

## استوارسازی مدل‌های DEA برای شناسایی واحدهای دارای بدترین عملکرد

علی اصغر عرب مالدار\*<sup>۱</sup>، فرانتک حسین زاده سلجوقی<sup>۲</sup>

۱- دانشجوی دکتری، دانشگاه سیستان و بلوچستان، گروه ریاضی کاربردی، زاهدان، ایران

۲- استادیار، دانشگاه سیستان و بلوچستان، گروه ریاضی کاربردی، زاهدان، ایران

رسید مقاله: ۲۰ اسفند ۱۳۹۵

پذیرش مقاله: ۸ مرداد ۱۳۹۶

### چکیده

مدل‌های کلاسیک تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) هر یک از واحدهای تصمیم‌گیرنده (DMU) را براساس مطلوب‌ترین حالت برای شناسایی واحدهای دارای بهترین عملکرد مورد ارزیابی قرار می‌دهند. در واقع، مدل‌های کلاسیک DEA کارایی هر واحد را در مقایسه با کاراترین واحد اندازه‌گیری می‌کنند و چون در این روش کارایی نسبی محاسبه می‌شود؛ بنابراین حداقل یکی از واحدها روی مرز کارایی قرار دارد. در مقابل مدل‌های DEA کلاسیک، مدل‌های دیگری وجود دارند که DMUها را براساس نامطلوب‌ترین حالت مورد ارزیابی قرار می‌دهند و با تشکیل مرز ناکارایی، واحدهای دارای بدترین عملکرد را شناسایی می‌کنند. در این مقاله با استفاده از رویکرد بهینه‌سازی استوار، دو مدل برای ارزیابی عملکرد DMUها تحت نامطلوب‌ترین حالت ارائه می‌شود و هدف به‌دست آوردن واحدهای دارای بدترین عملکرد با داده‌های دارای عدم قطعیت و بازه‌ای می‌باشد. همچنین برای تعیین واحدهای دارای بدترین عملکرد، مفهوم ابرکارایی را به کار بردیم و آن را ابرناکارایی نامیدیم. با استفاده از دو مثال عددی قابلیت مدل‌های پیشنهادی در ارائه رتبه‌بندی مورد اطمینان و شناسایی واحدهای دارای بدترین عملکرد مورد بررسی قرار گرفته است.

**کلمات کلیدی:** تحلیل پوششی داده‌ها، بهینه‌سازی استوار، عدم قطعیت، رتبه‌بندی، بدترین عملکرد.

### ۱ مقدمه

تحلیل پوششی داده‌ها<sup>۲</sup> (DEA) روشی ناپارامتریک براساس برنامه‌ریزی خطی است که متشکل از چندین مجموعه مشابه از ورودی‌ها و خروجی‌ها برای اندازه‌گیری کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده<sup>۳</sup> (DMU) متجانس استفاده می‌شود. برای اولین بار چارنز، کوپر و رودز (CCR) [۱] مدل DEA تحت بازده به مقیاس ثابت را ارائه کردند و سپس بنکر، چارنز و کوپر<sup>۴</sup> (BCC) [۲] مدل DEA تحت بازده به مقیاس متغیر را ارائه نمودند. مدل‌های DEA را

\* عهده‌دار مکاتبات

آدرس الکترونیکی: Aliasghar.Arabmaldar@gmail.com

<sup>2</sup> Data envelopment analysis

<sup>3</sup> Decision making units

<sup>4</sup> Banker, Charnes and Cooper

می‌توان به طور کلی به دو دسته مدل‌های شعاعی و غیرشعاعی طبقه‌بندی کرد. مدل‌های DEA کلاسیک را می‌توان برای شناسایی واحدهای دارای بهترین عملکرد<sup>۱</sup> در مطلوب‌ترین (بهترین) حالت مورد استفاده قرار داد. واحدهای کارا دارای مقدار کارایی ماکزیمم یک می‌باشند و روی مرز کارایی قرار دارند. برای رتبه‌بندی واحدهای کارا، اندرسن و پترسن [۳] روش ابرکارایی در DEA را پیشنهاد کردند. در روش ارایه شده توسط آن‌ها واحدهای روی مرز کارایی می‌توانند مقادیر کارایی بیش تر از یک به دست آورند که با حذف واحد تحت ارزیابی از مجموعه واحدها نتیجه می‌شود. برای شناسایی واحدهای دارای عملکرد بد، مانند بنگاه‌های ورشکسته در نامطلوب‌ترین (بدترین) حالت، رویکرد مشابهی به نام ارزیابی بدترین کارایی (ناکارایی) وجود دارد که از مرز تولید ناکارا برای تعیین بدترین مقدار کارایی نسبی ممکن که می‌توان به هر DMU اختصاص داد، استفاده می‌کند. بنابراین DMUهای واقع شده بر مرز تولید ناکارا به عنوان ناکارای بدبینانه معرفی می‌شوند [۴].

کاربردهایی از روش‌های DEA براساس بدترین حالت عملکرد را می‌توان در تحقیقات انجام گرفته توسط پارادی و همکاران [۵]، شائو و لی [۶] و لیو و چن [۷] یافت. بعد از آن که پارادی و همکاران [۵] برای اولین بار مفهوم DEA بدترین عملکرد<sup>۲</sup> (WP-DEA) را پیشنهاد کردند، این مفهوم برای مواجهه با داده‌های نادقیق توسط شائو و لی [۶] به کار برده شد. سپس لیو و چن [۷] مدل شعاعی را براساس مرز بدترین عملکرد DEA توسعه دادند. همچنین لیو و چن [۸] مدلی براساس اندازه‌گیری ناکارایی براساس متغیرهای کمکی را برای یافتن واحدهای دارای بدترین عملکرد پیشنهاد دادند. عزیزی و آجیرلو [۹] مدل‌هایی را برای اندازه‌گیری بدترین عملکرد واحدهای تصمیم‌گیری در حضور عوامل غیراختیاری و داده‌های نادقیق براساس مدل‌های ارایه شده توسط وانگ و همکاران [۱۰] که در مورد بررسی کارایی بازه‌ای مدل‌های DEA است، ارایه کردند. در واقع WP-DEA عملکرد شرکت‌ها را در بدترین حالت مورد ارزیابی قرار می‌دهد. این مفهوم روش مناسبی برای مساله ارزیابی ریسک سرمایه‌گذاری است که در آن نیاز به شناسایی شرکت‌هایی با بدترین عملکرد (مستعد ورشکستگی) است. در واقع با این مفهوم می‌توان برای جلوگیری از ورشکستگی شرکت‌های دارای بدترین عملکرد، پیشگویی انجام داد و تصمیمات بهتری برای بهبود عملکرد این واحدها اتخاذ کرد.

در دنیای واقعی با موقعیت‌هایی مواجه می‌شویم که پارامترها دارای عدم قطعیت هستند و به کارگیری مدل‌های DEA کلاسیک در این موقعیت‌ها منجر به رتبه‌بندی غیرقابل اعتماد می‌شود. رویکرد بهینه‌سازی استوار برای حل مسایل برنامه‌ریزی خطی با داده‌های دارای عدم قطعیت، اولین بار توسط سویستر [۱۱] پیشنهاد شده است. تحت این رویکرد، تصمیم‌گیرنده به دنبال جوابی بهینه برای مقادیر اسمی داده‌ها است که با در نظر گرفتن تغییرات در داده‌ها، جواب به دست آمده همچنان شدنی و نزدیک بهینه باقی بماند. بن-تال و نمیروسکی [۱۲ و ۱۳] نشان دادند که حتی انحرافی کوچک در محدودیت‌ها باعث تغییری بزرگ در جواب خواهد شد. روش‌های زیادی، که رویکرد بهینه‌سازی استوار نامیده می‌شود، برای مواجهه با مسایلی که دارای عدم قطعیت در پارامترهای خود هستند در [۱۴] پیشنهاد شده است. ال-قویی و لبرت [۱۵]، و ال-قویی و همکاران [۱۶] رویکرد بهینه‌سازی استوار

<sup>1</sup> Best-Practice

<sup>2</sup> Worst-practice DEA

را برای مسایل برنامه‌ریزی خطی با مجموعه‌های دارای عدم قطعیت بیضوی به کاربردند. برتسیماس و سیم [۱۷] روشی را پیشنهاد دادند که امکان انعطاف‌پذیری و تعامل بین بدترین وضعیت و هزینه وارد شده بر اثر این آشفتگی در داده‌ها بر مقدار تابع هدف را می‌دهد. در ادامه، مروری در مورد کارهای انجام گرفته در زمینه وجود داده‌های غیرقطعی در مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها که با استفاده از رویکرد بهینه‌سازی استوار انجام شده‌اند، آورده شده است.

وانگ و وی [۱۸]، مواردی را بررسی کردند که با وجود داده‌های غیرقطعی در مدل‌های DEA رتبه‌بندی‌ها و مقادیر کارایی به دست آمده قابل اطمینان نیستند و سپس براساس رویکرد بن-تال و نمیروسکی [۱۳] و با در نظر گرفتن مدل‌های DEA در ماهیت‌های ورودی و خروجی، مدل‌هایی استوار برای مواجهه چنین مسایلی را ارائه کردند. سجادی و عمرانی [۱۹] با در نظر گرفتن عدم قطعیت در پارامترهای خروجی و براساس رویکرد بن-تال و نمیروسکی [۱۳] و برتسیماس و سیم [۱۷] دو مدل DEA استوار برای فرم مضربی CCR پیشنهاد دادند. آن‌ها از این روش برای تخمین کارایی و به دست آوردن رتبه‌بندی برای شرکت‌های توزیع برق در ایران استفاده کردند و آن را با نتایج به دست آمده با مدل تحلیل مرز تصادفی<sup>۱</sup> (SFA) مقایسه کردند. سجادی و عمرانی [۲۰] همچنین مدل DEA استوار بوت استرپ (BRDEA)<sup>۲</sup> را با در نظر گرفتن عدم قطعیت در داده‌های خروجی برای شرکت‌های ارتباطی در ایران پیشنهاد دادند. در این روش ابتدا مقادیر کارایی استوار محاسبه شده و سپس با تکنیک بوت استرپ مقادیر کارایی و رتبه‌بندی‌های به دست آمده تصحیح می‌شوند. شکوهی و همکاران [۲۱] مدل‌های DEA استواری را ارائه کردند که عدم قطعیت را برای ورودی و خروجی به صورت داده‌های بازه‌ای در نظر گرفتند و می‌توان آن‌ها را به عنوان روشی جایگزین برای مدل‌های DEA بازه‌ای و فازی مورد استفاده قرار داد. سجادی و همکاران [۲۲] مدل DEA ابر کارایی<sup>۳</sup> را براساس رویکرد بن-تال و نمیروسکی [۱۳] که مدلی مخروطی درجه دوم می‌باشد ارائه کردند و از این روش برای رتبه‌بندی واحدهای گاز استان‌های ایران استفاده کردند. سجادی و همکاران [۲۳] مدل DEA تعاملی استوار برای تعیین اهداف جایگزین در شرکت‌های توزیع برق ایران معرفی کردند. عمرانی [۲۴] مدل DEA استوار برای تعیین مجموعه وزن‌های مشترک با در نظر گرفتن وجود عدم قطعیت که به طور همزمان در ورودی‌ها و خروجی‌های مساله واحدهای تحت ارزیابی موجود باشد، معرفی کردند. چونگ-چن لو [۲۵] با در نظر گرفتن مدل BCC و براساس رویکرد بهینه‌سازی استوار بن-تال و نمیروسکی [۱۳] و برتسیماس و سیم [۱۷] دو مدل استوار برای تعیین ترکیب‌های کارا از عملگرهای الگوریتمی پیشنهاد دادند. همچنین صلاحی و همکاران [۲۶] با فرض بازده به مقیاس ثابت مدل استوار تحلیل پوششی داده‌ها ارائه کردند و اخیراً نیز صلاحی و همکاران [۲۷] هم‌تای استوار مدل CCR در فرم پوششی را پیشنهاد کردند و نشان دادند که این مدل مشابه با هم‌تای خوشبینانه مدل مضربی CCR است. سپس، از رویکرد پیشنهاد شده برای به دست آوردن وزن‌های مشترک استفاده کردند.

<sup>1</sup> Stochastic Frontier Analysis

<sup>2</sup> Bootstrapped Robust Data Envelopment Analysis

<sup>3</sup> Super-Efficiency

ادامه مقاله به صورت زیر بخش‌بندی می‌شود. در بخش ۲ مدل‌های مضربی و پوششی برای ارزیابی ناکارایی مدل CCR را بیان می‌کنیم. در بخش‌های ۳ و ۴ مباحث اصلی مقاله ارائه شده است. در بخش ۳، جزییات ریاضی مدل استوار شده براساس رویکرد برتسیماس و سیم [۱۷] برای ارزیابی عملکرد در بدترین حالت برای مدل پوششی CCR ارائه شده است. همچنین در بخش ۴ با استفاده از رویکرد برتسیماس و سیم [۱۷] مدلی دیگر برای ارزیابی ناکارایی با داده‌های بازه‌ای ارائه شده است. در بخش ۵ با استفاده از نتایج عددی قابلیت و کاربردی بودن مدل‌های ارائه شده در این مقاله برای تعیین واحدهای ناکارا نشان داده شده است.

## ۲ مدل CCR برای ارزیابی بدترین عملکرد داده‌های دقیق و بازه‌ای

برای ارائه فرم برنامه‌ریزی ریاضی بدترین عملکرد مساله برنامه‌ریزی خطی کسری زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{Min } e_o = \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{ro}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{io}} \quad (1)$$

*s.t.*

$$\frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}} \geq 1, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$u_r, v_i \geq 0, \quad r = 1, \dots, s, \quad i = 1, \dots, m.$$

که در آن  $x_{ij}$  و  $y_{rj}$  به ترتیب ورودی  $i$ ام و خروجی  $r$ ام از  $DMU_j$  ( $j=1, \dots, n$ ) می‌باشند. محدودیت‌ها در مدل (۱) بیان می‌کنند که نسبت مجموع وزن‌دار خروجی‌ها به مجموع وزن‌دار ورودی‌ها برای هر  $DMU$  باید بزرگ‌تر از یک باشند. در واقع جواب‌های بهینه  $(\mathbf{v}^*, \mathbf{u}^*)$  که از مدل (۱) به دست می‌آیند نامطلوب‌ترین وزن‌ها برای  $DMU_o$  در حالت می‌نیم‌سازی را نتیجه می‌دهند. به هر یک از  $DMU$ ها نامطلوب‌ترین وزن‌ها اختصاص می‌یابد که مقادیرشان برای  $DMU$ های متفاوت، متمایز می‌باشند. مدل برنامه‌ریزی کسری (۱) را می‌توان با استفاده از تبدیل چارنز و کوپر [۲۸] به مدل برنامه‌ریزی خطی زیر (فرم مضربی) تبدیل کرد:

$$\text{Min } e_o = \sum_{r=1}^s u_r y_{ro} s \quad (2)$$

*s.t.*

$$\sum_{i=1}^m v_i x_{io} = 1,$$

$$\sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \geq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$u_r, v_i \geq 0, \quad r = 1, \dots, s, \quad i = 1, \dots, m.$$

برخلاف مدل‌های اصلی DEA، در مدل‌های DEA بازه‌ای فرض می‌شود که برخی مقادیر ورودی‌های  $x_{ij}$  و خروجی‌های  $y_{rj}$  نامعلوم هستند و تنها می‌دانیم که مقادیر ورودی و خروجی در بازه‌های معینی قرار دارند؛ یعنی  $x_{ij} \in [x_{ij}^L, x_{ij}^U]$  و  $y_{rj} \in [y_{rj}^L, y_{rj}^U]$ ، که در آن کران‌های بالا و پایین بازه‌ها معلوم می‌باشند و فرض می‌شود که  $y_{rj}^L > 0$  و  $x_{ij}^L > 0$ .

$$\begin{aligned} \text{Min } \theta_o^L &= \sum_{r=1}^s u_r y_{ro}^L \\ \text{s.t.} & \\ \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^U - \sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^L &\leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\ \sum_{i=1}^m v_i x_{io}^U &= 1, \\ u_r, v_i &\geq 0, \quad r = 1, \dots, s, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \text{Min } \theta_o^U &= \sum_{r=1}^s u_r y_{ro}^U \\ \text{s.t.} & \\ \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^U - \sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^L &\leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\ \sum_{i=1}^m v_i x_{io}^L &= 1, \\ u_r, v_i &\geq 0, \quad r = 1, \dots, s, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (4)$$

در مدل‌های (۳) و (۴)،  $\theta_o^L$  بدترین کارایی نسبی تحت نامطلوب‌ترین شرایط و  $\theta_o^U$  بدترین کارایی نسبی تحت مطلوب‌ترین شرایط می‌باشند. در واقع این دو مقدار بازه‌ی کارایی بدینانه  $[\theta_o^L, \theta_o^U]$  را می‌سازند. خوانندگان علاقه‌مند برای اطلاعات بیشتر در مورد کارایی بازه‌ای به وانگ و همکاران [۱۰] ارجاع داده می‌شوند. با معرفی متغیرهای دوگان برای محدودیت تساوی و محدودیت‌های نامساوی در مدل (۲) به ترتیب با  $\theta_o$  و  $\lambda_j (j = 1, \dots, n)$ ، فرم پوششی دوگان مدل (۲) برای ارزیابی ناکارایی واحدها به صورت زیر به دست می‌آید که آن را با نام (WP-DEA) نشان می‌دهیم:

(WP - DEA) :

$$\text{Max } \theta^* = \theta_o$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j \geq \theta_o x_{io}, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$\sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j \leq y_{ro}, \quad r = 1, \dots, s,$$

$$\lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \theta_o \text{ free.}$$
(5)

**قضیه ۱.** مقدار  $\theta^*$  در مدل (5) همواره بزرگتر از یا مساوی یک می‌باشد.

**برهان.** جواب شدنی  $\theta_o = 1$ ،  $\lambda_o = 1$  و  $\lambda_j = 0$  ( $j \neq o, j = 1, \dots, n$ ) را در نظر بگیرید. از آنجایی که به ازای این جواب شدنی مقدار بهینه  $\theta$  برابر یک است، بنابراین از این جواب شدنی نتیجه می‌شود که جواب بهینه مدل (5) همواره بزرگتر از یا مساوی یک می‌باشد. □

در مورد مدل (5) ذکر این نکته ضروری است که مقدار بهینه یک نشان دهنده واحدهای ناکارا است (ناکارایی کامل) که روی مرز ناکارایی قرار دارند و هرچه این مقدار از یک بیش تر باشد به معنای کاهش ناکارایی واحد تحت ارزیابی می‌باشد. از آنجایی که در مدل (5) چند DMU می‌توانند مقدار یک را بگیرند؛ بنابراین نمی‌توانند واحدها را به طور کامل رتبه‌بندی کنند. برای غلبه بر این مشکل، در اینجا از روش پیشنهاد شده توسط اندرسن و پترسن [۳] برای مدل‌های کارایی که منجر به مفهوم ابر کارایی شده است استفاده می‌کنیم. در این مقاله این مفهوم برای مدل ناکارایی را ابر ناکارایی می‌نامیم. مقدار ناکارایی از این مدل با حذف واحد تحت ارزیابی از مجموعه واحدها به دست می‌آید. مدل حاصل به صورت زیر نتیجه می‌شود:

(WP - SDEA) :

$$\text{Max } \theta^* = \theta_o$$

s.t.

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq o}}^n x_{ij} \lambda_j \geq \theta_o x_{io}, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq o}}^n y_{rj} \lambda_j \leq y_{ro}, \quad r = 1, \dots, s,$$

$$\lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \theta_o \text{ free.}$$
(6)

مدل (6) برای رتبه‌بندی واحدهای ناکارا که روی مرز ناکارایی قرار دارند و از مدل (5) نتیجه شده‌اند، معرفی شده است. مقادیر ناکارایی حاصل از مدل (6) از مقادیر ناکارایی مدل (5) کم‌تر هستند و برای واحدهای روی مرز ناکارایی، مقدار ناکارایی با استفاده از مدل (6) کم‌تر از یک می‌شوند.

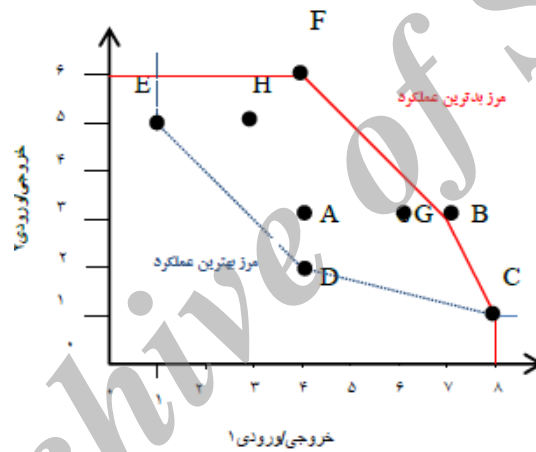
برای نشان دادن تفاوت بین مرز بهترین عملکرد و بدترین عملکرد از یک مثال عددی با دو ورودی و یک

خروجی که داده‌های آن در جدول ۱ آمده است و از [۸] گرفته شده است استفاده می‌کنیم.

جدول ۱. داده‌های مثال

شاخص‌ها	نماد	DMU							
		A	B	C	D	E	F	G	H
ورودی ۱	$x_1$	۴	۷	۸	۴	۱	۴	۶	۳
ورودی ۲	$x_2$	۳	۳	۱	۲	۵	۶	۳	۵
خروجی	$y$	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱

مرز بهترین عملکرد و بدترین عملکرد در شکل ۱ نشان داده شده‌اند. براساس مرز بهترین عملکرد واحدهای C، D و E که مرز کارایی را تشکیل می‌دهند، به عنوان واحدهای کارا تشخیص داده می‌شوند (خط نقطه چین) و واحدهای A، B، F، G و H در مقایسه با واحدهای کارا، کارایی کم‌تری دارند. همچنین براساس مرز بدترین عملکرد B، C و F به عنوان واحدهای ناکارا، مرز ناکارایی را تشکیل می‌دهند (خط توپر) و DMU های A، E، G و H کارایی بیش‌تری دارند.



شکل ۱. مرز بهترین و بدترین عملکرد برای داده‌های جدول ۱

مدل‌های ارزیابی شده در این بخش برای مسائلی می‌باشند که داده‌های آن قطعی هستند. در بخش بعدی مدل‌هایی را ارزیابی می‌کنیم که قابلیت برخورد با مسائلی را دارند که در آن‌ها پارامترهای دارای عدم قطعیت وجود دارند. برای این کار از رویکرد بهینه‌سازی استوار برای مسایل برنامه‌ریزی خطی ارزیابی شده توسط برتسیماس و وسیم [۱۷] استفاده می‌کنیم.

### ۳ بهینه‌سازی استوار برای ارزیابی بدترین عملکرد مدل پوششی DEA

در این بخش همتای استوار مدل (۵) را بر اساس رویکرد برتسیماس و وسیم [۱۷] ارزیابی می‌دهیم. فرض کنید  $J_i$  و  $J_r$  به ترتیب مجموعه ضرایب  $x_{ij}$  ( $i \in J_i$ ) و  $y_{rj}$  ( $r \in J_r$ ) متناظر با محدودیت‌های ورودی و خروجی در مدل (۳) باشند که دارای عدم قطعیت هستند؛ یعنی داده‌های ورودی و خروجی  $(i, r \in J_i, J_r)$   $\tilde{x}_{ij}, \tilde{y}_{rj}$  که در آن  $J_r = \{r | \hat{y}_{rj} > 0\}$  و  $J_i = \{i | \hat{x}_{ij} > 0\}$  می‌باشند، مقادیر خود را براساس توزیعی متقارن و با میانگین معادل

با مقادیر اسمی  $x_{ij}$  و  $y_{ij}$  به ترتیب در بازه‌های  $\tilde{x}_{ij} \in [x_{ij} - \hat{x}_{ij}, x_{ij} + \hat{x}_{ij}]$  و  $\tilde{y}_{ij} \in [y_{ij} - \hat{y}_{ij}, y_{ij} + \hat{y}_{ij}]$  اختیار می‌کنند. متناظر با داده‌های دارای عدم قطعیت  $\tilde{x}_{ij}$  یا  $(\tilde{y}_{ij})$ ، متغیر تصادفی  $\eta_{ij} = (\tilde{x}_{ij} - x_{ij}) / \hat{x}_{ij}$  یا  $(\eta_{ij})$  را که از توزیعی نامعلوم اما متقارن پیروی می‌کنند تعریف می‌کنیم که مقادیرشان در بازه‌ی  $[-1, 1]$  قرار دارد. برای هر یک از  $i = 1, \dots, m$  (یا  $r = 1, \dots, s$ ) پارامترهای  $\Gamma_i$  یا  $(\Gamma_r')$  که لزوماً صحیح نیستند را معرفی می‌کنیم که مقدار آن‌ها در بازه  $[0, |J_i|]$  یا  $([0, |J_r|])$  قرار دارند. ایده معرفی  $(\Gamma_r')$  این است که اغلب غیرممکن است که همه ضرایب دارای عدم قطعیت به طور همزمان بدترین مقدار خود را در بازه مورد نظر بگیرند، بهتر است تا در محدودیت متناظر، پارامترهای دارای عدم قطعیت حداکثر به تعداد  $(\Gamma_i)$  یا  $(\Gamma_r')$  بدترین مقدار خود را بگیرند و یک پارامتر، مثلاً  $t$ ، به مقدار  $(\Gamma_i - [\Gamma_i])\hat{x}_{it}$  یا  $(\Gamma_r' - [\Gamma_r'])\hat{y}_{rt}$  تغییر کند، که در آن  $[\ ]$  به معنای جز صحیح است. به عبارت دیگر تنها نیاز است که زیرمجموعه‌ای از ورودی‌ها و خروجی‌ها تغییر کنند تا جواب استوار بهینه تعریف شده توسط برتسیماس و سیم [۱۷] جواب موثری را نتیجه دهد. بنابراین با در نظر گرفتن روش بهینه‌سازی استوار معرفی شده توسط برتسیماس و سیم [۱۷]، می‌توان مدل (۵) را به صورت زیر نوشت:

$$\text{Max } \theta^* = \theta,$$

s.t.

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq o}}^n x_{ij} \lambda_j + (\lambda_o - \theta_o)x_{io} - \beta_i(\lambda, \theta, \Gamma_i) \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad (7)$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq o}}^n y_{rj} \lambda_j + (\lambda_o - 1)y_{ro} + \beta_r(\lambda, \Gamma_r) \leq 0, \quad r = 1, \dots, s,$$

$$\lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad \theta_o \text{ free.}$$

که در آن

(۸)

$$\beta_i(\lambda, \theta, \Gamma_i) = \text{Max}_{\{S_i \cup \{t_i\} | S_i \subset J_i, |S_i| = \Gamma_i, t_i \in J_i \setminus S_i\}} \left\{ \sum_{j \neq o \in S_i} \lambda_j \hat{x}_{ij} + (\Gamma_i - [\Gamma_i]) \lambda_{t_i} \hat{x}_{it_i} + (\lambda_o - \theta_o) \hat{x}_{io} + (\Gamma_i - [\Gamma_i]) (\lambda_o - \theta_o) \hat{x}_{io} \right\}$$

و با فرض صحیح بودن  $\Gamma_i$  رابطه (۸) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\beta_i(\lambda, \theta, \Gamma_i) = \text{Max}_{\{S_i | S_i \subset J_i, |S_i| = \Gamma_i\}} \left\{ \sum_{j \neq o \in S_i} \lambda_j \hat{x}_{ij} + (\lambda_o - \theta_o) \hat{x}_{io} \right\} \quad (9)$$

که به عنوان تابع محافظت شناخته می‌شود. به طور مشابه می‌توان تابع محافظت را برای محدودیت‌های خروجی تعریف کرد.



ذکر این نکته ضروری است که اگر  $\Gamma_i = 0$  آنگاه  $\beta_i(\lambda, \theta, \Gamma_i) = 0$  و مدل (۵) نتیجه می‌شود. همچنین اگر،  $\Gamma_i = |J_i|$  آنگاه حداکثر محافظه کاری در مقابل پارامترهای عدم قطعیت را داریم که معادل با روش سویستر [۱۱] است، بنابراین با تغییر  $\Gamma_i \in [0, |J_i|]$ ، در واقع انعطاف پذیری روش پیشنهاد شده توسط برتسیماس و سیم [۱۷] برای محافظت جواب مساله در مقابل عدم قطعیت را می‌توان تنظیم کرد. توجه داریم که مساله (۷) یک مساله برنامه‌ریزی غیرخطی می‌باشد. قضیه زیر نشان می‌دهد که مساله (۷) را می‌توان به یک مساله برنامه‌ریزی خطی تبدیل کرد.

**قضیه ۲.** مدل (۷) معادل با مساله برنامه‌ریزی خطی زیر می‌باشد:

(WP - DEA - BS) :

$$\text{Max } \theta_R^* = \theta_o^R$$

s.t.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j - \Gamma_i p_i - \sum_{j=1}^n q_{ij} &\geq x_{io} \theta_o^R, & i = 1, \dots, m, \\ \sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j + \Gamma_r p_r + \sum_{j=1}^n q_{rj} &\leq y_{ro}, & r = 1, \dots, s, \\ p_i + q_{ij} &\geq \hat{x}_{ij} \lambda_j, & i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n, \quad j \neq o, \\ p_i + q_{io} &\geq \hat{x}_{io} \beta_{io}, & i = 1, \dots, m, \\ p_r + q_{rj} &\geq \hat{y}_{rj} \lambda_j, & r = 1, \dots, s, \quad j = 1, \dots, n, \quad j \neq o, \\ p_r + q_{ro} &\geq \hat{y}_{ro} \alpha_{ro}, & r = 1, \dots, s, \\ -\beta_{io} &\leq \lambda_o - \theta_o \leq \beta_{io}, & i = 1, \dots, m, \\ -\alpha_{ro} &\leq \lambda_o - 1 \leq \alpha_{ro}, & r = 1, \dots, s, \\ \lambda_j, \alpha_{ro}, \beta_{io} &\geq 0, & i = 1, \dots, m, \quad r = 1, \dots, s, \quad j = 1, \dots, n \\ p_i, p_r, q_{ij}, q_{rj} &\geq 0, & i = 1, \dots, m, \quad r = 1, \dots, s, \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (10)$$

**بوهان.** بدون از دست دادن کلیت، محدودیت‌های متناظر با ورودی‌ها را در مدل (۷) در نظر می‌گیریم. برای بردارهای معلوم  $\lambda^*$  و  $\theta^*$ ، تابع  $\beta_i(\lambda^*, \theta^*, \Gamma_i)$  در مدل (۸) معادل با تابع هدف مساله برنامه‌ریزی خطی زیر می‌باشد:

$$\beta_i(\lambda^*, \theta^*, \Gamma_i) = \text{Max} \sum_{j \neq 0 \in J_i} \hat{x}_{ij} |\lambda_j^*| \eta_{ij} + \hat{x}_{io} |(\lambda_o^* - \theta_o^*)| \eta_{io}$$

*s.t.*

$$\sum_{j \neq 0 \in J_i} |\eta_{ij}| + |\eta_{io}| \leq \Gamma_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (11)$$

$$|\eta_{ij}| \leq 1, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n, \quad j \neq 0,$$

$$|\eta_{io}| \leq 1, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$\eta_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n.$$

زیرا مقدار جواب بهینه مدل (۱۱)؛ یعنی  $(\eta_{ij}^*, \eta_{io}^*)$ ،  $\forall i, j \neq 0$  شامل  $[\Gamma_i]$  متغیر با مقدار ۱ و یک متغیر با مقدار  $\Gamma_i - [\Gamma_i]$  می‌باشد و این معادل با انتخاب از زیرمجموعه  $\{S_i \cup \{t_i\} | S_i \subset J_i, |S_i| = \Gamma_i, t_i \in J_i \setminus S_i\}$  با تابع هدف متناظر زیر است.

$\sum_{j \neq 0 \in S_i} \lambda_j \hat{x}_{ij} + (\Gamma_i - [\Gamma_i]) \lambda_{t_i} \hat{x}_{it_i} + (\lambda_o - \theta_o) \hat{x}_{io} + (\Gamma_i - [\Gamma_i]) (\lambda_o - \theta_o) \hat{x}_{io}$

حال فرض کنید  $p_i$ ،  $q_{ij} (j \neq 0)$  و  $q_{io}$  به ترتیب متغیرهای دوگان متناظر با محدودیت‌های اول، دوم و سوم مدل (۱۱) باشند. مساله دوگان مساله برنامه‌ریزی خطی (۱۱) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\text{Min} \Gamma_i p_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 0}}^n q_{ij} + q_{io} = \Gamma_i p_i + \sum_{j=1}^n q_{ij}$$

*s.t.*

$$p_i + q_{ij} \geq \hat{x}_{ij} |\lambda_j^*|, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n, \quad j \neq 0,$$

$$p_i + q_{io} \geq \hat{x}_{io} |(\lambda_o^* - \theta_o^*)|, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$p_i \geq 0, \quad q_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

(۱۲)

در محدودیت اول مدل (۱۲)، از آنجایی که  $\lambda_j \geq 0$ ،  $\forall j$ ، بنابراین می‌توان علامت قدر مطلق را برداشت. همچنین در محدودیت دوم مدل (۱۲) برای حذف قدر مطلق از تغییر  $|\lambda_o - \theta_o| \leq \beta_{io}$  استفاده می‌کنیم. در نتیجه، با توجه به قضیه قوی دوگانی و از آنجایی که مدل (۱۱) برای هر  $\Gamma_i \in [0, |J_i|]$  شدنی و کراندار است بنابراین مساله دوگان آن، یعنی مدل (۱۲)، نیز شدنی و کراندار است و مقدار تابع هدف آن‌ها برابر می‌باشد. بنابراین تابع مساله دوگان  $\beta_i(\lambda^*, \theta^*, \Gamma_i)$  معادل با تابع هدف مساله دوگان (۱۲) است. با جایگزینی مدل خطی (۱۲) در مدل غیرخطی (۷) و با روندی مشابه برای محدودیت‌های متناظر با خروجی‌های مدل (۷)، مساله برنامه‌ریزی خطی (۱۰) که مدل ارزیابی بدترین عملکرد براساس رویکرد برتسیماس و سیم [۱۷] می‌باشد (WP-DEA-BS) به دست می‌آید.

**قضیه ۳.** جواب بهینه مدل (۱۰)؛ یعنی  $\theta_R^*$  بزرگتر از یا مساوی یک می‌باشد.

<sup>1</sup> Worst-Practice-DEA-Bertsimas and Sim

**برهان.** جواب شدنی مدل (۱۰) را به صورت  $(\lambda_o, \theta_o, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{q}') = (1, 1, 0, 0, 0)$  و  $\lambda_{j \neq o} = 0$  در نظر بگیرید. چون برای این نقطه شدنی مقدار تابع هدف برابر یک است و مساله از نوع ماکزیم سازی می باشد؛ بنابراین جواب بهینه مدل (۱۰) همواره بزرگ تر یا مساوی یک می باشد.

همچنین از آنجایی که در مدل پیشنهادی (۱۰) متغیرهای اضافه شده به محدودیت های مساله و همچنین  $\Gamma_i$  همگی نامنفی هستند؛ بنابراین فضای شدنی مساله کوچک تر خواهد شد و چون مساله ماکزیم سازی است؛ اما در بدترین حالت، بنابراین جواب مساله جدید کم تر یا مساوی با مساله (۵) خواهد شد. همچنین اگر  $\Gamma_i = 0$  مدل (۱۰) تبدیل به مدل (۵) می شود و با افزایش  $\Gamma_i$  میزان کارایی کاهش می یابد.

باید اشاره شود که در این مقاله، برای رتبه بندی واحدهای ناکارا که روی مرز ناکارایی قرار می گیرند و دارای مقدار ناکارایی یک می باشند و همچنین برای بررسی تحلیل حساسیت ناکارایی واحدها با استفاده از مدل (۱۰) و رتبه بندی کامل واحدها از رویکرد اندرسن و پترسن [۳] استفاده می کنیم. به این صورت که مدل ابرناکارایی استوار حاصل از مدل (۱۰) (WP-DEA-BS) که با حذف واحد تحت ارزیابی از مجموعه واحدها به دست می آید مورد استفاده قرار می دهیم و آن را با WP-SDEA-BS نام گذاری می کنیم.

#### ۴ بهینه سازی استوار برای ارزیابی بدترین عملکرد DEA با داده های بازه ای

در این بخش با استفاده از رویکرد بهینه سازی استوار برتسیماس و سیم [۱۷] و ایده به کار گرفته شده در مدل ارایه شده توسط شکوهی و همکاران [۲۱]، که برای ارزیابی کارایی مدل های DEA با داده های دارای عدم قطعیت بازه ای است، مدلی جدید برای ارزیابی بدترین عملکرد ارایه می کنیم.  $DMU_j$  را در نظر بگیرید و فرض کنید  $J_j^x$  و  $J_j^y$  به ترتیب اندیس مجموعه های مقادیر ورودی ها و خروجی های نادقیق هستند. علاوه بر این پارامترهای  $\gamma_j^x$  و  $\gamma_j^y$  که لزوماً صحیح نیستند در نظر بگیرید که فرض می شود مقادیر خود را در بازه های کراندار  $[0, J_j^x]$  و  $[0, J_j^y]$  اختیار می کنند که در آن،  $\|\cdot\|$  عدد اصلی یک مجموعه است. نقش پارامترهای  $\gamma_j^x$  و  $\gamma_j^y$ ، تنظیم انعطاف پذیری جواب مدل پیشنهاد شده در مقابل عدم قطعیت می باشد. در واقع، نامحتمل است که همه ورودی ها و خروجی های نادقیق یا دارای عدم قطعیت  $(i \in J_j^x, r \in J_j^y)$  به طور همزمان تغییر کنند، بلکه تمایل به این است که در مقابل تغییرات همه ترکیبات  $[\gamma_j^x]$  و  $[\gamma_j^y]$  و تغییرات در  $x_{ij}^x$  و  $y_{ij}^y$  به ترتیب توسط  $(\gamma_j^x - [\gamma_j^x])(x_{ij}^U - x_{ij}^L)$  و  $(\gamma_j^y - [\gamma_j^y])(y_{ij}^U - y_{ij}^L)$  محافظت شود. آنگاه با در نظر گرفتن رویکرد بهینه سازی استوار برتسیماس و سیم [۱۷] برای مدل (۳)، مدل زیر را داریم:

$$\text{Min } \theta_o = \sum_{r=1}^s u_r y_{ro}^L + \beta_p^y,$$

s.t.

$$\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^U - \sum_{r=1}^s u_r y_{ij}^L + \beta_j^x + \beta_j^y \leq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\sum_{i=1}^m v_i x_{io}^U + \beta_o^x = 1,$$

$$u_r, v_i \geq 0, \quad r = 1, \dots, s, \quad i = 1, \dots, m.$$

(۱۳)

از رویکرد بهینه‌سازی استوار برای معرفی  $\beta_j^x(x, \gamma_j^x)$  و  $\beta_j^y(y, \gamma_j^y)$  استفاده می‌کنیم تا از کران پایین ناکارایی به کران بالای ناکارایی حرکت کنیم. به عبارت دیگر، این متغیرها از محدودیت‌ها در مقابل داده‌های عدم قطعیت محافظت می‌کنند و آنها را شدنی نگه می‌دارند. اگر:

$$C_j^y = \{S_j^y \cup \{t_j^y\} \mid S_j^y \subseteq J_j^y, |S_j^y| = \lfloor \gamma_j^y \rfloor, t_j^y \in J_j^y \setminus S_j^y\}$$

آنگاه:

$$\beta_j^y(y, \gamma_j^y) = \text{Max}_{C_j^y} \left\{ \sum_{r \in S_j^y} u_r (y_{rj}^U - y_{rj}^L) + (\gamma_j^y - \lfloor \gamma_j^y \rfloor) u_{t_j^y} (y_{t_j^y}^U - y_{t_j^y}^L) \right\}$$

و اگر:

$$C_j^x = \{S_j^x \cup \{t_j^x\} \mid S_j^x \subseteq J_j^x, |S_j^x| = \lfloor \gamma_j^x \rfloor, t_j^x \in J_j^x \setminus S_j^x\}$$

آنگاه:

$$\beta_j^x(x, \gamma_j^x) = \text{Max}_{C_j^x} \left\{ \sum_{i \in S_j^x} v_i (x_{ij}^U - x_{ij}^L) + (\gamma_j^x - \lfloor \gamma_j^x \rfloor) v_{t_j^x} (x_{t_j^x}^U - x_{t_j^x}^L) \right\}$$

اگر  $\gamma_j^x = 0$  و  $\gamma_j^y = 0$  آنگاه  $\beta_j^x(x, \gamma_j^x) = 0$  و  $\beta_j^y(y, \gamma_j^y) = 0$ . بنابراین، محدودیت‌های (۱۲) با محدودیت‌های مدل (۳) معادل هستند (کران پایین) و به‌طور مشابه، وقتی  $\gamma_j^x = |J_j^x|$  و  $\gamma_j^y = |J_j^y|$  آنگاه

$$\beta_j^x(x, \gamma_j^x) = \sum_{r=1}^s v_i (x_{ij}^U - x_{ij}^L) \quad \text{و} \quad \beta_j^y(y, \gamma_j^y) = \sum_{r=1}^s u_r (y_{rj}^U - y_{rj}^L)$$

محدودیت‌های مدل (۴) (کران بالا) هستند. با استفاده از رویکرد بهینه‌سازی استوار برتسیماس و سیم [۱۷] مساله

غیرخطی (۱۲) به مساله‌ای با محدودیت‌های خطی زیر تبدیل می‌شود:

$$\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^U - \sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^L + z_j^y \gamma_j^y + z_j^x \gamma_j^x + \sum_{r=1}^s p_{rj} + \sum_{i=1}^m q_{ij} \leq 0 \quad (14)$$

$$z_j^y + p_{rj} \geq u_r (y_{rj}^U - y_{rj}^L)$$

$$z_j^x + q_{ij} \geq v_i (x_{ij}^U - x_{ij}^L)$$

$$z_j^x, z_j^y, q_{ij}, p_{rj} \geq 0$$

به طور مشابه، دیگر محدودیت‌ها و تابع هدف در مدل (۱۲) تغییر می‌کنند. برای کاهش پیچیدگی، با جایگزینی  $\Gamma_j = \Gamma, \forall j$  و  $z_j^x = z_j^y = z_j (j = 1, \dots, n)$  و با فرض اینکه  $\Gamma_j = \gamma_j^x + \gamma_j^y (j = 1, \dots, n)$  در واقع به دخالت تصمیم گیرنده برای تعیین سطح محافظت  $(\Gamma_j)$  نیاز نداریم. به علاوه، محدودیت  $\gamma_o^x + \gamma_o^y = \Gamma$  به این دلیل به مدل (۱۴) اضافه شده است که  $\gamma_o^y$  و  $\gamma_o^x$  پارامترهایی هستند که به سطح محافظت ورودی‌ها و خروجی‌ها برای هر DMU اشاره می‌کنند و در نتیجه سطح کلی محافظت در مقابل آشفتگی  $(\Gamma)$  باید با مجموع  $\gamma_o^y$  و  $\gamma_o^x$  برابر باشد. همچنین، محدودیت‌های  $\gamma_o^y \leq s$  و  $\gamma_o^x \leq m$  به ترتیب به این علت که  $\gamma_o^y$  و  $\gamma_o^x$  نمی‌توانند از تعداد ورودی‌ها و خروجی‌های نادقیق بزرگ‌تر باشند به مدل (۱۴) اضافه شده‌اند [۲۱]. در نتیجه، مدل DEA بدترین عملکرد براساس رویکرد برتسیماس و سیم [۱۷] (WP-RDEA) به صورت زیر مدل بندی می‌شود:

$$\text{Min } \theta_o = \sum_{r=1}^s u_r y_{ro}^L + z_o \gamma_o^y + \sum_{r=1}^s p_{ro},$$

s.t.

$$\sum_{i=1}^m v_i x_{io}^U + z_o \gamma_o^x + \sum_{i=1}^m q_{io} = 1,$$

$$\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^U - \sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^L + z_j \Gamma + \sum_{r=1}^s p_{rj} + \sum_{i=1}^m q_{ij} \leq 0, \quad \forall j \neq o, \quad (15)$$

$$z_j + p_{rj} \geq u_r (y_{rj}^U - y_{rj}^L), \quad \forall r, j,$$

$$z_j^x + q_{ij} \geq v_i (x_{ij}^U - x_{ij}^L), \quad \forall i, j,$$

$$\gamma_o^x + \gamma_o^y = \Gamma,$$

$$\theta_o \geq 1,$$

$$\gamma_o^x \leq m,$$

$$\gamma_o^y \leq s,$$

$$\gamma_o^x, \gamma_o^y, v_i, u_r, z_j, q_{ij}, p_{rj} \geq 0, \quad \forall i, j, r.$$

## ۵ مثال کاربردی

در این بخش با استفاده از دو مثال عددی قابلیت و کاربردی بودن مدل‌های پیشنهاد شده در بخش‌های ۳ و ۴ را نشان می‌دهیم. برای این هدف، از نرم افزار GAMS<sup>۱</sup> برای حل مدل‌ها استفاده شده است.

<sup>۱</sup> General Algebraic Modeling Systems

**مثال ۱.** در این بخش با یک مثال عددی از صنعت بانکداری که از [۲۹] گرفته شده است کاربردی بودن مدل ابرناکارایی حاصل از مدل (۱۰) پیشنهاد شده در بخش ۳ را نشان می‌دهیم. داده‌های مساله از گزارش‌های مالی به دست آمده از بانک‌های تایوان می‌باشد و دارای سه ورودی و سه خروجی است که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

ورودی‌ها:  $x_1$ : کل سپرده  $x_2$ : هزینه‌های بهره  $x_3$ : هزینه‌های غیربهره  
 خروجی‌ها:  $y_1$ : کل وام  $y_2$ : درآمد حاصل از بهره  $y_3$ : درآمد حاصل از غیربهره

از این ۲۴ بانک تجاری، بانک‌های ۲۳ و ۸ از طرف دولت به عنوان بانک‌های ورشکسته کنار گذاشته شده‌اند. در جدول ۲ با استفاده از مدل‌های ارایه شده در این مقاله صحت این انتخاب را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

برای به کارگیری مدل ابرناکارایی (WP-SDEA-BS)، که با حذف واحد تحت ارزیابی از مجموعه واحدها از مدل (۱۰) نتیجه می‌شود، فرض می‌کنیم  $\hat{x}_{ij} = \varepsilon_{ij} x_{ij}$  و  $\hat{y}_{ij} = \varepsilon_{rj} y_{ij}$ ، که در آن  $\varepsilon_{ij}$  و  $\varepsilon_{rj}$  به ترتیب مقادیر آشفستگی برای ورودی  $i$ ام و خروجی  $r$ ام متناظر با واحد تحت ارزیابی  $j$ ام می‌باشند. جواب مساله برنامه‌ریزی خطی (WP-SDEA-BS) را می‌توان با هر نرم‌افزار حل‌کننده‌ای به دست آورد. همچنین برای به دست آوردن  $\Gamma_i$  مناسب، می‌توان از رابطه زیر استفاده کرد:

$$\Gamma_{i,r} = 1 + \Phi^{-1}(1 - e_{i,r}) \sqrt{n}$$

که در آن  $\Phi$  توزیع تجمعی متغیر استاندارد گاوسی،  $n$  تعداد کل پارامترهای دارای عدم قطعیت در هر محدودیت و  $e$  احتمال انحراف از محدودیت متناظر ورودی یا خروجی هستند (برتسیماس و سیم [۱۷]). برای مثال اگر  $n = 150$  و  $e_i = 0.05$ ، در محدودیت  $i$ ام باشند، آنگاه  $\Gamma_i$  حداقل باید برابر  $21.08$  قرار داده شود. برای محدودیت‌هایی که تعداد پارامترهای دارای عدم قطعیت آن کم می‌باشند، لازم است که حداکثر محافظت را برای محدودیت‌ها اعمال کنیم که معادل با روش سویستر [۱۱] می‌باشد. برای مورد مطالعه در این مقاله چون تعداد محدودیت‌ها برای هر دو ورودی‌ها و خروجی‌ها کم می‌باشند، بنابراین حداکثر محافظت در مقابل عدم قطعیت در داده‌ها را در نظر می‌گیریم، یعنی،  $\Gamma_i = \Gamma_r = 3$ . همچنین برای تحلیل حساسیت مساله و یافتن ناکارترین واحدها، مقادیر آشفستگی  $\varepsilon = \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{rj} > 0$  را برابر  $0.01$  و  $0.05$  در نظر گرفته و مقادیر ناکارایی و رتبه‌بندی متناظر را در ستون‌های پنجم تا نهم به دست آورده‌ایم.

در جدول ۲ و در ستون‌های دوم و سوم به ترتیب نتایج حاصل از مقادیر مدل ناکارایی (۵) (WP-DEA) و رتبه‌بندی حاصل از آنها را مشاهده می‌کنیم. همان‌طور که ملاحظه می‌شود واحدهای ۵، ۶، ۷، ۸ و ۲۳ دارای مقدار ناکارایی واحد می‌باشند که به معنای ناکارا بودن این واحدها نسبت به بقیه واحدها می‌باشد، بنابراین با مدل (۵) قادر به تشخیص ناکارترین واحدها نیستیم و به روش‌های دیگری نیاز می‌باشد. برای تعیین ناکارترین واحدها از میان واحدهای تحت ارزیابی، ابتدا با استفاده از مدل ابرناکارایی (۶) (WP-SDEA) واحدها را مورد ارزیابی قرار می‌دهیم که نتایج آن در ستون‌های چهارم و پنجم جدول ۲ آورده شده است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود یا استفاده از مدل (۶) قادر به رتبه‌بندی کامل واحدها می‌باشیم. همچنین برای بررسی تحلیل حساسیت واحدهای

تحت ارزیابی، که در اینجا بانک‌ها می‌باشند، مقداری آشفته‌گی و عدم قطعیت در داده‌های مساله را در نظر می‌گیریم و با استفاده از مدل ابرناکارایی حاصل از مدل (۱۰)، یعنی (WP-SDEA-BS) به ارزیابی ناکارایی واحدها می‌پردازیم. نتایج حاصل از این مدل در ستون‌های ششم تا نهم جدول ۲ نشان داده شده است. از نتایج به دست آمده همان‌طور که دیده می‌شود با استفاده از این مدل می‌توان واحدهای دارای بدترین عملکرد را به طور کامل تعیین کرد، در اینجا واحدهای ۸ و ۲۳ همان‌طور که از قبل انتظار داشتیم دارای بدترین کارایی می‌باشند. همچنین در این مثال با افزایش میزان آشفته‌گی مقدار میانگین ناکارایی کاهش پیدا می‌کند.

جدول ۲. بررسی نتایج مدل (۵) (WP-DEA)، مدل (۶) (WP-SDEA) و مدل ابرناکارایی (WP-SDEA-BS) حاصل از مدل (۱۰)

رتبه	WP-SDEA-BS	رتبه	WP-SDEA-BS	رتبه	WP-SDEA	رتبه	WP-DEA	رتبه	بانک
(E=0.05)		(E=0.1)							
ناکارایی		ناکارایی		ناکارایی		ناکارایی			
۶	۱/۰۷۴	۶	۱/۱۵۲	۶	۱/۱۷۶	۶	۱/۱۷۶	۱	
۷	۱/۰۶۸	۷	۱/۱۳۲	۷	۱/۱۵۵	۷	۱/۱۵۵	۲	
۹	۱/۰۴۲	۱۰	۱/۱۰۷	۱۰	۱/۱۳۰	۱۰	۱/۱۳۰	۳	
۲	۱/۱۱۲	۲	۱/۲۰۰	۲	۱/۲۲۷	۲	۱/۲۲۷	۴	
۲۰	۰/۸۳۲	۲۰	۰/۸۹۴	۲۰	۰/۹۱۴	۲۰	۱	۵	
۲۱	۰/۸۰۹	۲۱	۰/۸۸۴	۲۱	۰/۹۰۴	۲۰	۱	۶	
۲۲	۰/۷۶۹	۲۲	۰/۸۴۲	۲۲	۰/۸۶۰	۲۰	۱	۷	
۲۳	۰/۷۶۰	۲۳	۰/۸۳۲	۲۳	۰/۸۵۱	۲۰	۱	۸	
۱۹	۰/۹۲۷	۱۷	۱/۰۰۷	۱۷	۱/۰۲۸	۱۷	۱/۰۲۸	۹	
۳	۱/۱۱۱	۴	۱/۱۹۵	۳	۱/۲۲۲	۳	۱/۲۲۲	۱۰	
۱۳	۰/۹۹۷	۱۳	۱/۰۶۲	۱۳	۱/۰۸۴	۱۳	۱/۰۸۴	۱۱	
۱۷	۰/۹۲۹	۱۸	۱/۰۰۶	۱۸	۱/۰۲۷	۱۸	۱/۰۲۷	۱۲	
۱۱	۱/۰۲۶	۱۱	۱/۰۹۰	۱۱	۱/۱۱۲	۱۱	۱/۱۱۲	۱۳	
۱۶	۰/۹۴۳	۱۶	۱/۰۲۲	۱۶	۱/۰۴۳	۱۶	۱/۰۴۳	۱۴	
۱۲	۰/۹۹۹	۱۲	۱/۰۸۰	۱۲	۱/۱۰۳	۱۲	۱/۱۰۳	۱۵	
۱۵	۰/۹۷۴	۱۵	۱/۰۴۶	۱۵	۱/۰۶۸	۱۵	۱/۰۶۸	۱۶	
۴	۱/۱۰۴	۳	۱/۱۹۶	۴	۱/۲۲۱	۴	۱/۲۲۱	۱۷	
۵	۱/۰۹۳	۵	۱/۱۶۹	۵	۱/۱۹۳	۵	۱/۱۹۳	۱۸	
۸	۱/۰۴۳	۸	۱/۱۱۲	۸	۱/۱۳۵	۸	۱/۱۳۵	۱۹	
۱۸	۰/۹۲۸	۱۹	۰/۹۹۴	۱۹	۱/۰۱۵	۱۹	۱/۰۱۵	۲۰	
۱۴	۰/۹۸۹	۱۴	۱/۰۵۱	۱۴	۱/۰۷۳	۱۴	۱/۰۷۳	۲۱	
۱	۱/۱۷۷	۱	۱/۲۸۲	۱	۱/۳۱۱	۱	۱/۳۱۱	۲۲	
۲۴	۰/۳۷۳	۲۴	۰/۴۱۵	۲۴	۰/۴۲۶	۲۰	۱	۲۳	
۱۰	۱/۰۳۰	۹	۱/۱۱۱	۹	۱/۱۳۴	۹	۱/۱۳۴	۲۴	
	۰/۹۶۲		۱/۰۳۶		۱/۰۵۸		۱/۱۰۲	میانگین	

**مثال ۲.** در این مثال مساله معرفی شده توسط وانگ [۱۰] که برای اندازه‌گیری عملکرد هفت DMU که داده‌های آن در جدول ۱ داده شده است را در نظر می‌گیریم. ورودی‌ها مساله شامل سرمایه و کارگر و خروجی‌ها شامل مقدار تولید ناخالص می‌باشند.

**جدول ۳.** مجموعه داده‌های بازه‌ای و کارایی‌هایی بازه‌ای هفت DMU

بازه کارایی $[\theta_j^L, \theta_j^U]$	خروجی مقدار تولید ناخالص	ورودی‌ها		DMU
		کارگر	سرمایه	
[1/0.000, 1/1.834]	[8.6549, 8.66063]	[674111, 743281]	[621755, 564403]	۱
[1/0.937, 1/2.763]	[91750.7, 985424]	[685943, 742345]	[614371, 669665]	۲
[1/1.164, 1/3.104]	[117142, 1195562]	[762207, 805677]	[762203, 798428]	۳
[1/1.217, 1/2.740]	[1206179, 1261031]	[779894, 846496]	[862016, 937044]	۴
[1/1.160, 1/3.224]	[1381315, 1462543]	[799714, 877137]	[1016898, 102662]	۵
[1/1.313, 1/3.651]	[1467679, 1652787]	[807172, 889416]	[1164350, 1267970]	۶
[1/0.000, 1/1.166]	[1702249, 1812655]	[818090, 895746]	[1731916, 1816008]	۷

در این مثال به این دلیل که دو ورودی دارای عدم قطعیت و یک خروجی دارای عدم قطعیت وجود دارد  $\Gamma$  می‌تواند در بازه  $[0, 3]$  تغییر کند. مدل (۱۵) را برای مقادیر متفاوت  $\Gamma$  و با طول هر گام  $0.1$  حل می‌کنیم. سپس، مقایسه‌ای بین WP-RDEA پیشنهاد شده در این مقاله و روش پیشنهاد شده توسط عزیزی و آجیرلو [۹] انجام می‌دهیم. مقادیر کارایی بازه‌ای  $[\theta_o^L, \theta_o^U]$  با استفاده از مدل‌های (۳) و (۴) در جدول ۳ داده شده‌اند.

در ادامه مدل پیشنهاد شده (۱۵) در بخش ۴ را برای مثال ۲ به کار می‌بریم. همان‌طور که در جدول ۴ نشان داده شده است، هنگامی که  $\Gamma = 0$ ، مقادیر کارایی به دست آمده DMUها تقریباً برابر کران پایین مقادیر کارایی مدل (۳) می‌باشد. از طرف دیگر، وقتی  $\Gamma = 3$ ، کارایی‌های به دست آمده از روش پیشنهاد شده در این مقاله تقریباً مشابه کران بالای مقادیر کارایی نتیجه شده از مدل (۴) است. با استفاده از روش ارایه شده در این مقاله تصمیم‌گیرنده می‌تواند رتبه‌بندی DMUها را برای هر گام امتحان کند، در حالی که روش پیشنهاد شده توسط عزیزی و آجیرلو [۹] از مقدار کران پایین کارایی  $(\theta_o^L)$  و کران بالای کارایی  $(\theta_o^U)$  برای رتبه‌بندی واحدها استفاده می‌کند.

### ۶ نتیجه‌گیری و پیشنهاد برای ادامه کار

در این مقاله، با استفاده از رویکرد بهینه‌سازی استوار برتسیماس و سیم [۱۷] دو مدل برای ارزیابی ناکارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده و تعیین واحدهای ناکارا ارایه کردیم. با استفاده از مدل‌های ارایه شده می‌توان تاثیر وجود همزمان عدم قطعیت در ورودی‌ها و خروجی‌های مساله را بررسی کرد و با تحلیل حساسیت داده‌ها نسبت به آشفتگی، مقادیر ناکارایی و رتبه‌بندی قابل اطمینان‌تری را به دست آورد. همچنین با استفاده از مثال عددی کاربردی بودن و دقتی بودن روش را نشان دادیم. از ایده به کار رفته در این مقاله می‌توان برای مدل‌های دیگر



DEA مانند مدل راسل و اندازه گیری مبتنی بر کمکی‌ها استفاده کرد و مدل‌های دیگری که قابلیت مواجهه با وجود عدم قطعیت در داده‌ها را دارا باشند، ارایه کرد.

جدول ۴. کارایی هفت DMU برای سطوح مختلف گاما با استفاده از WP-RDEA

Gamma	DMU						
	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
۰	۱/۰۰۰۰	۱/۰۹۴۵	۱/۱۶۵۷	۱/۱۲۲۸	۱/۱۶۱۵	۱/۱۳۲۲	۱/۰۰۰۰
۰/۱	۱/۰۰۶۱	۱/۰۹۹۷	۱/۱۶۹۳	۱/۱۲۷۷	۱/۱۶۵۱	۱/۱۳۸۳	۱/۰۰۳۸
۰/۲	۱/۰۱۱۱	۱/۱۰۳۷	۱/۱۷۵۳	۱/۱۳۴۷	۱/۱۷۱۱	۱/۱۴۶۳	۱/۰۰۶۸
۰/۳	۱/۰۱۸۱	۱/۱۰۸۷	۱/۱۸۲۳	۱/۱۳۸۷	۱/۱۷۵۱	۱/۱۵۵۳	۱/۰۰۹۸
۰/۴	۱/۰۲۳۱	۱/۱۱۵۷	۱/۱۸۶۳	۱/۱۴۲۷	۱/۱۸۱۱	۱/۱۶۱۳	۱/۰۱۳۸
۰/۵	۱/۰۳۱۱	۱/۱۱۹۷	۱/۱۹۱۳	۱/۱۴۷۷	۱/۱۸۶۱	۱/۱۶۸۳	۱/۰۱۸۸
۰/۶	۱/۰۳۵۱	۱/۱۲۴۷	۱/۱۹۵۳	۱/۱۵۱۷	۱/۱۹۱۱	۱/۱۷۵۳	۱/۰۲۰۸
۰/۷	۱/۰۴۰۱	۱/۱۳۰۷	۱/۲۰۰۳	۱/۱۵۷۷	۱/۱۹۷۱	۱/۱۸۱۳	۱/۰۲۴۸
۰/۸	۱/۰۴۶۱	۱/۱۳۶۷	۱/۲۰۶۳	۱/۱۶۲۷	۱/۲۰۱۱	۱/۱۹۰۳	۱/۰۲۷۸
۰/۹	۱/۰۵۳۱	۱/۱۴۳۷	۱/۲۱۰۳	۱/۱۶۹۷	۱/۲۰۶۱	۱/۱۹۶۳	۱/۰۳۱۸
۱	۱/۰۵۹۱	۱/۱۴۷۷	۱/۲۱۶۳	۱/۱۷۴۷	۱/۲۱۲۱	۱/۲۰۱۳	۱/۰۳۳۸
۱/۱	۱/۰۶۳۱	۱/۱۵۳۷	۱/۲۱۹۳	۱/۱۷۸۷	۱/۲۱۶۱	۱/۲۰۸۳	۱/۰۳۴۸
۱/۲	۱/۰۶۸۱	۱/۱۵۸۷	۱/۲۲۳۳	۱/۱۸۳۷	۱/۲۲۳۱	۱/۲۱۶۳	۱/۰۳۸۸
۱/۳	۱/۰۷۶۱	۱/۱۶۵۷	۱/۲۲۹۳	۱/۱۸۹۷	۱/۲۳۱۱	۱/۲۲۳۳	۱/۰۴۱۸
۱/۴	۱/۰۸۳۱	۱/۱۷۲۷	۱/۲۳۴۳	۱/۱۹۳۷	۱/۲۳۶۱	۱/۲۲۸۳	۱/۰۴۳۸
۱/۵	۱/۰۸۷۱	۱/۱۷۶۷	۱/۲۳۸۳	۱/۲۰۱۷	۱/۲۴۵۱	۱/۲۳۵۳	۱/۰۴۷۸
۱/۶	۱/۰۹۴۱	۱/۱۸۲۷	۱/۲۴۳۳	۱/۲۰۴۷	۱/۲۵۲۱	۱/۲۴۳۳	۱/۰۴۹۸
۱/۷	۱/۱۰۰۱	۱/۱۸۷۷	۱/۲۵۰۳	۱/۲۰۹۷	۱/۲۵۸۱	۱/۲۴۸۳	۱/۰۵۱۸
۱/۸	۱/۱۰۷۱	۱/۱۸۸۶	۱/۲۵۴۳	۱/۲۱۳۷	۱/۲۶۳۱	۱/۲۵۵۳	۱/۰۵۲۸
۱/۹	۱/۱۱۱۱	۱/۱۹۶۶	۱/۲۶۰۳	۱/۲۱۹۷	۱/۲۶۸۱	۱/۲۶۲۳	۱/۰۵۵۸
۲	۱/۱۱۷۱	۱/۲۰۱۶	۱/۲۶۵۳	۱/۲۲۲۷	۱/۲۷۲۱	۱/۲۷۰۳	۱/۰۶۰۸
۲/۱	۱/۱۲۳۱	۱/۲۰۸۶	۱/۲۷۰۳	۱/۲۲۶۷	۱/۲۷۸۱	۱/۲۷۹۳	۱/۰۶۵۸
۲/۲	۱/۱۳۰۱	۱/۲۱۳۶	۱/۲۷۴۳	۱/۲۳۲۷	۱/۲۸۳۱	۱/۲۸۸۳	۱/۰۷۱۸
۲/۳	۱/۱۳۸۱	۱/۲۲۱۶	۱/۲۷۷۳	۱/۲۳۶۷	۱/۲۸۷۱	۱/۲۹۷۳	۱/۰۷۷۸
۲/۴	۱/۱۴۶۱	۱/۲۲۷۶	۱/۲۸۲۳	۱/۲۴۲۷	۱/۲۹۲۱	۱/۳۰۶۳	۱/۰۸۲۸
۲/۵	۱/۱۵۳۱	۱/۲۳۶۶	۱/۲۸۶۳	۱/۲۴۶۷	۱/۲۹۶۱	۱/۳۱۴۳	۱/۰۸۶۸
۲/۶	۱/۱۶۰۱	۱/۲۴۵۶	۱/۲۹۳۳	۱/۲۵۱۷	۱/۳۰۲۱	۱/۳۲۳۳	۱/۰۹۱۸
۲/۷	۱/۱۶۴۱	۱/۲۵۳۶	۱/۲۹۶۳	۱/۲۵۶۷	۱/۳۰۷۱	۱/۳۳۲۳	۱/۰۹۷۸
۲/۸	۱/۱۶۹۱	۱/۲۵۶۶	۱/۳۰۱۳	۱/۲۶۲۷	۱/۳۱۱۱	۱/۳۴۱۳	۱/۱۰۳۸
۲/۹	۱/۱۷۷۱	۱/۲۶۴۶	۱/۳۰۶۳	۱/۲۶۷۷	۱/۳۱۷۱	۱/۳۵۰۳	۱/۱۰۹۸
۳	۱/۱۸۵۱	۱/۲۷۶۳	۱/۳۲۰۳	۱/۲۸۴۱	۱/۳۳۲۱	۱/۳۷۳۲	۱/۱۱۸۶

## منابع

- [۲۶] صلاحی، م.، ترابی، ن.، جمالیان، ع.، (۱۳۹۳) استوارسازی مدل تحلیل پوششی داده‌های بازده به مقیاس ثابت. تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، ۱۱(۳)، ۱-۱۱.
- [1] Charnes, A., Cooper, W. W., Rhodes, E., (1978). Measuring the efficiency of decision making units. *European Journal of Operational Research*, 2(6), 429-444.
  - [2] Banker, R. D., Charnes, A., Cooper, W. W., (1984). Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis. *Management Science*, 30(9), 1078-1092.
  - [3] Andersen, P., Petersen, N. C., (1993). A procedure for ranking efficient units in data envelopment analysis. *Management Science*, 39(10), 1261-1264.
  - [4] Parkan, C., Wang, Y. M., (2000). Worst Efficiency Analysis Based on Inefficient Production Frontier, Working Paper, Department of Management Sciences, City University of Hong Kong.
  - [5] Paradi, J. C., Asmild, M., Simak, P. C., (2004). Using DEA and worst practice DEA in credit risk evaluation. *Journal of Productivity Analysis*, 21, 153-165.
  - [6] Shuai, J. J., Li, H. L., (2005). Using rough set and worst practice DEA in business failure prediction. *Lecture notes on Computer Science*. Vol. 3642. Berlin, Heidelberg: Springer, pp. 503-510.
  - [7] Liu, F. F., Chen, C. L., (2007). Accessing and classifying Taiwan banks with DEA models in the most favorable and worst-case scenarios, *OR Spectrum*.
  - [8] Liu, F. F., Chen, C. L., (2008). The worst-practice DEA model with slack-based measurement. *Computers and Industrial Engineering*.
  - [9] Azizi, H., Ajirlu, G. H., (2011). Measurement of the worst practice of decision-making units in the presence of non-discretionary factors and imprecise data. *Applied Mathematical Modeling*, 35, 4149-4156.
  - [10] Wang, Y. M., Greatbanks, R., Yang, J. B., (2005). Interval efficiency assessment using data envelopment analysis, *Fuzzy Set. Syst.* 153, 347-370.
  - [11] Soyster, A. L., (1973). Convex programming with set-inclusive constraints and applications to inexact linear programming. *Operations Research*, 21(5), 1154-1157.
  - [12] Ben-Tal, A., Nemirovski, A., (1999). Robust solutions of uncertain linear programs. *Operations Research Letters*, 25(1), 1-13.
  - [13] Ben-Tal, A., Nemirovski, A., (2000). Robust solution of linear programming problems contaminated with uncertain data. *Mathematical programming*, 88(3), 411-421.
  - [14] Ben-Tal, A., El-Ghaoui, L., Nemirovski, A., (2009). Robust optimization. Princeton Series in Applied Mathematics. Princeton University Press, Princeton.
  - [15] El-Ghaoui, L., Lebret, H., (1997). Robust solutions to least-square problems to uncertain data matrices. *SIAM Journal of Matrix Analysis Applications*, 18, 1035-1064.
  - [16] El-Ghaoui, L., Oustry, F., Lebret, H., (1998). Robust solutions to uncertain semi-definite programs. *SIAM Journal on Optimization*, 9, 33-52.
  - [17] Bertsimas, D., Sim, M., (2004). The price of robustness. *Operations Research*, 52(1), 35-53.
  - [18] Wang, K., Wei, F., (2010). Robust data envelopment analysis based MCDM with the consideration of uncertain data. *Journal of Systems Engineering and Electronics*, 21(6), 981-989.
  - [19] Sadjadi, S. J., Omrani, H., (2008). Data envelopment analysis with uncertain data: An application for Iranian electricity distribution companies. *Energy Policy*, 36(11), 4247-4254.
  - [20] Sadjadi, S. J., Omrani, H., (2010). A bootstrapped robust data envelopment analysis model for efficiency estimating of telecommunication companies in Iran. *Telecommunication Policy*, 34(4), 221-232.
  - [21] Shokouhi, A. H., Hatami-Marbini, A., Tavana, M., Saati, S. A., (2010). Robust optimization approach for imprecise data envelopment analysis. *Computers and Industrial Engineering*, 59(3), 387-397.
  - [22] Sadjadi, S. J., Omrani, H., Abdollahzadeh, S., Alinaghian, M., Mohammadi, H., (2011a). A robust super-efficiency data envelopment analysis model for ranking of provincial gas companies in Iran. *Expert Systems with Applications*, 38(9), 10875-10881.
  - [23] Sadjadi, S. J., Omrani, H., Makui, A., Shahanaghi, K., (2011b). An interactive robust data envelopment analysis model for determining alternative targets in Iranian electricity distribution companies. *Expert Systems with Applications*, 38(8), 9830-9839.
  - [24] Omrani, H., (2013). Common weights data envelopment analysis with uncertain data: A robust optimization approach. *Computers and Industrial Engineering*, 66(4), 1163-1170.

- [25] Lu, C. C., (2015). Robust data envelopment analysis approaches for evaluating algorithmic performance. *Computers and Industrial Engineering*, 81(1), 78-89.
- [27] Salahi, M., Torabi, N., Amiri, A., (2016). An optimistic robust optimization approach to common set of weights in DEA. *Measurement*, 93, 67-73.
- [28] Charnes, A., Cooper, W. W., (1962). Programming with linear fractional functional. *Naval Research Logistics Quarterly*, 9(1), 67-88.
- [29] Kao, C., Liu, S. T., (2004). Predicting bank performance with financial forecasts: A case of Taiwan commercial banks. *Journal of Banking and Finance*, 28, 2353-2368.

Archive of SID