مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، سال چهاردهم، شماره اول (پیاپی ۵۲)، بهار ۹۶، ص ص ۱۳-۱
شاپا ۷۲۸۶-۲۲۵۱

استفاده از بهینه‌سازی نیمه معین مثبت برای حل مساله‌ی کنترل بهینه‌ی سیستم‌های کنترلی راکتورهای مخزن همزن پیوسته‌ی همدما

رضا دهقان*[۱]، محمد کیانپور [۲]
۱- مربی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد مسجدسلیمان، گروه ریاضی، مسجدسلیمان، ایران
۲- دانشیار، دانشگاه گیلان، گروه ریاضی کاربردی، رشت، ایران

رسید مقاله: ۱۱ مهر ۱۳۹۵
پذیرش مقاله: ۱۵ اسفند ۱۳۹۵

چکیده
در این مقاله یک روش بهینه‌سازی برای حل مساله‌ی کنترل بهینه‌ی کسری که کاربرد مهمی در مهندسی شیمی دارد استفاده شده است. سیستم کنترلی در نظر گرفته شده یک سیستم کنترلی راکتورهای مخزن همزن پیوسته‌ی همدماست. در این مساله مشتق کسری ریمان – لیوویل برای توصیف مدل ریاضی سیستم کنترلی استفاده شده است. برای حل مساله‌ی کنترل بهینه‌ی کسری ابتدا با استفاده از گشتاورهای از مرتبه‌ی مختلف به یک مساله‌ی کنترل بهینه در فضای گشتاوری می‌رسیم و سپس با استفاده از تکنیک گسسته‌سازی متغیرها به یک مساله‌ی بهینه‌سازی نیمه معین مثبت دست پیدا خواهیم کرد. در آخر با حل مساله بهینه‌سازی معادل جواب مساله‌ی کنترل بهینه‌ی کسری در نظر گرفته شده را به دست می‌آوریم.

کلمات کلیدی: گشتاورها، بهینه‌سازی نیمه معین مثبت، مشتق‌کسری، کنترل بهینه.

۱ مقدمه
مسایل کنترل بهینه در بسیاری از زمینه‌های علوم، مهندسی، اقتصاد و ریاضیات ظاهر شده است [۱و۲]. تعریف عمومی کنترل بهینه عبارت است ازکمینه‌سازی یک تابع معیار متشکل از متغیرهای حالت و کنترل یک سیستم، روی یک مجموعه ی قابل قبول از کنترل [۳]. با توجه با اینکه معمولاًحل تحلیلی مسایل کنترل بهینه پیچیده است و یا در اکثر اوقات غیر ممکن است، از روش‌های عددی برای حل آن‌ها استفاده می شود. آن‌چه که در مورد روش‌های عددی مورد توجه قرار می‌گیرد، اولاً دقت محاسبات و سپس حجم محاسبات است. عمده‌ی روش‌های عددی برای حل مسایل کنترل بهینه روش‌های مستقیم هستند، به این صورت که مساله‌ی اصلی با گسسته‌سازی متغیرهای ظاهر شده در مساله به یک مساله‌ی بهینه‌سازی تبدیل می شود و سپس با حل مساله‌ی بهینه‌سازی به‌دست آمده جواب مساله‌ی اصلی را در نقاط گسسته‌سازی شده به‌دست می‌آورند. از جنبه‌ی ریاضی مسایل کنترل بهینه با توجه معادلات دیفرانسیل حاکم بر سیستم کنترلی شناسایی می‌شوند، یعنی دسته‌بندی مسایل کنترل بهینه

* عهده دار مکاتبات
آدرس الکترونیکی: rdehghan110@gmail.com

براساس انواع معادلات دیفرانسیلی است که مدل ریاضی سیستم کنترلی را توصیف می کنند. لذا هرچه بیش‌تر در به‌دست‌آوردن مدل ریاضی مساله دقت شود، نتیجه‌ی مطلوب‌تری از سیستم کنترلی به‌دست خواهد آمد.از آن‌جا که مشتقات کسری در بررسی رفتار یک پدیده‌ی فیزیکی یا یک سیستم دینامیکی، از دقت بیش‌تری برخوردار هستند، حسابان کسری و کاربردهای آن موضوع مطالعه و تحقیق بسیاری از پژوهشگران است، به‌طوری‌که معادلات دیفرانسیل کسری به‌عنوان یک ابزار سودمند برای توصیف حافظه و خواص وراثتی بسیاری از فرآیندها به‌کار گرفته شده است. از جمله مسایلی که تحت تأثیر مشتقات کسری به‌سرعت مورد توجه بسیاری پژوهشگران قرارگرفته است، کنترل بهینه‌ی کسری است. تعریف کنترل بهینه‌ی کسری به این صورت است که در یکی از تابع هدف یا معادلات حاکم بر سیستم و یا هر دو مشتق کسری ظاهر شده باشد. همان‌طور که برای حل کنترل بهینه‌ی معمولی روش‌های مختلفی وجود دارد، برای کنترل بهینه‌ی کسری نیز با توجه به ساختار و مدل سیستم روش‌های متنوعی وجود دارد که به بعضی از آن‌ها اشاره می‌کنیم.

اولین بار توسط آگراوال[۴] فرمول‌بندی و طرحی برای حل مسایل کنترل بهینه‌ی کسری منتشر شد، که وی با به کارگرفتن حساب تغییرات کسری به‌تحلیل و بررسی یک نوع خاص از مسایل کنترل بهینه‌ی کسری پرداخته است. سپس در مقاله دیگری وی [۵] یک فرمول‌بندی کلی و یک راه حل عددی برای حل مسایل کنترل بهینه‌ی کسری که در آن مشتق کسری ریمان - لیوویل ظاهر شده است، ارایه داد. اما با در نظر گرفتن مشتق کسری کپوتو، و این‌که این نوع مشتق بیش‌تر توسط محققان مورد توجه قرار گرفته است، آگراوال و تنگ پونگ[۶و۷] مسایل کنترل بهینه‌ی کسری را این‌بار به‌جای مشتق کسری ریمان - لیوویل، با مشتق کسری کپوتو در نظر گرفتند و سپس روش عددی برای حل تقریبی این نوع از مساله‌ی کنترل بهینه ارایه کردند. لازم به‌ذکر است که بعد از آگراوال مقالات زیادی در زمینه‌ی حل مسایل کنترل بهینه‌ی کسری منتشر شده که توضیح درباره‌ی همه‌ی آن‌ها مقدور نیست اما چند نمونه از آن‌ها عبارتند از [۸-۱۱]. در چند سال اخیر استفاده از چند جمله‌ای‌های متعامد برای حل مسایل کنترل بهینه‌ی کسری مورد توجه‌ی بعضی از پژوهشگران قرار گرفته است . از جمله‌ی آن‌ها می‌توان به مقاله‌ای که در سال ۲۰۱۱، توسط یوسفی و همکاران[۱۲] منتشر شد اشاره کرد، ایشان از چندجمله‌ای پایه‌ی لژاندر، استفاده کرده و مساله‌ی کنترل بهینه‌ی کسری را با استخراج شرایط لازم بهینگی به حل یک دستگاه معادلات جبری کاهش دادند. مقاله‌ی دیگری توسط علی پور و همکاران [۱۳] منتشر شد با این تفاوت که این بار از چند جمله‌ای‌های برنشتاین برای حل مساله به‌کار گرفته‌اند. در سال ۲۰۱۵، هم توسط کشاورز و همکاران [۱۴] مقاله ای منتشر شده که از چندجمله‌ای‌های برنولی برای حل مساله استفاده شده است. بالاخره کار بعدی که می‌توان به‌آن اشاره کرد،که در آن از چندجمله‌ای‌های ژاکوبی استفاده شده، مقاله‌ای است که توسط دوها و همکاران [۱۵] منتشر شد. هدف اصلی این مقاله بیان کاربردی از بهینه‌سازی در علوم مهندسی است زیرا مساله‌ی در نظرگرفته شده در این مقاله حالت خاصی از مسایلی است که در [۱۶] ارایه شده است. در این مقاله، یک روش مستقیم برای حل مساله‌ی کنترل بهینه‌ی کسری مربوط سیستم‌های کنترلی راکتورهای مخزن همزن پیوسته‌ی همدما همراه با واکنش ون دی ووس ارایه شده است. ایده‌ی اصلی روش ارایه شده بر اساس استفاده از مرتبه‌های مختلف گشتاورها به‌جای تابع کنترل ظاهر شده در مدل ریاضی مساله است به‌طوری که با این کار

مساله‌ی کنترل بهینه به یک مساله‌ی بهینه‌سازی نیمه معین مثبت در فضای گشتاورها تبدیل می شود. در آخر مساله‌ی بهینه‌سازی نیمه معین مثبت به‌دست آمده با گسسته‌سازی متغیر زمان ظاهر شده در مساله حل می‌شود. مهم‌ترین مزیت این روش نسبت به سایر روش‌های عددی سادگی مجاسبات و کاستن حجم محاسبات است، البته ناگفته نماند که نتایج عددی به‌دست آمده حاکی از آن است که دقت محاسباتی در این روش نیز قابل قبول است. ساختار مقاله به این ترتیب است: در بخش دوم به معرفی اندازه‌ها و گشتاورها می‌پردازیم. در بخش سوم کنترل بهینه‌ی کسری را معرفی می کنیم. در بخش چهارم مدل ریاضی راکتور مخزن همزن پیوسته‌ی همدما و مساله‌ی کنترل بهینه‌ی کسری مربوط به آن را ارایه می کنیم. چگونگی حل مساله‌ی کنترل بهینه‌ی کسری معرفی شده در بخش چهارم به وسیله‌ی گشتاورها و بهینه‌سازی نیمه معین مثبت تحت عنوان کلی تبدیل مساله‌ی کنترل بهینه به بهینه‌سازی نیمه معین مثبت در بخش پنجم آمده است و سپس در بخش ششم نتیجه‌گیری آمده است.

۲ اندازه ها و گشتاورها

در این بخش چند تعریف که در باره‌ی اندازه‌ها و گشتاورها که در قسمت‌های دیگر این مقاله مورد نیاز است را از [۱۷- ۱۹] ذکر می کنیم.

تعریف ۱: یک اندازه‌ی احتمال μ روی مجوعه ی X، یک اندازه‌ی مثبت است به طوری که $\mu(X)=1$.
یک نمونه از اندازه‌های احتمال، اندازه‌ی دیراک است که در نقطه‌ی $x=\zeta$ به صورت زیر تعریف می شود.

$$\delta_{\zeta}(A)=\begin{cases}1 & \zeta\in A,\\ 0 & \zeta\notin A.\end{cases}$$

برای یک مجموعه‌ی فشرده‌ی داده شده‌ی $X\subset R^n$، فرض کنیم $\mathrm{M}(X)$، نمایشگر فضای باناخ از اندازه‌های علامت‌دار باشد که تکیه‌گاهش روی X قرار دارد؛ بنابراین یک اندازه $\mu\in\mathrm{M}(X)$، تابعی است که هر زیر مجموعه از X را می گیرد و یک عدد حقیقی را برمی گرداند. اثر اندازه‌ی μ روی یک تابع مانند v از فضای توابع پیوسته به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\langle v,\mu\rangle=\int_X v(x)d\mu(x)$$

تعریف۲ : برای یک بردار حقیقی $x=(x_1,...,x_n)\in R^n$ و یک عدد صحیح $\beta\in N^n$ داده شده، یک تک جمله‌ای به‌صورت $x^{\beta}=\prod_{i=1}^{n}x_i^{\beta_i}$ تعریف می‌شود که درجه‌ی آن بر ابر است با $|\beta|=\sum_{i=1}^{n}\beta_i$.

تعریف۳ : برای اندازه‌ی داده شده‌ی $\mu\in\mathrm{M}(X)$ و $\beta\in N^n$، گشتاور مرتبه‌ی β عبارت است از عدد حقیقی

$$y_{\beta}=\int_X x^{\beta}\mu(dx)$$

و به $\{y_{\beta}\}_{\beta\in N^n}$ ، دنباله‌ی گشتاورهای اندازه‌ی μ گفته می‌شود و برای عدد ثابت داده شده‌ی $d\in N$ بردار گشتاورهای تا درجه‌ی d عبارت است از $\{y_{\beta}\}_{|\beta|\le d}$.

تعریف٤ : برای دنباله‌ی داده شده‌ی $y = \{y_\beta\}_{\beta \in N^n}$، تابعک خطی ریس به صورت $l_y : R[x] \to R$ تعریف می‌شود که اثر آن بر روی چند جمله‌ای‌های $P(x) = \sum_\beta p_\beta x^\beta$ به صورت زیر است.

$$l_y(P(x)) = \sum_\beta p_\beta y_\beta$$

به عبارت دیگر تابعک ریس به‌عنوان یک عملگر به خطی‌سازی چند جمله‌ای‌ها می‌پردازد.

تعریف٥ : ماتریس گشتاور مرتبه‌ی d، عبارت است از ماتریس $M_d(y)$ به‌طوری که

$$l_y(P^۲(x)) = p^T M_d(y) p$$

که در آن $P(x)$، چندجمله‌ای درجه‌ی d و p بردار ضرایب آن است.

برای یک حالت خاص وقتی که $X \subset R$ ،گشتاور از مرتبه‌ی $i = ۰,۱,...,۲n$ را به صورت زیر نشان می‌دهیم.

$$m_i = \int_X x^i \mu(dx)$$

تعریف٦: فرض کنیم $m = \{m_i\}$ دنباله‌ای از گشتاورهای اندازه‌ی احتمال μ_m با $m_۰ = ۱$ باشد. ماتریس نیمه معین مثبت هنکل یک ماتریس از مرتبه‌ی n است که دارای درایه‌های متشکل از دنباله‌ی m است و به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$M_n(m) = \begin{pmatrix} ۱ & m_۱ & \dots & m_n \\ m_۱ & m_۲ & \dots & m_{n+۱} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_n & m_{n+۱} & \dots & m_{۲n} \end{pmatrix}$$

۳ کنترل بهینه‌ی کسری

در این بخش بر فرمول‌بندی ریاضی کنترل بهینه‌ی کسری مروری کوتاه داریم. برای مشتقات کسری چندین نوع تعریف وجود دارد، اما سه نوع مشتق کسری ریمان- لیوویل، کپوتو و گرانوالد- لتنیکوف بیشتر از سایر مشتقات کسری مورد استفاده قرار می‌گیرد. در این مقاله ما از دو نوع مشتق کسری ریمان- لیوویل و گرانوالد- لتنیکوف استفاده خواهیم کرد و برای مطالعه‌ی بیش‌تر خواننده را به [۲۰] ارجاع می‌دهیم.

تعریف۷: مشتق کسری ریمان- لیوویل به‌صورت زیر محاسبه می‌شود.

$${}_a^{RL}D_t^\alpha f(t) = \frac{۱}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+۱-n}} d\tau \qquad n-۱ < \alpha < n.$$

قرارداد: برای سادگی مشتق کسری ریمان-لیوویل را با D^α نشان می‌دهیم.

تعریف۸: مشتق کسری گرانوالد- لتنیکوف برای تابع $f(t)$ به صورت زیر به‌دست می‌آید.

$${}_a^{GL}D_t^\alpha f(t) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ N = \left[\frac{t-a}{h}\right]}} \sum_{r=0}^{N} w_r^{(\alpha)} f(t - rh),$$

که در آن $[.]$ یعنی جزء صحیح و

$$w_{\circ}^{(\alpha)} = 1, \quad w_{r}^{(\alpha)} = (1-\frac{\alpha+1}{r})w_{r-1}^{(\alpha)} \quad r = 1,2,...$$

قضیه‌ی زیر رابطه‌ی بین مشتقات کسری ریمان- لیوویل و گرانوالد- لتنیکوف را بیان می‌کند.

قضیه۱ : فرض کنید تابع $f(t)$ دارای مشتقات مرتبه‌ی اول تا مرتبه‌ی $n-1$ پیوسته بوده و مشتق n -ام آن انتگرال‌پذیر باشد. همچنین فرض کنید $n-1<\alpha<n$. در این صورت مشتق مرتبه‌ی α با تعریف گرانوالد- لتنیکوف تابع $f(t)$ با مشتق مرتبه‌ی α ریمان–لیوویل این تابع برابر خواهد بود [۲۱].

مساله‌ی کنترل بهینه‌ی کسری که اولین‌بار در [۴] مطرح شده است، به این صورت است که می‌خواهیم کنترل بهینه‌ی u را بیابیم به‌طوری‌که

$$\begin{aligned} Min \quad J(u) &= \int_{\circ}^{1} \Omega(t,x,u)\,dt \\ D^{\alpha}x(t) &= \Phi(t,x,u), \\ x(\circ) &= x_{\circ} \end{aligned} \tag{1}$$

که در آن Ω,Φ دو تابع دلخواه هستند و $x(t)$ متغیر حالت سیستم است. D^{α} مشتق کسری ریمان- لیوویل است. همان‌طور که می‌بینیم مشتق کسری فقط در معادله‌ی حاکم بر سیستم کنترلی ظاهر شده است، ولی در تابع هدف مشتق کسری نداریم. مساله‌ی کنترل بهینه‌ای که می‌خواهیم در این مقاله به حل آن به‌پردازیم حالت خاصی از مساله‌ی (۱) است.

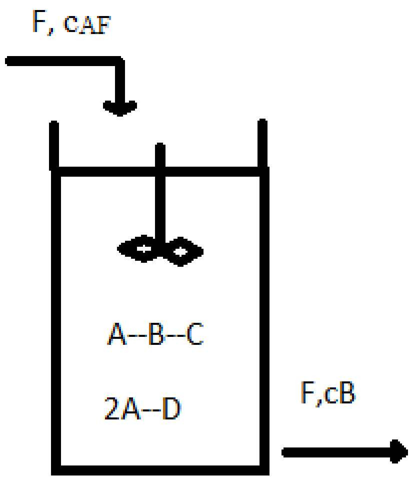
٤ کنترل بهینه‌ی راکتور مخزن همزن پیوسته

سیستم‌های کنترلی راکتورهای مخزن همزن پیوسته‌ی همدما همراه با واکنش ون دی ووس، اغلب مورد توجه پژوهشگران در حوزه‌ی مهندسی شیمی قرار می‌گیرد. علت آن این است که مدل ریاضی این نوع از راکتورها غیرخطی و دارای خواص جالبی است که در مهندسی شیمی دارای اهمیت است. مدل ریاضی این فرآیند کنترلی که در این مقاله در نظر گرفته شده است توسط معادلات زیر توصیف می‌شود [۲۲].

$$D^{\alpha}c_A = -k_1 c_A - k_3 c_A^2 + \frac{F}{V}(c_{AF} - c_A)$$

$$D^{\alpha}c_B = k_1 c_A - k_2 c_B - \frac{F}{V}c_B$$

که در آن $c_A > \circ$, $c_B > \circ$ به ترتیب غلظت مواد B,A هستند و $F \geq \circ$ ، جریان ورودی، c_{AF}، غلظت ماده‌ی A در ورودی به‌طوری‌که $c_{AF} > c_A$ ، $V > \circ$، حجم ثابت راکتور، k_1,k_2,k_3، ثابت‌های سرعت واکنش هستند. نمودار این فرآیند کنترلی در شکل۱ نشان داده شده است.



شکل ۱. راکتور مخزن همزن پیوسته همدما

حال می‌توانیم مساله‌ی کنترل بهینه‌ی این فرآیند کنترلی را معرفی کنیم و آن عبارت است از یافتن تـابع کنتـرل u به‌طوری که

$$\begin{aligned} &Min \quad J(u)=\int_0^1 (x_1^2+x_2^2+u^2)\,dt \\ &D^\alpha x_1(t)=-k_1x_1-k_3\; x_1^2+(c_{AF}-x_1)u \\ &D^\alpha x_2(t)=k_1x_1-k_2\,x_2-x_2u \\ &x_1(0)=x_{01},\quad x_2(0)=x_{02} \end{aligned} \tag{۲}$$

۵ تبدیل مساله‌ی کنترل بهینه به بهینه‌سازی نیمه معین مثبت

در این بخش طی فرآیندی مساله‌ی کنترل بهینه‌ی (۲) را با استفاده از گشتاورها به یـک مسـاله‌ی بهینـه‌سـازی نیمـه معین مثبت تبدیل می‌کنیم.

۵-۱ نمایش چند جمله‌ای

از آن‌جا که تابع همیلتونی، برای مساله‌ی کنترل بهینه کسری در [۴] به صورت زیر تعریف شده است:

$$H=H(t,\lambda,x,u)=\Omega(t,x,u)+\lambda\Phi(t,x,u)$$

می توانیم تابع همیلتونی را برای مساله‌ی کنترل بهینه‌ی (۲) به صورت زیر بنویسیم:

$$H=(1-10\lambda_1)x_1^2+50(\lambda_2-\lambda_1)x_1-100\lambda_2x_2+(\lambda_1(10-x_1)-\lambda_2x_2)u+u^2 \tag{۳}$$

که در آن $u, x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2$ توابعی برحسب t هستند. با توجه به شکل رابطه‌ی (۳) مـی‌بینـیم کـه تـابع همیلتـونی مساله‌ی کنترل بهینه‌ی (۲) به صورت یک چند جمله‌ای برحسب توان‌های افزایشی تابع کنترل به‌دست آمده است، لذا برای راحتی رابطه‌ی (۳) را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$H = \sum_{i=0}^{2} \theta_i u^i \qquad (۴)$$

که در آن

$$\theta_0 = (1-10\lambda_1)x_1^2 + 50(\lambda_2 - \lambda_1)x_1 - 100\lambda_2 x_2 ,\ \theta_1 = (\lambda_1(10 - x_1) - \lambda_2 x_2),\ \theta_2 = 1.$$

مساله‌ی کمینه‌سازی سراسری زیر از جمله مسایلی است که به‌طور مفصل در [۲۳و۲۴] مورد تحلیل و بررسی قرار گرفته و توسط روش گشتاورها حل شده‌است.

$$\min_u H(u) = \sum_{i=0}^{2} \theta_i u^i \qquad (۵)$$

۲-۵ کنترل بهینه‌ی کسری تبدیل یافته

مهم‌ترین کار در این بخش تبدیل مساله‌ی (۵) به یک مساله‌ی معادل با ساختار خطی است. برای این کار از پوسته‌ی محدب گراف چندجمله‌ای $H(u)$ استفاده می‌کنیم، به‌این صورت که اگر خانواده‌ی همه‌ی اندازه‌های احتمال راکه تکیه‌گاه آن روی خط حقیقی قرار دارد را با $P(R)$ نشان دهیم،پوسته‌ی محدب موردنظر را می‌توانیم به‌صورت زیر توصیف کنیم:

$$co(graph(H)) = \{\int_R (u, H(u))\, d\mu(u) : \mu \in P(u)\} \qquad (۶)$$

که در آن co مخفف معادل لاتین پوسته‌ی محدب است.

قضیه ۲: برای چندجمله‌ای جبری و قهری $H(u)$ ، می‌توان نشان داد که پوسته‌ی محدب گراف H به‌صورت (۶) است و بنابراین مساله‌ی بهینه سازی(۵) می‌تواند در فضای اندازه‌های احتمال به‌صورت زیر تعریف شود:

$$\min_{\mu \in P(R)} \int_R H(u)\, d\mu(u) \qquad (۷)$$

و مجموعه جواب‌های (۷) عبارت است از مجموعه‌ای از اندازه‌های احتمال که تکیه‌گاه آن در مجموعه کمینه‌ی سراسری از $H(u)$ قرار دارد، یعنی $\arg\min(H)$ و زمانی‌که $\arg\min(H)$ تک عضوی $\{u^*\}$ باشد، اندازه‌ی دیراک $\mu^* = \delta_{\mu^*}$ جواب یکتای (۷) است [۲۴و۲۵].

حال فرض کنیم، Λ مجموعه‌ی محدبی از همه‌ی بردارهای در R^3 باشد که اعضایش گشتاورهای جبری از یک اندازه‌ی احتمال که تکیه‌گاه آن در خط حقیقی قرار دارد، باشد لذا با استفاده از ساختار چند جمله‌ای H ، (۷) می‌تواند به مساله‌ی بهینه‌سازی زیر تبدیل شود:

$$\min_{m \in \Lambda} \sum_{i=0}^{2} \theta_i m_i(t) \qquad (۸)$$

حال اگر ما نتوانیم مجموعه‌ی شدنی تشکیل شده توسط بردارهایی که در Λ ، وجود دارند را به‌درستی مشخص کنیم، (۸) صرفاً یک فرمول‌نویسی نظری است و در عمل برای حل مساله کارآمد نیست. از طرفی بستار Λ، متشکل از همه‌ی بردارهایی در R^3 است که اعضای آن تشکیل یک ماتریس نیمه معین مثبت هنکل می‌دهند.

$$\overline{\Lambda}=\left\{(m_i)_{i=0}^{2}\in R^{3}:\begin{pmatrix}1 & m_1\\ m_1 & m_2\end{pmatrix}\succeq 0\right\}$$

بنابراین می‌توانیم مساله‌ی (۷) را به مساله‌ی برنامه ریزی ریاضی زیر تبدیل کنیم:

$$\min_{m\in\overline{\Lambda}}\sum_{i=0}^{2}\theta_i m_i(t)$$
$$\begin{pmatrix}1 & m_1\\ m_1 & m_2\end{pmatrix}\succeq 0 \qquad (۹)$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنیم مساله‌ی (۹) صورت نیمه معین مثبت دارد. در واقع تا این‌جا از کمینه‌سازی سراسری تابع همیلتونی (۵) به مساله‌ی بهینه‌سازی نیمه معین مثبت (۹) در فضای گشتاورها رسیدیم، به‌طوری که مجموعه جواب‌های(۹) متشکل است از مجموعه‌ی همه‌ی بردارهای $m^*\in R^3$، که اعضای آن عبارت است از گشتاورهای جبری از اندازه‌های احتمال که تکیه‌گاه آن‌ها در $\arg\min(H)$ قرار دارد.

نتیجه ۱: اگر H دارای کمینه سراسری یکتای u^* باشد، مساله‌ی (۹) یک جوای یکتای $m^*\in R^3$ دارد که از گشتاورهای جبری از اندازه‌ی دیراک δ_{u^*} تشکیل شده است به طوری که $m_i^*=(u^*)^i \quad i=0,1,2$ [۲۵].

کاری که تا این‌جا انجام شده به‌این صورت است که به‌جای حل مساله‌ی کمینه‌سازی (۵) می توانیم مساله (۹) را حل نماییم. در واقع با جای‌گذاری گشتاورهای مختلف به‌جای توان‌های مختلف u به یک مساله‌ی کمینه‌سازی نیمه معین مثبت در فضای گشتاورها رسیدیم. می‌دانیم که با جای‌گذاری گشتاورهای مختلف به جای توان‌های u در مساله‌ی (۲) با استدلال مشابه به مساله‌ی کنترل بهینه در فضای گشتاوری دست پیدا خواهیم کرد به‌طوری که خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
&Min \quad J(m)=\int_0^1 (x_1^2(t)+x_2^2(t)+m_2(t))\,dt\\
&\qquad D^{\alpha}x_1(t)=-k_1x_1(t)-k_3\ x_1^2(t)+(c_{AF}-x_1(t))\,m_1(t)\\
&\qquad D^{\alpha}x_2(t)=k_1x_1(t)-k_2\ x_2(t)-x_2(t)m_1(t)\\
&\qquad \begin{pmatrix}1 & m_1(t)\\ m_1(t) & m_2(t)\end{pmatrix}\succeq 0 \qquad \forall t\in(0,1)\\
&\qquad x_1(0)=x_{01},\quad x_2(0)=x_{02}
\end{aligned} \qquad (۱۰)$$

حال می خواهیم بدانیم که بین جواب‌های (۲) و (۱۰) چه رابطه‌ای وجود دارد.

قضیه۳ : فرض کنید $u^*(t)$ ، یک کمینه‌کننده برای مساله‌ی کنترل بهینه‌ی کسری (۲) باشد، آنگاه بردار کنترل $m^*(t)$ داده شده به صورت $m_i^*(t)=(u^*(t))^i \quad i=0,1,2$ یک کمینه کننده برای (۱۰) است.

اثبات : مشابه آنچه که در [۲۶] آمده است این قضیه اثبات می‌شود، فقط برای نوشتن شرایط لازم بهینگی از شرایط لازم بهینگی برای کنترل بهینه‌ی کسری مطرح شده در [۴] استفاده می کنیم.

بنابراین از این قضیه می‌توان نتیجه گرفت که اگر $m^*(t)$ یک کمینه‌کننده برای (۱۰) باشد که در شرایط $m_i^*(t)=(u^*(t))^i \quad i=0,1,2$ صدق می کند، آنگاه $m_1^*(t)$ یک کمینه‌کننده‌ی (۲) است.

۳-۵ گسسته‌سازی و تقریب

بعد از آن‌که رابطه‌ی بین مساله‌ی کنترل بهینه‌ی کسری (۲) و (۱۰) مشخص شد، برای حل مساله‌ی (۱۰) ابتدا فاصله‌ی $[0,1]$ را با طول گام $h=\frac{1}{s}$ توسط نقاط $0=t_0,t_1,\ldots,t_s=1$ به s قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم، لذا با انتخاب این نقاط مساله‌ی (۱۰) به صورت زیر تبدیل می شود:

$$\begin{aligned}
&Min \quad J(m)=\sum_{r=0}^{s-1}\int_{rh}^{(r+1)h}(x_1^2(t_r)+x_2^2(t_r)+m_2(t_r))\,dt\\
&D^{\alpha}x_1(t_r)=-k_1x_1(t_r)-k_3\ x_1^2(t_r)+(c_{AF}-x_1(t_r))\,m_1(t_r)\\
&D^{\alpha}x_2(t_r)=k_1x_1(t_r)-k_2\,x_2(t_r)-x_2(t_r)m_1(t_r)\\
&\begin{pmatrix}1 & m_1(t_r)\\ m_1(t_r) & m_2(t_r)\end{pmatrix}\succeq 0 \qquad r=1,2,\ldots,s\\
&x_1(0)=x_{01},\quad x_2(0)=x_{02}
\end{aligned} \tag{۱۱}$$

یکی از کارهایی که در محاسبه‌ی عددی مشتق کسری رایج است، تقریب مشتق کسری ریمان- لیوویل توسط مشتق کسری گرانوالد- لتنیکوف است، یعنی بعد از به‌دست آوردن طول گام h می‌توانیم مشتق کسری موجود در (۱۱) را به‌صورت زیر تقریب بزنیم[۲۷].

$$\begin{aligned}
&D^{\alpha}x_i(t_r)=\frac{1}{h^{\alpha}}\sum_{j=0}^{r}w_j^{(\alpha)}x_i(t_r-jh) \qquad i=1,2\\
&w_0^{(\alpha)}=1,\qquad w_j^{(\alpha)}=(1-\frac{\alpha+1}{j})w_{j-1}^{(\alpha)}\quad j=1,2,\ldots,s,
\end{aligned} \tag{۱۲}$$

بعد از جای‌گذاری روابط (۱۲) به‌جای مشتقات کسری در (۱۱) آخرین کاری که باید انجام دهیم تا مساله‌ی (۱۱) به یک مساله‌ی بهینه‌سازی نیمه معین مثبت تبدیل گردد، استفاده از فرمول انتگرال‌گیری عددی برای محاسبه‌ی انتگرال‌های ظاهر شده در تابع هدف (۱۱) است که ما از روش ذوزنقه‌ای مرکب استفاده می‌کنیم. بنابراین مساله‌ی (۱۱) به یک مساله‌ی بهینه‌سازی نیمه معین مثبت به‌صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned}
&Min \quad J(m)=\frac{h}{2}(x_1^2(t_0)+2\sum_{r=1}^{s-1}x_1^2(t_r)+x_1^2(t_s)+x_2^2(t_0)+2\sum_{r=1}^{s-1}x_2^2(t_r)+x_2^2(t_s)\\
&\qquad\qquad +m_2(t_0)+2\sum_{r=1}^{s-1}m_2(t_r)+m_2(t_s))\\
&\frac{1}{h^{\alpha}}\sum_{j=0}^{r}w_j^{(\alpha)}x_1(t_r-jh)=-k_1x_1(t_r)-k_3\ x_1^2(t_r)+(c_{AF}-x_1(t_r))\,m_1(t_r)\\
&\frac{1}{h^{\alpha}}\sum_{j=0}^{r}w_j^{(\alpha)}x_2(t_r-jh)=k_1x_1(t_r)-k_2\,x_2(t_r)-x_2(t_r)m_1(t_r)\\
&\begin{pmatrix}1 & m_1(t_r)\\ m_1(t_r) & m_2(t_r)\end{pmatrix}\succeq 0 \qquad r=1,2,\ldots,s\\
&x_1(0)=x_{01},\quad x_2(0)=x_{02}
\end{aligned}$$

تذکر: از مزیت‌های این روش نسبت به سایر روش‌هایی که در زمینه‌ی کنترل بهینه‌ی کسری مطرح هستند این است که از لحاظ محاسباتی ساختار ساده‌تری دارد به‌علاوه این‌که بعضی از روش‌های مطرح شده قادر به‌حل مساله‌ی مورد نظر در این مقاله نیستند. برای مثال خواننده را به [۴، ۵، ۷، ۹، ۱۳، ۱۴، ۲۸] ارجاع می‌دهیم، زیرا در این مقالات معادله دیفرانسیل حاکم بر سیستم به‌صورت $D^{\alpha}x(t)=f(t,x(t))+b(t)u(t)$ است در حالی‌که در (۲) شکل کلی‌تری به‌صورت $D^{\alpha}x(t)=f(t,x(t),u(t))$ دارد و یا اگر به روش مطرح شده در [۲۹] مراجعه کنیم، می‌بینیم که اولا دارای محاسبات پیچیده‌ای است و ثانیا قادر به حل مساله‌ی مورد نظر در این مقاله نیست.

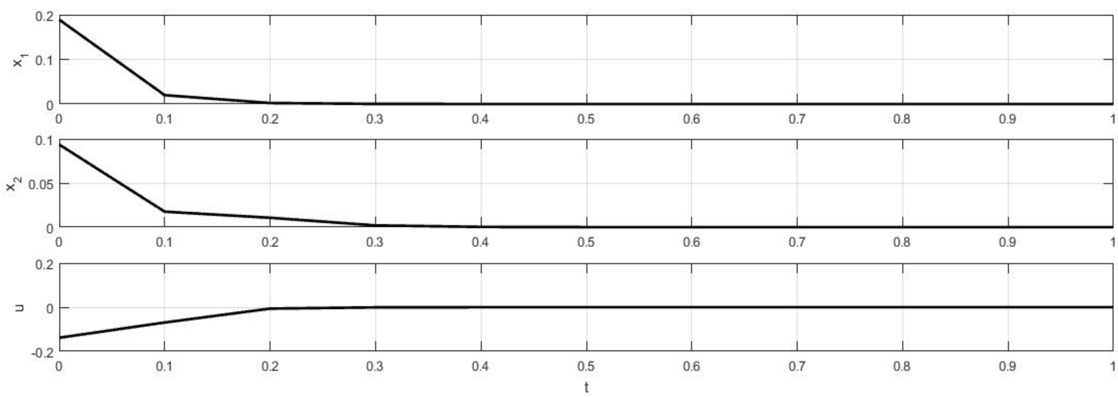
۵-٤ نتایج عددی

در این قسمت با انتخاب پارامترهای موجود در (۲) از [۲۲] به صورتی‌که در جدول ۱ آمده است، به حل مساله‌ی کنترل بهینه‌ی کسری (۲) پرداختیم.

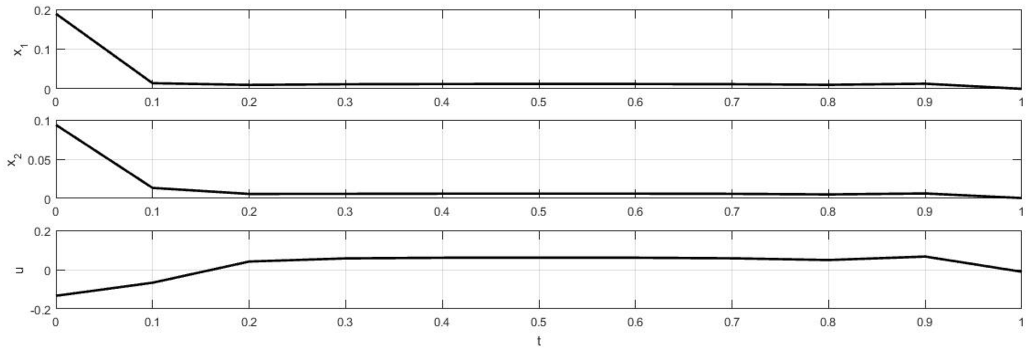
جدول ۱. پارامترهای موجود در (۲)

k_1	k_2	k_3	V	c_{AF}	$x_1(0)$	$x_2(0)$
۵۰	۱۰۰	۱۰	۱	۱۰	۰/۱۸۹	۰/۰۹۳۶

در شکل‌های ۲ و ۳ نتیجه‌ی حاصل ازحل مساله نشان داده شده است. همان‌طور که در شکل‌ها مشاهده می‌شود با انتخاب یک تعداد محدود از نقاط به حالت تعادل پایدار سیستم کنترلی دست یافته‌ایم.



شکل ۲. نتیجه حاصل از انتخاب $S=10$ و $\alpha=1$



شکل ۳. نتیجه حاصل از انتخاب $s = ۱۰$ و $\alpha = ۰/۹۳$

جدول ۲. مقدار تابع هدف و زمان صرف شده جهت انجام محاسبات با نرم افزار GAMS

زمان اجرا (ثانیه)	مقدار تابع هدف (J)	مرتبه مشتق کسری (α)
۰/۰۱۶	۰/۰۱۰۷۷۰	۰/۹
۰/۰۳۱	۰/۰۰۰۴۲۸	۰/۹۳
۰/۰۴۶	۰/۰۰۰۰۸۰	۱

جدول۳. بررسی درستی رابطه قضیه ۳، برای $\alpha = ۰/۹۳$.

t_r	$m_۱(t_r)$	$m_۲(t_r)$	$\left\| m_۲(t_r) - m_۱^۲(t_r) \right\|$
۰/۰	۰/۰۷۶۷۸۲۴۸۴۲	۰/۰۰۵۸۹۵۵۴۹۹	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۲۰
۰/۱	−۰/۰۶۶۶۴۰۹۴۷۰	۰/۰۰۴۴۴۱۰۱۵۸	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۱۷
۰/۲	۰/۰۴۱۱۳۷۹۱۶۰	۰/۰۰۱۶۹۲۳۲۸۱	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۳۲
۰/۳	۰/۰۵۷۴۶۱۷۵۱۷۰	۰/۰۰۳۳۰۱۸۵۲۹	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۸
۰/۴	۰/۰۶۰۶۴۴۲۷۹۰	۰/۰۰۳۶۷۷۷۲۸۶	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۲۴
۰/۵	۰/۰۶۱۲۹۷۲۴۳۸	۰/۰۰۳۷۵۷۳۵۲۱	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۲
۰/۶	۰/۰۶۰۷۷۱۹۱۲۳	۰/۰۰۳۶۹۳۲۲۵۳	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۲۴
۰/۷	۰/۰۵۷۸۸۱۹۷۴۱	۰/۰۰۳۳۵۰۳۲۲۹	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۲۵
۰/۸	۰/۰۴۹۰۹۱۲۴۷۱	۰/۰۰۲۴۰۹۹۵۰۵	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۴۱
۰/۹	۰/۰۶۶۶۶۹۶۱۴۸	۰/۰۰۴۴۴۴۸۳۷۵	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۳۷
۱/۰	−۰/۰۱۰۸۷۱۱۹۷۱	۰/۰۰۰۱۱۸۱۸۲۹	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۲۶

جدول ۲ مقدار تابع هدف و زمان اجرا را نشان می‌دهد و می‌بینیم که برای اجرای برنامه زمان کمی نیاز است و این می تواند نوید بخش این باشد که روش مطرح شده برای مسائل با ابعاد بزرگ کارآیی مناسبی از نظر زمان داشته باشد وبا توجه به قضیه ۳ می‌دانیم که $m_۱(t)$ همان کنترل بهینه است به‌شرطی که $m_۲(t) = m_۱^۲(t)$ لذا جدول ۳ درستی رابطه موجود در قضیه ۳ را نشان می‌دهد.

٦ نتیجه و جمع بندی

در این مقاله بهینه‌سازی نیمه معین مثبت برای حل یک مساله کنترل بهینه‌ی کسری به‌کار گرفته شده است. مدل ریاضی سیستم کنترلی کسری مربوط به فرآیند کنترلی راکتور مخزن همزن پیوسته‌ی همدما بوده است. ابتدا به وسیله‌ی روش گشتاورها یک مساله‌ی معادل برای کنترل بهینه‌ی کسری در نظر گرفته شده به‌دست آمد و سپس با گسسته‌سازی مساله‌ی معادل به‌دست آمده به یک مساله‌ی بهینه‌سازی نیمه معین مثبت دست پیدا کردیم. در گسسته‌سازی برای مشتق کسری ریمان – لیوویل تقریبی از مشتق کسری گرانوالد- لتنیکوف و برای انتگرال موجود در تابع هدف از انتگرال‌گیری ذوزنقه‌ای مرکب استفاده کردیم. نتایج عددی به‌دست آمده نشان از کارایی این روش برای حل مسایلی مشابه دارد. نکته‌ای که در این روش به آن توجه شده است ساختار چندجمله‌ای مدل ریاضی سیستم کنترلی موجود در مساله‌ی کنترل بهینه است، حال اگر مساله‌ی در یکی از شاخه‌های علوم مهندسی مطرح باشد به‌طوری که مدل ریاضی سیستم کنترلی دارای ساختار چند جمله‌ای نباشد آیا بازهم این روش کارآیی دارد؟ می‌تواند در پژوهش‌های بعدی مورد توجه قرار گیرد.

منابع

[۲۱] تواضعی، م. ص.، توکلی کاخکی، م.، (۱۳۹۴). سیستم‌ها و کنترل کننده‌های مرتبه کسری، انتشارات دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی.

[۲۸] حسن‌نژاد، س.، حیدری، ع.، (۱۳۹۳). حل دسته‌ای از مسایل کنترل بهینه با استفاده از الگوریتم ژنتیک ترکیبی. مجله تحقیق در عملیات و کاربردهای آن، ۳ (۴۲)، ۱۲۵–۱۳۷.

[۲۹] محمد زاده، ا.، پریز، ن.، حسینی ثانی، ک.، جاجرمی، ا.، (۱۳۹۵). کنترل بهینه دسته ای از سیستم های غیرخطی مرتبه کسری با استفاده از سری مودال توسعه یافته و استراتژی برنامه ریزی خطی. مجله کنترل، ۱۰ (۱)، ۵۱–۶۴.

[1] Gregory, J. C., Lin, C., (1992). Constrained Optimization in the Calculus of Variations and Optimal Control Theory. Van Nostrand-Reinhold.

[2] Hestenes, M. R., (1966). Calculus of Variations and Optimal Control Theory. John Wiley and Sons, New York.

[3] Tricaud, C., Chen, Y., (2012). Optimal Mobile Sensing and Actuation Policies in Cyberphysical Systems. Springer-Verlag London Limited.

[4] Agrawal, O. P., (2004). A general formulation and solution scheme for fractional optimal control Problems. Nonlinear Dyn, 38 (1–2), 323–337.

[5] Agrawal, O. P., (2006). A formulation and numerical scheme for fractional optimal control problems. J Vibration Control, 14 (9–10), 1291–1299.

[6] Tangpong, X. W., Agrawal, O. P., (2009). Fractional optimal control of a continum system. ASME J Vibration Acoustics, 131(2), 21012-21018.

[7] Agrawal, O. P., (2008). A quadratic numerical scheme for fractional optimal control problems. ASME J Dynamic Syst, Measurement, Control, 130 (1), 011010.1–011010.6.

[8] Jelicic, D. Z., Petrovacki, N., (2009). Optimality conditions and a solution scheme for fractional optimal control problems, Struct Multidisciplinary Opt, 38(6), 571–581.

[9] Baleanu, D., Defterli, O., Agrawal, O.P.,(2009) A central difference numerical scheme for fractional optimal control problems. J Vibration Control, 15(4), 583–597.

[10] Agrawal, O. P., Baleanu, D., (2007). A hamiltonian formulation and a direct numerical scheme for fractional optimal control problems. J Vibration Control, 13(9–10), 1269–1281.

[11] Frederico, G. S. F., Torres, D. F. M., (2008). Fractional optimal control in the sense of caputo and the fractional noethers theorem. Int Math Forum, 3(10), 479–493.

[12] Yousefi, S. A., Lotfi, A., Dehghan, M., (2011). The use of a Legendre multiwavelet collocation method for solving the fractional optimal control problems. J Vibration Control, 17(13), 2059–2065.
[13] Alipour, M., Rostamy, D., Baleanu, D., (2013). Solving multi-dimensional fractional optimal control problems with inequality constraint by Bernstein polynomials operational matrices. Journal of Vibration and Control, 19(16), 2523-2540.
[14] Keshavarz1, E., Ordokhani, Y., Razzaghi, M., (2015). A numerical solution for fractional optimal control problems via Bernoulli polynomials. J Vibration Control, DOI: 10.1177/1077546314567181.
[15] Podlubny, I., (1999). Fractional Differential Equations. Academic Press, San Diego, CA.
[16] Dehghan, R., keyanpour, M., (2015). A numerical approximation for delay fractional optimal control problems based on the method of moments. IMA Journal of Mathematical Control and Information, doi:10.1093/imamci/dnv032.
[17] Lasserre, J., (2010). Moment Positive Polynomials and Their Applications. Imperial College Press Optimization Series.
[18] Henrion, D., (2013). Optimization On Linear Matrix Inequalities for Polynomial Systems Control. University of Toulouse France. [Online] Available: http://homepages.laas.fr/henrion/.
[19] Mojica-Nava, E., Quijano, N., Rakoto-Ravalontsalama, N., (2014). A polynomial approach for optimal control of switched nonlinear systems. Int. J. Robust Nonlinear Control 24, 1797-1808.
[20] Magin, R. L., (2006). Fractional Calculus in Bioengineering. Begell House Publishers, Redding,CT.
[22] Kuntanapreedaa, S., Marusak, P., (2012). Nonlinear extended output feedback control for CSTRs with van de Vusse reaction. Computers and Chemical Engineering, 41, 10– 23.
[23] Craven, B. D., (1995). Control and Optimization. Chapmann and Hall, Englewood Cliffs.
[24] Fattorini, H. O., (1999). Infinite Dimensional Optimization Theory and Optimal Control. Cambridge University Press, Cambridge.
[25] Lasserre, J., (2001). Global optimization with polynomials and the problem of moments. SIAM J. Optim, 11, 796–817.
[26] Meziat, R., Patino, D., Pedregal, P., (2007). An alternative approach for non-linear optimal control problems based on the method of moments. Comput Optim Appl, 38, 147—171.
[27] Diethelm, K., Ford, N.J., Freed, A.D., Luchko, Y., (2005). Algorithms for the fractional calculus: A selection of numerical methods. Computer methods in applied mechanics and engineering, 194, 743-773.