشکیل و مدیریت می‌شود. بعد از آن که مارکویتز مدل اولیه سبد سهام را ارایه

کرد، واریانس به عنوان عامل غیرمطلوب و بازده به عنوان عامل مطلوب شناخته شد. عوامل دیگری نیز در انتخاب سهام تاثیر دارند که از جمله آن‌ها می‌توان به زمان و اهداف سرمایه‌گذاری اشاره کرد.

اگر بخواهیم نحوه کار مدل مارکویتز را به صورت ریاضی بیان کنیم، با فرض اینکه $r(i), i=1,\ldots,k$ بازده سهام، $\sigma(i,j), i,j=1,\ldots,k$ کواریانس بین دو سهم و $x(i), i=1,\ldots,k$ وزن سهم در سبد باشد، مدل سبد سهام به گونه‌ای $x(1),\ \ldots, x(n)$ را انتخاب می‌کند که

$$\sum_{i=1}^{k} x(i) = 1 \quad , 0 \le x(j) \le 1 ,$$

و بازده سبد ماکزیمم گردد:

$$r_v = \sum_{i=1}^{k} r(i) x(i),$$

و همچنین ریسک سبد مینیمم شود:

$$\sigma_v = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} x(j) x(i) \sigma(i,j).$$

هدف اصلی این مدل، بیشینه کردن بازده برای سطح مشخصی از ریسک و یا کمینه کردن ریسک به ازای سطح خاصی از بازده می‌باشد. به طور کلی بهینه‌سازی یک سبد سهام باید این موارد را برای ما مشخص کند: چه سهم‌هایی باید داخل سبد باشند، وزن سهم‌های داخل سبد چقدر است و بازده و ریسک حاصل از سرمایه‌گذاری چگونه است.

از طرفی، بر اساس نظریه نوین سبد سهام، ریسک را می‌توان به دو بخش تقسیم کرد: ۱. ریسک سیستماتیک که به کل بازار مربوط است و ۲. ریسک غیرسیستماتیک که به شرایط خاص هرسهم بستگی دارد [۳]. بنابراین، در تشکیل سبد سهام مشخص است که سرمایه‌گذاری روی سهم‌های مختلف به صورتی که کواریانس بازده آن‌ها کم باشد، می‌تواند به کاهش ریسک سیستماتیک سبد سهام کمک کند. همچنین مشهود است که با تنوع [1] و افزایش تعداد سهام می‌توان ریسک غیرسیستماتیک سبد سهام را کاهش داد [۴].

مدل مارکویتز، هسته اصلی تحقیقات بسیاری در این حوزه قرار گرفته است. از لحاظ ریاضیاتی، مدل مارکویتز یک مدل ساده به شمار می‌آید؛ اما برتری و مزیت اصلی آن قابلیت اضافه کردن محدودیت‌ها برای بررسی شرایط واقعی بازار است [۵]. در این مقاله نیز، محدودیت‌های واقعی به این مدل بهینه‌سازی اضافه می‌شوند. یکی از محدودیت‌هایی که سرمایه‌گذاران به آن توجه دارند، تعداد سهام موجود در سبد است و ترجیح می‌دهند که تعداد محدودی سهم در سبد داشته باشند [۵]. مساله سبدسهام بدون محدودیت بر روی تعداد سهام امکان دارد که تمام سرمایه را روی یک سهم قرار دهد که در این صورت ریسک غیرسیستماتیک سبد سهام بسیار بالا می‌رود و همچنین از طرفی دیگر، امکان دارد که تنوع و تعداد بسیار زیادی از سهم‌های بازار را در سبد سهام قرار دهد که این حالت نیز برای ما مساعد نیست؛ زیرا افزایش بیش از حد تعداد سهام باعث کاهش تمرکز

[1] Diversification

سرمایه‌گذار بر روی سبد خود می‌شود. لذا به دلایلی که گفته شد، خبرگان و مدیران سرمایه‌گذاری همواره تاکید دارند که تعداد مشخصی (معمولا ۳ یا ۴) از سهام در سبد سرمایه‌گذاران حقیقی وجود داشته باشد.

با توجه به افزایش محدودیت تعداد سهم در سبد سهام مورد بررسی، وزن سهم‌های موجود در سبد نیز برای ما دارای اهمیت است. بدین صورت باید حدودی برای حداقل و حداکثر وزن سهام در سبد تعیین گردد؛ زیرا در صورت عدم تعیین این حدود امکان دارد حجم بسیار بالایی از سبد به یک سهم تعلق بگیرد که در این شرایط نیز ریسک غیرسیستماتیک افزایش می‌یابد؛ بنابراین مدیران سرمایه‌گذاری همواره تاکید دارند که حدهایی را برای وزن هر سهم موجود در سبد تعیین کنیم. از طرفی دیگر، انعطاف‌پذیر بودن این محدودیت‌ها امری ضروری به نظر می‌رسد، زیرا همواره استثنا وجود دارد و امکان دارد که تجاوز از این حدود بالا و پایین به نفع سهامدار باشد؛ بنابراین منعطف کردن محدودیت‌ها و اجازه دادن به تخطی از این حدود امری معقول و کاربردی می‌باشد که در این مقاله انجام گرفته است.

در زمینه بهینه‌سازی سبد سهام تحقیقات گسترده‌ای صورت گرفته است و روش‌های بسیاری برای بهینه-سازی آن پیشنهاد شده است. افشارکاظمی و همکاران [۶]، روشی را با تلفیق روش‌های تحلیل پوششی داده‌ها و برنامه‌ریزی آرمانی، برای انتخاب سبد سهام در بورس اوراق بهادار تهران پیشنهاد داده‌اند. خدامرادی و همکاران [۷]، در پژوهشی به ارایه یک رویکرد دومرحله‌ای ریاضی برای انتخاب سبد سهام پرداختند که در آن هدف عملیاتی ساختن تحلیل بنیادی در انتخاب سهام بود. در این پژوهش ابتدا با رویکرد تحلیل سلسله مراتبی اولویت عوامل موثر در انتخاب صنایع تعیین شد و سپس با حل مدل برنامه‌ریزی خطی، اوزان صنایع با توجه به محدودیت‌های آن‌ها به دست آمد. در نهایت هم اوزان مربوط به سهام در صنعت با به‌کار گیری مدل برنامه‌ریزی آرمانی مشخص شد. تکنیک تاپسیس [1] نیز در [۲] استفاده شده است. الگوریتم‌های فراابتکاری نیز در بهینه‌سازی سبد سهام روش‌های کارایی هستند. درخشان و همکاران [۸]، روشی مبنی بر ترکیب دو روش بهینه‌یابی اجتماع مورچگان و شبیه‌سازی تبرید-تدریجی پارتو پیشنهاد داده‌اند. همچنین برای اعتبارسنجی روش پیشنهاد شده، عملکرد آن در بورس اوراق بهادار تهران با چند روش فراابتکاری دیگر مقایسه شد که نتایج به دست آمده حاکی از برتری روش پیشنهادی بوده است. از دیگر کارهایی که با الگوریتم فراابتکاری انجام شده است می‌توان به [۹ و ۱۰] اشاره کرد که از الگوریتم ژنتیک برای انتخاب سبد سهام استفاده کرده‌اند. در برخی مطالعات بیش از دو هدف برای مساله سبد سهام در نظر گرفته می‌شود که از جمله این تحقیقات می‌توان به [۱۱] اشاره کرد. در تحقیق دیگری خیامم و همکاران [۱۲] یک مدل چندهدفه فازی برای به روز رسانی سبدسهام با درنظر گرفتن هزینه‌های معاملات، معرفی کردند. نتایج نشان داد که مدل ارایه شده عملکرد بهتری نسبت به شاخص بازار از خود نشان داده است. این تحقیقات، نمونه‌ای از مطالعاتی بود که در داخل کشور در زمینه انتخاب سبد سهام انجام گرفته‌اند؛ اما مساله سبد سهام در تحقیقات خارجی نیز جایگاه ویژه‌ای دارد. دنگ و ژائو [۱۳] به ارایه برخی روش‌های تمرینی برای به دست آوردن جواب‌های دقیق برای مدل مارکویتز در بازده مقادیر ریسک پرداخته‌اند.

---

[1] Technique for Order Preference by Similarity to Ideal Solution (TOPSIS)

در بیشتر مطالعات فوق، محدودیت‌های تعداد سهم و حدود بالا و پایین بـرای وزن هـر سـهم در مـدل آورده نشده است. بدین ترتیب، می‌توان بیان کرد کـه ایـن مطالعـات تـوجهی بـه کـاربردی بـودن محـدودیت‌هـای مـدل نداشته‌اند و آن‌چه مطلـوب سـرمایه‌گـذار اسـت در نظـر نگرفتـه‌انـد. همچنـین ایـن مطالعـات تـوجهی بـه ریسـک غیرسیستماتیک در سبد سهام نداشته‌اند. از بین مقالات فوق، فقـط در مقالـه خـدامرادی و همکـاران [۴] شـاهد آن بوده‌ایم که این محدودیت‌ها در مدل لحاظ شده‌اند؛ اما در کار آن‌ها نیز، بیش‌تر محدودیت‌ها به نسبت‌های اهرمی و مباحث تحلیل بنیادی پرداخته شده است که امکان دارد بـرای سـرمایه‌گـذاران کـه دانـش زیـادی در ایـن زمینـه نداشته باشند، نامفهوم باشد و همچنین شرط منعطف بودنی برای محدودیت‌ها در نظر نگرفته‌اند.

در سال‌های اخیر، توجه بیش‌تری به برنامه‌ریزی فازی برای روبرویی با عدم قطعیت، جلب شده است. تئوری مجموعه فازی برای اولین بار توسط زاده [۱۴]، ارایه گردید. لیو و ژانگ [۱۵] یک مدل بهینه‌سازی سـبد سـهام در محیط فازی را در نظر گرفتند که در این مطالعه بازده سهام و حجـم معـاملات بـه عنـوان متغیرهـای فـازی در نظـر گرفته شدند. همچنین ژانگ و ژانگ [۱۶] نیز یک مدل چند هدفه فازی سبد سهام را مطالعه کردند کـه ایـن مـدل تلاش می‌کند تا ثروت نهایی را با کنترل ریسک حـداکثر کنـد. در ایـن تحقیـق مقـادیر بـازده سـهام بـا اسـتفاده از مقادیر میانگین امکانی به دست آمده و کنترل ریسک هم از انحراف استاندارد امکانی ایجـاد شـده اسـت. در ایـن تحقیق همچنین هزینه معاملات و محدودیت‌های تعـداد سـهام در مـدل لحـاظ شـده‌انـد. هوانـگ [۱۷] بـه بررسـی انتخاب سبد سهام در حالت عدم قطعیت در زمانی که داده‌های تاریخی نمی‌توانند به خـوبی بـازده‌هـای سـرمایه را مشخص کنند، پرداخت. در این تحقیق او یک نمودار ریسک را معرفی کـرد و مـدل میـانگین-ریسـک را توسـعه داد. ژو و همکاران [۱۸] تکنیک‌های سری زمانی فازی را با بهینه‌سازی سبد سهام ترکیـب کردنـد. آن‌هـا تکنیـک سری زمانی فازی را به عنوان یک روش مناسب و کارا در زمینه داده‌های مـالی معرفـی کردنـد و نتـایج حاصـل از تحقیق آن‌ها نشان‌دهنده کارایی مدل پیشـنهادی بـود. تحقیقـات بسـیاری در زمینـه برنامـه‌ریـزی فـازی سـبد سـهام صورت گرفته است و روش‌های بسیار زیادی برای بهینه‌سازی آن پیشنهاد شده اسـت کـه از جملـه ایـن تحقیقـات می‌توان به [۲۱-۱۹] اشاره کرد.

با توجه به پیشینه تحقیق، به ندرت شاهد آن هستیم که به ترجیحات سـرمایه‌گـذار اهمیـت داده شـده باشـد و بیشتر مقالات محدودیت‌های کاربردی کـه در دنیـای واقعـی وجـود دارد را در نظـر نگرفتـه‌انـد. از طـرف دیگـر، برنامه‌ریزی منعطف در این مسایل به کار گرفته نشده است. این نوع از برنامه‌ریزی که در بخش‌های بعدی بیش‌تـر به آن پرداخته می‌شود برای نوع خاصی از عدم قطعیت کاربرد دارد. در نظر گرفتن محدودیت‌های سـبد سـهام بـه عنوان محدودیت‌های منعطف نیز از جمله کارهایی است که در مقالات گذشته به آن پرداخته نشده است، هرچنـد که این محدودیت کاملا منطقی است. این محدودیت برآن تاکید دارد که نمی‌توان حد ثـابتی را بـرای وزن سـهام در نظر گرفت و امکان انعطاف در حد بالا و پایین وزن سهام در سبد وجود دارد؛ بنابراین در این مقاله به دنبال آن هستیم که مساله بهینه‌سازی سبد سهام را به نحوی معرفی و مدل‌سازی کنیم تا این مساله کاربردی و کـاملا منطقـی باشد.

۳ روش‌شناسی پژوهش

هر ترکیبی از دارایی‌ها برای سرمایه‌گذاری را سبد سهام می‌گویند. در هر سبد سهام دو عامل مطلوب وجود دارد که یکی بازده بالای سبد سهام و دیگری ریسک کم آن است؛ بنابراین ترکیب سهام در سبد باید به گونه‌ای انتخاب گردد که این دو هدف را ارضا کند. بنابراین ما با یک مساله چندهدفه روبرو هستیم. در این مقاله ما حالت تک دوره‌ای از یک مدل سبد سهام را بررسی می‌کنیم که محدودیت‌های گفته شده روی آن اعمال شده است. همچنین مفروضاتی را نیز در این مدل در نظر گرفتیم که عبارت است از: عدم فروش کوتاه‌مدت و منعطف بودن محدودیت حدود وزن سهم؛ بنابراین مساله بهینه سازی سبد سهام که در این مقاله بررسی می‌شود به صورت زیر است:

$$Max\ \ E\left(\tilde{k}\right)=\sum_{i=۱}^{n} x_i \tilde{r}_i \tag{۱}$$

$$Min\ \ Var\left(\tilde{k}\right)=\sum_{i=۱}^{n}\sum_{j=۱}^{n} x_i x_j cov\left(\tilde{r}_i,\tilde{r}_j\right) \tag{۲}$$

$s.t.$

$$\sum_{i=۱}^{n} x_i = ۱\ , \tag{۳}$$

$$lm_i \tilde{\le} x_i\ , \tag{۴}$$

$$x_i \tilde{\le} um_i\ , \tag{۵}$$

$$\sum_{i=۱}^{n} m_i = N\ , \tag{۶}$$

$$x_i \ge ۰, i=۱,\dots,n\ , \tag{۷}$$

$$m_i \in \{۰,۱\}, i=۱,\dots,n\ . \tag{۸}$$

که در آن، $\tilde{k}$ بازده غیرقطعی کل سبد، $\tilde{r}_i$ بازده غیرقطعی سهم iام، $cov\left(\tilde{r}_i,\tilde{r}_j\right)$کواریانس بین بازده سهم‌های i,j، l و u به ترتیب حد پایین و بالا برای وزن هر سهم در سبد، N تعداد سهمی که در سبد می‌خواهیم داشته باشیم، x_i متغیر وزن سهم iام در سبد، m_iمتغیر باینری که زمانی صفر است که سهم i در سبد نیست و زمانی ۱ است که سهم iام در سبد است. معادله (۱) نشان‌دهنده ماکزیمم کردن بازده سبد سهام و معادله (۲) مینیمم کردن واریانس سبد سهام را که همان ریسک محسوب می‌شود نشان می‌دهد. محدودیت (۳) محدودیت بودجه است و نشان می‌دهد که جمع وزن سهام قرار گرفته در سبد سهام باید برابر با ۱ باشد. اگر سهمی در سبد سهام قرار بگیرد محدودیت‌های کران بالا و پایین برای آن در نظر گرفته می‌شود که این کران‌ها دارای انعطاف نیز هستند که این محدودیت‌ها را معادله‌های ۴ و ۵ نشان می‌دهد. تعیین حدود بالا و پایین در این محدودیت‌ها باعث کاهش ریسک غیرسیستماتیک سهم می‌گردد. محدودیت (۶) نشان می‌دهد که ما تعداد ثابتی سهم را می‌توانیم در سبد سهام انتخاب کنیم که این محدودیت می‌تواند باعث کاهش ریسک غیرسیستماتیک

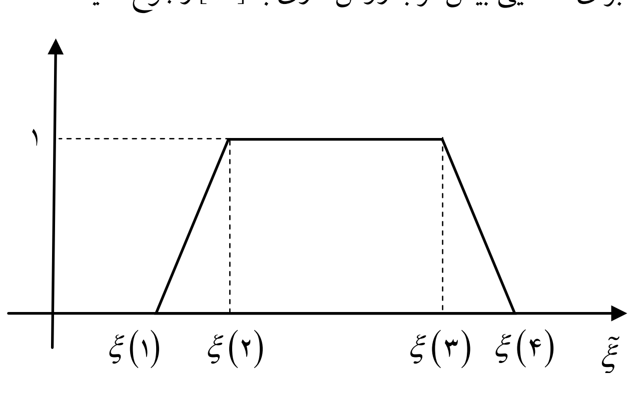
سبد سهام و یا همچنین باعث تمرکز بیش‌تر سرمایه‌گذار بر روی سبد خود شود. در نهایت معادلات (۷) و (۸) نشان‌دهنده غیرمنفی بودن و محدودیت باینری بودن متغیرهای تصمیم است. در این پژوهش از برنامه‌ریزی ریاضی فازی برای مدل‌سازی و حل مساله سبد سهام تعریف شده، استفاده شده است. بر اساس نوع عدم قطعیت، برنامه‌ریزی ریاضی فازی می‌تواند به دو بخش تقسیم شود [۲۲ و۲۳]: برنامه‌ریزی منعطف[۱] و برنامه‌ریزی امکانی[۲]. در این پژوهش ما با هر دو دسته از این برنامه‌ریزی‌ها روبرو هستیم.

۳-۱ مقدمات و تعاریف

در این‌جا ابتدا مقدمات و تعاریفی را در رابطه با برنامه‌ریزی ریاضی فازی مطرح می‌کنیم. ξ یک عدد فازی است زمانی که $\xi \epsilon F\left(R\right)$ نرمال و مجموعه فازی محدب R باشد. این اعداد به مقادیر امکانی وابسته هستند که دامنه این مقادیر وزن [۱ و ۰] است. این وزن تابع عضویت نامیده می‌شود و تابع عضویت ξ را با $\mu_{\xi}\left(x\right)$ نشان می‌دهند. سطح اطمینان γ از عدد فازی به صورت $\left[\xi\right]^{\gamma}=\left\{x \in \mathcal{R} | \mu_{\xi}\left(x\right) \geq \gamma\right\}, \gamma \in \left[۰,۱\right]$ نشان داده می‌شود. ξ یک عدد فازی ذوزنقه‌ای است هرگاه به صورت $\xi = \left(\xi\left(۱\right),\xi\left(۲\right),\xi\left(۳\right),\xi\left(۴\right)\right)$ بیان شود و تابع عضویت آن به صورت زیر باشد:

$$\mu_{\xi}\left(x\right)=\begin{cases} ۰, \; x \leq \xi\left(۱\right), x \geq \xi\left(۴\right) \\ \dfrac{x-\xi\left(۱\right)}{\xi\left(۲\right)-\xi\left(۱\right)}, \;\; \xi\left(۱\right) \leq x \leq \xi\left(۲\right) \\ ۱, \;\; \xi\left(۲\right) \leq x \leq \xi\left(۳\right) \\ \dfrac{\xi\left(۴\right)-x}{\xi\left(۴\right)-\xi\left(۳\right)}, \; \xi\left(۳\right) \leq x \leq \xi\left(۴\right) \end{cases}$$

شکل ۱، یک عدد فازی ذوزنقه‌ای را نشان می‌دهد. عدد فازی مثلثی نوع خاصی از ذوزنقه‌ای می‌باشد که در آن $\xi\left(۲\right) = \xi\left(۳\right)$ است. برای آشنایی بیش تر با روش فازی به [۲۴] رجوع کنید.



شکل ۱. توزیع امکانی عدد فازی ذوزنقه‌ای

[1] Flexible Programming
[2] Possibilistic Programming

۲-۳ برنامه‌ریزی منعطف

برنامه‌ریزی منعطف برای حالتی است که در ارضای محدودیت و یا دست‌یابی به مقادیر هدف توابع هدف، انعطاف وجود دارد. در مساله سبد سهام ارایه شده، محدودیت‌های ۴ و ۵، محدودیت‌های منعطف هستند. این محدودیت‌ها بدین معنی هستند که سرمایه‌گذار مقدار دقیقی را برای حد بالا و پایین وزن هر سهم تعیین نمی‌کند و امکان دارد که این حدود دارای انحرافات جزیی باشند، که این انحرافات در این محدودیت‌ها مدل می‌شود. همان‌گونه که پیش‌تر نیز بیان شده است، این محدودیت‌ها برای عدم تخصیص بیش از حد و یا کم‌تر از حد سرمایه به یک سهم خاص اعمال شده است که باعث می‌شود ریسک غیرسیستماتیک کاهش یابد. همچنین با توجه به اینکه نمی‌توان همواره مقدار مشخص و دقیق حدی برای آن محدودیت‌ها تعیین کرد، قرار دادن انحرافات برای این محدودیت‌ها کاربردی و دارای الزام خواهند بود.

می‌توان فرم کلی چنین محدودیت‌های دارای عدم قطعیت را به صورت زیر نوشت:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \,\tilde{\leq}\, b_i , \qquad (9)$$
$$x_j \geq 0, i, j \in N .$$

برای مقابله با چنین عدم قطعیتی می‌توان از روش پیدرو و همکاران [۲۵] استفاده کرد که محدودیت‌های منعطف را به محدودیت‌های ساده تبدیل می‌کند. فرض کنید $\alpha, \beta \epsilon F(R)$ عددهای فازی هستند. روش ساده برای رتبه‌بندی این اعداد تعریف تابع رتبه بندی (g) می‌باشد که عدد فازی را به عدد واقعی تبدیل نماید: $g : F(R) \to \mathrm{R}$. این تابع رتبه‌بندی دارای خصوصیات زیر می‌باشد:

$$g(\alpha) \leq g(\beta) \Leftrightarrow \alpha \leq \beta,$$
$$g(\alpha) \geq g(\beta) \Leftrightarrow \alpha \geq \beta,$$
$$g(\alpha) = g(\beta) \Leftrightarrow \alpha = \beta.$$

همچنین اگر روابط زیر در مورد g درست باشد، آن یک تابع رتبه‌بندی خطی است:

$$g(\alpha+\beta) = g(\alpha) + g(\beta), \qquad \forall \alpha, \beta \in F(\mathcal{R}),$$
$$g(r\alpha) = rg(\alpha), \qquad \forall r \in \mathcal{R}, r \succ 0, \quad \forall \alpha \in F(\mathcal{R}).$$

برای حل معادله (۹)، در نظر می‌گیریم که g یک تابع رتبه‌بندی خطی است. تابع φ را به صورت $\varphi : F(\mathcal{R}) \times F(\mathcal{R}) \to F(\mathcal{R})$ تعریف می‌کنیم که تابعی به صورت زیر است:

$$\varphi(a_i x, b_i) = \begin{cases} \tilde{p}_i , \ a_i x \leq b_i , \\ \tilde{p}_i - a_i x + b_i , \ b_i \leq a_i x \leq b_i + \tilde{p}_i , \\ 0, \ a_i x \geq b_i + \tilde{p}_i . \end{cases}$$

در تابع فوق، $\tilde{p}_i \epsilon F(\mathcal{R})$ یک عدد فازی است. با استفاده از روش ارایه شده توسط کادناس و وردگی [۲۶] می‌توان تابع عضویت محدودیت iام را به دست آورد. تابع عضویت مرتبط با محدودیت فازی $a_{ij} x_j \,\tilde{\leq}\, b_i$ با عدد فازی $\tilde{p}_i$ که بیش‌ترین تخطی را از محدودیت iام دارد، به صورت زیر ایجاد می‌شود:

$$\mu^{i}\left(a_{i}x,b_{i}\right)=\frac{g\left(\varphi\left(a_{i}x,b_{i}\right)\right)}{g\left(\tilde{p}_{i}\right)},\quad \mu^{i}:F\left(\mathcal{R}\right)\rightarrow\left[۰,۱\right].$$

در این‌جا می‌توان یک برش γ را برای فهمیدن حداقل درجه ارضای محدودیت، برروی تابع عضویت تعریف کنیم. بنابراین با توجه به تابع درجه عضویت ارایه شده در معادله قبلی داریم [۲۵ و۲۶]:

$$\mu^{i}\left(a_{i}x,b_{i}\right)\geq\gamma\Leftrightarrow\frac{g\left(\varphi\left(a_{i}x,b_{i}\right)\right)}{g\left(\tilde{p}_{i}\right)}\geq\gamma\Leftrightarrow\frac{g\left(\tilde{p}_{i}-a_{i}x+b_{i}\right)}{g\left(\tilde{p}_{i}\right)}\geq\gamma\Leftrightarrow$$

$$g\left(\tilde{p}_{i}\right)-g\left(a_{i}x\right)+g\left(b_{i}\right)\geq g\left(\tilde{p}_{i}\right)\gamma\Leftrightarrow g\left(a_{i}x\right)\leq g\left(b_{i}+\tilde{p}_{i}\left(۱-\gamma\right)\right)\Leftrightarrow a_{i}x\leq b_{i}+\tilde{p}_{i}\left(۱-\gamma\right).$$

بنابراین با توجه به حداقل درجه ارضای محدودیت γ، می‌توان فرم کلی معادله (۹) که دارای محدودیت فازی بود را به فرم زیر تبدیل کرد که در آن عدد فازی وجود دارد:

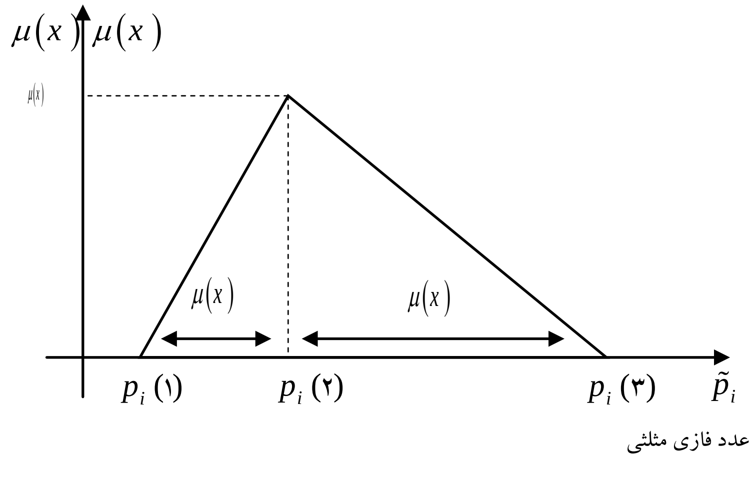
$$\begin{aligned}&a_{ij}x_{j}\leq b_{i}+\tilde{p}_{i}\left(۱-\gamma\right),\\&x_{j}\geq ۰,\ i,j\in N,\gamma\in\left[۰,۱\right].\end{aligned}\qquad(۱۰)$$

در این مقاله، ما عدد فازی $\tilde{p}_{i}$ را یک عدد فازی مثلثی در نظر می‌گیریم. بر اساس شاخص معرفی شده توسط یاگر [۲۷]، معادله (۱۰) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$a_{ij}x_{j}\leq b_{i}+\left(p_{i}\left(۲\right)+\frac{d_{p_{i}}-d'_{p_{i}}}{۳}\right)\left(۱-\gamma\right).$$

همان‌طور که مشخص است فرم معادله فوق، قطعی بوده و پارامتر عدم قطعیتی در آن ملاحظه نمی‌شود. در این معادله، $p_{i}\left(۲\right)$ نقطه مرکزی عدد فازی مثلثی و $d_{p_{i}}$ و $d'_{p_{i}}$ به ترتیب حاشیه‌های چپ و راست آن است (شکل ۲، عدد فازی مثلثی را نشان می‌دهد)؛ بنابراین با استفاده از همین روش، محدودیت (۸)، به فرم زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned}&x_{i}\lesssim um_{i}\rightarrow x_{i}\leq um_{i}+\left(p_{i}\left(۲\right)+\frac{d_{p_{i}}-d'_{p_{i}}}{۳}\right)\left(۱-\gamma\right),\\&x_{i}\gtrsim lm_{i}\rightarrow -x_{i}\lesssim -lm_{i}\rightarrow x_{i}\geq lm_{i}-\left(p_{i}\left(۲\right)+\frac{d_{p_{i}}-d'_{p_{i}}}{۳}\right)\left(۱-\gamma\right).\end{aligned}\qquad(۱۱)$$



شکل ۲. توزیع امکانی عدد فازی مثلثی

۳-۳ برنامه‌ریزی امکانی

برنامه‌ریزی امکانی برای حالتی است که عدم قطعیت شناختی در داده‌های مساله وجود داشته باشد.

میانگین و واریانس امکانی در مساله سبد سهام

همان‌گونه که گفته شد، بازده سهام دارای عدم قطعیت است و در این جا برای روبرویی با عدم قطعیت در مورد بازده از عدد فازی ذوزنقه‌ای استفاده شده است؛ بنابراین بازده سهم iام را می‌توان به صورت $r_i = \left(r_i(۱), r_i(۲), r_i(۳), r_i(۴)\right), i = ۱,\dots,n.$ نشان داد. کارلسون و همکاران [۲۸]، میانگین و واریانس امکانی را برای سبد سهام به دست آوردند. معادلات میانگین و واریانس امکانی با توجه به ذوزنقه‌ای بودن عدد فازی به صورت زیر است:

$$E\left(\sum_{i=۱}^{n} r_i x_i\right) = \sum_{i=۱}^{n} \frac{۱}{۲}\left[r_i(۱) + r_i(۲) + \frac{۱}{۳}\left(r_i(۴) - r_i(۳) - r_i(۲) + r_i(۱)\right)\right] x_i, \qquad (۱۲)$$

$$\begin{aligned} Var\left(\sum_{i=۱}^{n} r_i x_i\right) &= \left(\sum_{i=۱}^{n} \frac{۱}{۲}\left[r_i(۲) - r_i(۱) + \frac{۱}{۳}(r_i(۲) - r_i(۱) + r_i(۴) - r_i(۳))\right] x_i\right)^{۲} + \\ &\frac{۱}{۷۲}\left(\sum_{i=۱}^{n}\left(r_i(۲) - r_i(۱) + r_i(۴) - r_i(۳)\right) x_i\right)^{۲}. \end{aligned} \qquad (۱۳)$$

در [۲۹] اثبات محدب بودن معادلاتی مشابه معادله واریانس فوق آورده شده است و بر این اساس نتیجه می‌گیریم که این تابع یک تابع محدب است. برای رعایت اختصار، در ادامه معادله ۱۲ را با نماد E_{Car} و معادله ۱۳ را با نماد Var_{Car} نشان خواهیم داد.

۴-۳ برنامه‌ریزی آرمانی

برنامه‌ریزی آرمانی [1] توسط چارنز و همکاران [۳۰] برای اولین بار ارایه گردید و سپس توسط ایجیری [۳۱] به مسایل تصمیم‌گیری مالی تعمیم داده شد. برنامه‌ریزی آرمانی نوع خاصی از برنامه‌ریزی ریاضی است که دارای توابع چندهدفه است. برنامه‌ریزی آماری اختلاف بین مقدار مطلوب و مقدار واقعی نتایج را کم می‌کند. در این مقاله از این نوع برنامه‌ریزی استفاده شده است تا بتوان مساله چندهدفه مورد بررسی را به یک مساله ساده تبدیل کرد؛ بنابراین می‌توان معادله‌های ۱۲و۱۳ را به یک تابع هدف به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} &Max\ E_{Car} - \rho\left(\sum_{i=۱}^{n} d_i^{+} + d_i^{-}\right) \\ &s.t. \\ &\quad Var_{Car} + \sum_{i=۱}^{n} d_i^{-} - \sum_{i=۱}^{n} d_i^{+} = G, \\ &\quad d_i^{-}, d_i^{+} \geq ۰. \end{aligned} \qquad (۱۴)$$

[1] Goal Programming

مقدار مطلوب واریانس همواره صفر است و واریانس همواره یک عدد مثبت است؛ بنابراین با استفاده از $d_i^- = \circ$ ، $d_i^+ \geq \circ$ و $G = \circ$ می‌توان معادله فوق را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned} & Max\ E_{Car} - \rho d^+ \\ & s.t. \\ & \quad Var_{Car} - d^+ = \circ, \\ & \quad d^+ \geq \circ. \end{aligned} \tag{۱۵}$$

بنابراین در نهایت می‌توان مساله سبد سهام پیشنهادی را به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} & Max\ E_{Car} - \rho d^+ \\ & s.t. \\ & \quad Var_{Car} - d^+ = \circ, \\ & \quad x_i \leq u m_i + \left(p_i(۲) + \frac{d_{p_i} - d'_{p_i}}{۳} \right)(۱-\gamma), \\ & \quad x_i \geq l m_i - \left(p_i(۲) + \frac{d_{p_i} - d'_{p_i}}{۳} \right)(۱-\gamma), \\ & \quad \sum_{i=۱}^{n} x_i = ۱, \\ & \quad \sum_{i=۱}^{n} m_i = N, \\ & \quad x_i, d^+ \geq \circ,\ i = ۱,\dots,n, \\ & \quad m_i \in \{\circ, ۱\},\ i = ۱,\dots,n, \\ & \quad \circ/۵ < \gamma \leq ۱. \end{aligned} \tag{۱۶}$$

که در آن γ سطح اطمینان محدودیت شانسی در فرمول فوق می‌باشد که توسط تصمیم‌گیرنده مقدار آن باید تعیین گردد.

۴ یافته‌های پژوهش

در این‌جا بازده ۳۰ شرکت از بورس اوراق بهادار تهران، در ماه آبان سال ۱۳۹۳، برای اجرای مدل در نظر گرفته شده‌اند. روش‌های مختلفی برای تبدیل داده‌های تاریخی به اعداد فازی در مرور ادبیات وجود دارد که در این‌جا از روش آزاده و همکاران [۳۲] استفاده شده است. در این روش، برای تبدیل داده‌های تاریخی به اعداد ذوزنقه‌ای ابتدا داده‌ها به ترتیب به دو دسته با مشاهدات برابر تقسیم می‌شوند و سپس مقادیر مینیمم، ماکزیمم و میانگین هر دسته محاسبه می‌گردد. سپس مقدار کم‌تر در بین مینیمم دسته‌ها را انتخاب و برابر با $\xi(۱)$ قرار می‌دهیم، از طرف دیگر مقدار بیش‌تر در بین ماکزیمم دسته‌ها را برابر با $\xi(۴)$ قرار می‌دهیم و میانگین‌های به دست آمده را به $\xi(۲)$ و $\xi(۳)$ اختصاص می‌دهیم. همچنین اعداد فازی مثلثی برای انحرافات وزن سهام در سبد، طبق نظر

خبرگان و سرمایه‌گذاران در مورد هر سهام مشخص شد؛ بنابراین در جدول ۱ نمادهای در نظر گرفته شده از بورس تهران به همراه عددفازی انحراف وزن آن‌ها در سبد و عدد فازی بازده آن‌ها در یک ماه، آورده شده است.

جدول ۱. بازده و انحرافات وزن در سبد برای هر سهم به صورت عدد فازی

نماد شرکت پذیرفته شده در بورس تهران	انحراف وزن سهام در سبد $\left(p_i(۱), p_i(۲), p_i(۳)\right)$	بازده سهام (٪) $\left(r_i(۱), r_i(۲), r_i(۳), r_i(۴)\right)$
پتایر	(۰/۰۵و۰/۰۱و۰)	(۸/۹۵و۶/۴و۵/۲و۳/۲۶)
خودرو	(۰/۱و۰/۰۵و۰)	(۲۹/۲۵و۲۳/۶۳و۲۲/۸۲و۱۷/۰۴)
رتاپ	(۰/۰۳و۰/۰۲و۰)	(۳/۷و۱/۷۴و۰/۶۷و-۰/۶۹)
رانفور	(۰/۰۷و۰/۰۵و۰)	(۶/۳۷و۴/۶۱و۱/۰۹و-۰/۷۴)
رمپنا	(۰/۰۶و۰/۰۴و۰)	(۲۲/۲۳و۱۶/۸۸و۱۲/۴۳و۵/۷۴)
ساراب	(۰/۰۸و۰/۰۳و۰)	(۸/۲۷و۴/۱۰و۴/۰۴و-۰/۱۹)
سشرق	(۰/۰۹و۰/۰۵و۰)	(۹/۳۴و۴/۰۵و۳/۸۲و-۱/۶۹)
شاراک	(۰/۰۷و۰/۰۳و۰)	(-۱/۳۳و-۲/۳۲و-۷/۱و-۹/۹۲)
شاملا	(۰/۱و۰/۰۶و۰)	(۳۳/۵۳و۲۹/۶۷و۷/۶۵و۱/۶۳)
غالبر	(۰/۰۶و۰/۰۴و۰)	(۱۱/۸۵و۸/۷۷و-۲/۶و-۵/۶۷)
فاذر	(۰/۰۴و۰/۰۱و۰)	(۶۴/۶۷و۵۴/۸۷و۲۷/۴۲و۲۱/۴۲)
فلوله	(۰/۰۹و۰/۰۷و۰)	(-۱/۲۹و-۵/۸و-۶/۹۱و-۱۰/۳۲)
قشهد	(۰/۰۷و۰/۰۴و۰)	(۰/۱۲و-۱/۴۲و-۷/۳۹و-۹/۲۴)
کاذر	(۰/۱۱و۰/۰۵و۰)	(۱۹/۴و۱۳/۴۱و۱۱/۷۲و۴/۰۵)
کفرا	(۰/۰۵و۰/۰۴و۰)	(۵/۷۷و۱/۶۹و-۰/۱۳و-۴/۲۳)
کگاز	(۰/۱و۰/۰۶و۰)	(۲۱/۸و۱۹/۵۵و۱۴/۳۹و۸/۷۱)
لخزر	(۰/۰۹و۰/۰۳و۰)	(۱۶/۴۵و۱۳/۳۹و۱/۲۴و-۳/۷۳)
ملت	(۰/۰۹و۰/۰۷و۰)	(۷/۵۲و۶/۲۷و۱/۵۴و-۴/۱۴)
واتی	(۰/۰۷و۰/۰۴و۰)	(۳۷/۶۳و۲۶/۸و۲۶/۳و۱۶/۰۵)
وبصادر	(۰/۱۵و۰/۰۷و۰)	(۲۵/۵۲و۱۹/۵۴و۱۴/۵۵و۶/۶۴)
اخابر	(۰/۰۸و۰/۰۳و۰)	(۱۰/۷۲و۸/۱۵و۵/۷۳و۱/۲۶)
بتراس	(۰/۰۹و۰/۰۵و۰)	(۲۵/۴۹و۲۱/۶۴و۱۰/۳۴و۳/۱)
بکاب	(۰/۰۶و۰/۰۲و۰)	(۱۴/۸و۹/۵۷و-۰/۱۷و-۱۰/۶۹)
توریل	(۰/۰۹و۰/۰۴و۰)	(۹/۲۳و۶/۱۱و۴/۲۳و-۰/۴۷)
حسینا	(۰/۱۲و۰/۰۴و۰)	(۱۰و۵/۶۷و۲/۴۷و-۱/۵۹)
کرمان	(۰/۱و۰/۰۷و۰)	(۱۳۹/۵۲و۱۲۸/۳۱و۵۳/۶۱و۲۱/۷۹)
مارون	(۰/۱و۰/۰۵و۰)	(۱۰/۱۱و۹/۴۸و۶/۹۳و۵/۲۳)
کی بی سی	(۰/۰۸و۰/۰۶و۰)	(-۱/۰۷و-۵/۰۴و-۷/۲و-۹/۶۹)
ستران	(۰/۰۷و۰/۰۳و۰)	(۲۰/۵۵و۱۵/۹۶و۴/۱۴و-۱/۵۳)
افرا	(۰/۱۴و۰/۰۷و۰)	(۰/۳۶و-۴/۳۳و-۶/۷۵و-۹/۱۸)

برای اجرای مدل و کدنویسی مساله از نرم‌افزار گمز [۱] استفاده شده است. کاناپت [۲] به عنوان گردشگر حل‌کننده [۳] برای حل مدل غیرخطی ارایه شده استفاده شده است. در این‌جا مساله با دو مقدار مختلف برای سطح اطمینان γ اجرا شده است. دو مقدار ۰/۷ و ۰/۸ برای مقادیر γ انتخاب شدند که نتایج آن با هم مقایسه شده‌اند. لازم به ذکر است به دلیل آن که به ازای مقادیر بالاتر از ۰/۸ جواب مدل به مراتب بدتر شد از ارایه آن نتایج پرهیز شد، همچنین مقادیر کم تر از ۰/۷ برای تصمیم‌گیرنده جذابیت ندارد؛ زیرا با سطح اطمینان کم تر از ۰/۷ خیلی نمی‌توان از جواب‌های به دست آمده اطمینان داشت. جدول ۲ نتایج حاصل از اجرای مدل در دو مقدار متفاوت از سطح اطمینان γ را نشان می‌دهد که در آن سهام انتخابی و مقدار وزن آن‌ها در سبد مشخص است.

جدول ۲. عملکرد مدل تحت داده‌های اسمی

$\gamma = ۰/۷$			$\gamma = ۰/۸$		
نام سهام	وزن سهام در سبد		نام سهام	وزن سهام در سبد	
خودرو	۰/۲۲۹		خودرو	۰/۲۹	
فاذر	۰/۴۷۱	Z= ۲۲/۳۶۴	فاذر	۰/۳۵۱	Z= ۲۱/۹۰۲
واتی	۰/۱۵۵	Var= ۲۲/۰۰۱	واتی	۰/۲۱۲	Var= ۲۲/۱۰۹
کرمان	۰/۱۳۹		کرمان	۰/۱۴۷	

در جدول فوق مقدار وزن هرکدام از سهم‌ها در دو مقدار مختلف سطح اطمینان به دست آمده است. همچنین مقدار واریانس و تابع هدف که ترکیبی از بازده و واریانس است نیز در جداول فوق نشان داده شده‌اند. برای اعتبارسنجی و مقایسه روش‌ها نمی‌توان به نتایج بالا استناد کرد و باید در واقعیت آن‌ها را با هم مقایسه کرد؛ اما از آن‌جا که مقایسه در واقعیت هم وقت‌گیر و هم هزینه‌بر است، لذا می‌توان از راه‌کار ماشین زمان استفاده کرد. ماشین زمان برای ما واقع‌نمایی [۴] می‌کند و بدین صورت زمان را به جلو می‌برد و نتایج حاصل از مدل‌ها را برای ما به صورت واقعیت اتفاق افتاده درمی‌آورد. بدین منظور، برای ارزیابی مطلوبیت و استواری جواب‌های به‌دست آمده از طریق روش‌های پیشنهادی تحت داده‌های اسمی، ۱۰ مرتبه واقع‌نمایی تصادفی به صورت تابع یونیفرم تولید می‌شود و کارایی آن محاسبه می‌شود. به عنوان مثال، اگر $\xi = \left(\xi(۱),\xi(۲),\xi(۳),\xi(۴)\right)$ یک عدد فازی ذوزنقه‌ای باشد، مقدار واقع‌نمایی شده (ξ^{real}) با تولید یک عدد تصادفی به صورت تابع یونیفرم در بین دو حد بالا و پایین تابع توزیع امکان عدد ذوزنقه‌ای ($\xi^{real} \sim \left[\xi(۱),\xi(۲)\right]$) ایجاد می‌گردد [۳۳]؛ بنابراین مقدار قطعی r_i^{real}، ۱۰ مرتبه برای هر سهم i به صورت تصادفی مشخص می‌شود و در مساله بهینه‌سازی جایگزین می‌گردد. بدین صورت، در این ۱۰ مرتبه واقع‌نمایی، چون مقدار بازده هر سهم در یک بازه خاص به صورت

[1] GAMS
[2] CONOPT
[3] Solver
[4] Realization

تصادفی انتخاب می‌گردد، مقادیر بازده سهم‌های مختلف در آن‌ها با یکدیگر متفاوت خواهد بود؛بنابراین فرم مساله بهینه سازی تحت شرایط واقع نمایی به فرم زیر تغییر پیدا می‌کند:

$$\begin{aligned}
&Max\ \sum_{i=1}^{n} r_i^{real} x_i^{*} - \rho\left(\sum_{i=1}^{n} d_i^{+}\right) - \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} R_i^{u}\right) - \omega\left(\sum_{i=1}^{n} R_i^{l}\right)\\
&s.t.\\
&\qquad \operatorname{var}\left(\sum_{i=1}^{n} r_i^{real} x_i^{*}\right) - d_i^{+} = 0,\\
&\qquad x_i^{*} \le u m_i^{*} + p_i^{real} + R_i^{u},\\
&\qquad x_i^{*} + R_i^{l} \ge l m_i^{*} - p_i^{real},\\
&\qquad \sum_{i=1}^{n} x_i^{*} = 1,\\
&\qquad \sum_{i=1}^{n} m_i^{*} = N,\\
&\qquad R_i^{u}, R_i^{l} \ge 0, i = 1,\dots,n.
\end{aligned} \tag{17}$$

که در معادلات فوق R_i^u ، R_i^l نشان‌دهنده انحراف از محدودیت‌ها تحت واقع نمایی و λو ω مقادیر جریمه تابع هدف به ازای این انحرافات از محدودیت‌ها است. حال برای مقایسه دو مدل می‌توان از شاخص عملکرد این واقع‌نمایی‌های انجام شده استفاده کرد که در این‌جا از شاخص عملکرد میانگین و انحراف معیار استفاده شده است. نتایج حاصل از واقع‌نمایی، میانگین و انحراف معیار دومدل در جدول ۳ نمایش داده شده است.

جدول ۳. عملکرد مدل‌ها تحت واقع‌نمایی

تکرار / مدل	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	میانگین	انحراف استاندارد
$\gamma = 0/7$	۳۰/۴۴	۲۱/۶۶	۲۶/۴۸	۳۰/۲۴	۲۰/۵۶	۳۲/۰۳	۱۸/۴۴۳	۲۶/۸۶	۱۶/۵۷	۲۷/۱۳	۲۵/۰۴۳	۴/۸۷۶
$\gamma = 0/8$	۲۱/۴۲	۲۱/۴۲	۳۱/۷	۱۷/۴۲	۱۶/۰۴	۱۳/۹۱	۲۴/۰۸۲	۲۳/۸۳۲	۲۷/۲۹۹	۱۲/۸۵۷	۲۱/۰۰	۵/۴۴۳

مشخص است که در واقع‌نمایی، معیارهای عملکرد برتری سطح اطمینان ۰/۷ را تایید می‌کنند؛ زیرا همان طور که در جدول ۳ نیز مشاهده می‌شود میانگین مقدار تابع هدف مدل ۰/۷ در تکرارهای واقع‌نمایی بالاتر از میانگین مدل ۰/۸ است و همچنین انحراف استاندارد مدل ۰/۷ از مدل رقیب کم‌تر است که این معیار نیز به برتری این مدل اشاره دارد. این نتایج نشان می‌دهد که برای تصمیم‌گیری در مورد سبد سهام، اگر بتوان سطح اطمینان تصمیم‌گیرنده را مقدار ۰/۷ قرار داد، آن‌گاه می‌توان با ریسک کم‌تر، انتظار بازده سود بالاتری را داشت.

۵ نتیجه‌گیری و بحث

مساله سبد سهام همواره یکی از جذاب‌ترین مسایل در زمینه مالی به حساب می‌آید که با انتخاب سهام و تخصیص وزن هرسهم، سر و کار دارد. در این مطالعه، مدل بهینه‌سازی سبد سهامی در نظر گرفته شده است که محدودیت-

هایی به آن اضافه شده است. محدودیت‌های اضافه شده به مدل، محدودیت در انتخاب تعداد سهم موجود در سبد و محدودیت برای حد بالا و پایین وزن هر سهم در سبد سهام بوده است. دلیل اضافه کردن این محدودیت‌ها در این پژوهش آن بوده است که ریسک غیرسیستماتیک سبد سهام کاهش یابد. محدودیت‌هایی که در این مدل اضافه شده‌اند، محدودیت‌های کاربردی هستند و در واقعیت توسط سرمایه‌گذاران مورد استفاده قرار می‌گیرد. همچنین محدودیت در نظر گرفته شده برای وزن سهام، در این‌جا فازی و دارای انعطاف در نظر گرفته شده است که در کارهای پیشین چنین محدودیتی در نظر گرفته نشده است. برای اجرای مساله سبد سهام معرفی شده، نمونه-ای از شرکت‌های پذیرفته شده در بورس اوراق بهادار تهران در نظر گرفته شد. نتایج برای دو مقدار متفاوت از سطح اطمینان محدودیت شانسی ارایه گردید.

پژوهش‌های آینده زیادی در این حوزه می‌تواند پیشنهاد شود که از جمله آن‌ها می‌توان به این موارد اشاره کرد: ۱) استفاده از بهینه‌سازی استوار به جای رویکرد فازی در برخورد با عدم قطعیت، ۲) استفاده از رویکرد بیان شده برای مساله‌های سبد سهام متفاوت، نظیر سبد سهام چند دوره‌ای، ۳) استفاده از روش برنامه‌ریزی آرمانی فازی برای برخورد با چند هدفه بودن مساله و ۴) استفاده از روش‌های فراابتکاری برای حل مساله ارایه شده.

منابع

[۲] امیری، م.، شریعت‌پناهی، م.، بناکار، م.، (۱۳۸۹). انتخاب سبد سهام بهینه با استفاده از تصمیم‌گیری چند معیاره. فصلنامه بورس اوراق بهادار، ۳(۱۱)، ۵-۲۴.

[۳] راعی، ر.، تلنگی، ا.، (۱۳۸۳). مدیریت سرمایه‌گذاری پیشرفته، تهران، سمت.

[۶] افشارکاظمی، م.، خلیلی عراقی، م.، سادات کیایی، ا.، (۱۳۹۱). انتخاب سبد سهام در بورس اوراق بهادار تهران با تلفیق روش تحلیل پوششی داده‌ها و برنامه‌ریزی آرمانی. فصلنامه علمی پژوهشی دانش مالی تحلیل اوراق بهادار، ۵(۱۳)، ۴۹-۶۳.

[۷] خدامرادی، س.، ترابی گودرزی، م.، راعی عزآبادی، م.، (۱۳۹۲). رویکرد دو مرحله‌ای ریاضی در بهینه‌سازی سبد سهام. مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادر، ۴(۱۴)، ۱۳۶-۱۶۷.

[۸] درخشان، م.، گل مکانی، ح.، حنفی‌زاده، پ.، (۱۳۹۱). رویکردی فراابتکاری برای انتخاب سبد سهام با اهداف چندگانه در بورس اوراق بهادار تهران. نشریه بین‌المللی مهندسی صنایع و مدیریت تولید، ۲۳(۳)، ۳۱۷-۳۳۱.

[۹] خالوزاده، ح.، امیری، ن.، (۱۳۸۵). تعیین سبد سهام بهینه در بازار بورس ایران بر اساس نظریه ارزش در معرض ریسک. مجله تحقیقات اقتصادی، ۴۱(۲)، ۲۱۱-۲۳۱.

[۱۰] گرکز، م.، عباسی، ا.، مقدسی، م.، (۱۳۸۹). انتخاب و بهینه‌سازی سبد سهام با استفاده از الگوریتم ژنتیک بر اساس تعاریف متفاوتی از ریسک. فصلنامه مدیریت صنعتی دانشکده علوم انسانی دانشگاه آزاد اسلامی، ۵(۱۱)، ۱۱۵-۱۳۶.

[۱۱] قندهاری، م.، فغانی، ف.، طباطبایی، س. م.، (۱۳۹۱). مدل‌سازی آرمانی برای انتخاب پرتفولیوی بهینه با گشتاورهای بالا. مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، ۹(۴)، ۵۵-۶۹.

[۱۲] خیامیم، آ.، میرزازاده، ا.، نادری، ب.، (۱۳۹۳). یک مدل فازی برای به روز رسانی پورتفوی با در نظر گرفتن هزینه‌های معاملات: پیاده‌سازی در بورس اوراق بهادار تهران. مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، ۱۱(۲)، ۷۵-۹۳.

[1] Markowitz, H., (1952). Portfolio selection. The journal of finance, 7(1), 77-91.

[4] Lakonishok, J., Shapiro, A. C., (1986). Systematic risk, total risk and size as determinants of stock market returns. Journal of Banking & Finance, 10(1), 115-132.

[5] Lobo, M. S., Fazel, M., Boyd, S., (2007). Portfolio optimization with linear and fixed transaction costs. Annals of Operations Research, 152(1), 341-365.

[13] Deng, X., Zhao, J. f., (2013). Some new results on value ranges of risks for mean–variance portfolio models. Information Sciences, 234(1), 217-225.
[14] Zadeh, L. A., (1973). Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes. Systems, Man and Cybernetics, IEEE Transactions on, (1), 28-44.
[15] Liu, Y. J., Zhang, W. G., (2013). Fuzzy portfolio optimization model under real constraints. Insurance: Mathematics and Economics, 53(3), 704-711.
[16] Zhang, P., Zhang, W. G., (2014). Multiperiod mean absolute deviation fuzzy portfolio selection model with risk control and cardinality constraints. Fuzzy Sets and Systems, 255(1), 74-91.
[17] Huang, X., (2010). Mean-risk model for uncertain portfolio selection. Fuzzy Optimization and Decision Making, 10(1) , 71-89.
[18] Zhou, R., Yang, Z., Yu, M., Ralescu, D. A., (2015). A portfolio optimization model based on information entropy and fuzzy time series. Fuzzy Optimization and Decision Making, 14(4), 381-397.
[19] Duan, L., Stahlecker, P., (2011). A portfolio selection model using fuzzy returns. Fuzzy Optimization and Decision Making, 10(2), 167-191.
[20] Cadenas, J. M., Carrillo, J. V., Garrido, M. C., Ivorra, C., Liern, V., (2012). Exact and heuristic procedures for solving the fuzzy portfolio selection problem. Fuzzy Optimization and Decision Making, 11(1), 29-46.
[21] Wu, X. L., Liu, Y. K., (2012). Optimizing fuzzy portfolio selection problems by parametric quadratic programming. Fuzzy Optimization and Decision Making, 11(4), 411-449.
[22] Mula, J., Poler, R., Garcia, J., (2006). MRP with flexible constraints: A fuzzy mathematical programming approach. Fuzzy Sets and Systems, 157(1), 74-97.
[23] Zahiri, B., Tavakkoli-Moghaddam, R., Pishvaee, M. S., (2014). A robust possibilistic programming approach to multi-period location–allocation of organ transplant centers under uncertainty. Computers & Industrial Engineering, 74(1), 139-148.
[24] Sakawa, M., (2013). Fuzzy sets and interactive multiobjective optimization. Springer Science & Business Media Publishing Company.
[25] Peidro, D., Mula, J., Poler, R., Verdegay, J. L., (2009). Fuzzy optimization for supply chain planning under supply, demand and process uncertainties. Fuzzy Sets and Systems, 160(18), 2640-2657.
[26] Cadenas, J. M., Verdegay, J. L., (1997). Using fuzzy numbers in linear programming. Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics, IEEE Transactions on, 27(6), 1016-1022.
[27] Yager, R. R., (1981). A procedure for ordering fuzzy subsets of the unit interval. Information sciences, 24(2), 143-161.
[28] Carlsson, C., Fullér, R., Majlender, P., (2002). A possibilistic approach to selecting portfolios with highest utility score. Fuzzy sets and systems, 131(1), 13-21.
[29] Bazaraa, M. S., Sherali, H. D., Shetty, C., (2006). Nonlinear Programming. New York: Wiley.
[30] Charnes, A., Cooper, W. W., Ferguson, R. O., (1955). Optimal estimation of executive compensation by linear programming. Management science, 1(2), 138-151.
[31] Ijiri, Y., (1965). Management goals and accounting for control. Amsterdam: North Holland Pub.
[32] Azadeh, A., Ebrahim, R. M., Eivazy, H., (2010). Parameter optimization of tandem queue systems with finite intermediate buffers via fuzzy simulation. Performance Evaluation, 67(5), 353-360.
[33] Pishvaee, M. S., Razmi, J., Torabi, S. A., (2012). Robust possibilistic programming for socially responsible supply chain network design: A new approach. Fuzzy sets and systems, 206(1), 1-20.