

## اعمال فاکتور تاثیر غیرمستقیم مرتبط با ورودی‌ها و خروجی‌ها، در ارزیابی عملکرد واحدهای تصمیم‌گیرنده

حمید سیابی سراج‌لو<sup>۱</sup>، محسن رستمی مال خلیفه<sup>۲</sup>، فرهاد حسین زاده لطفی<sup>۳</sup>، محمد حسن بهزادی<sup>۴</sup>

۱- دانشجوی دکتری، دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات تهران، گروه ریاضی، تهران، ایران

۲- دانشیار، دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات تهران، گروه ریاضی، تهران، ایران

۳- استاد، دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات تهران، گروه ریاضی، تهران، ایران

۴- دانشیار، دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات تهران، گروه آمار، تهران، ایران

رسید مقاله: ۶ دی ۱۳۹۵

پذیرش مقاله: ۱ تیر ۱۳۹۶

### چکیده

تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) یک روش ناپارامتری برای تخمین تابع تولید می‌باشد. در DEA هر واحد تصمیم‌گیرنده دارای تعدادی ورودی و خروجی بوده و با استفاده از مرز کارایی به ارزیابی عملکرد واحدهای تصمیم‌گیرنده می‌پردازد. هر یک از ورودی‌ها و خروجی‌ها نقش اساسی در ارزیابی عملکرد واحد تصمیم‌گیرنده بازی می‌کنند که می‌توان از آن‌ها به عنوان فاکتور تاثیر مستقیم نام برد؛ اما با در نظر گرفتن ذات و ماهیت ورودی‌ها و خروجی‌ها این امکان وجود دارد که ورودی‌ها و خروجی‌های واحدهای تصمیم‌گیرنده، تاثیر غیرمستقیمی نیز در ارزیابی عملکرد واحدهای تصمیم‌گیرنده داشته باشند که یکی از ضعف‌های مدل‌های DEA، در نظر نگرفتن این فاکتورها می‌باشد که می‌توان از آن‌ها به عنوان فاکتور تاثیر غیرمستقیم نام برد. فاکتور تاثیر غیرمستقیم مورد نظر در این مقاله به علت ذات و ماهیت‌شان، اثر منفی بر روی کارایی گذاشته و نمی‌توان این فاکتورها را به عنوان ورودی یا خروجی، یا به عنوان ورودی یا خروجی کنترل‌پذیر، در نظر گرفت. تشخیص فاکتورهای تاثیر غیرمستقیم، نقش بسزایی در ارزیابی عملکرد و رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده بازی می‌کند. از این رو در این مقاله به هر ورودی و خروجی یک کمیت عددی (متعلق به بازه  $[0, 1]$ )، به عنوان فاکتور تاثیر غیرمستقیم نسبت داده و با استفاده از دستکاری در داده‌ها و تحلیل پوششی داده‌ها، روش‌هایی برای ارزیابی عملکرد و رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده، مبتنی بر فاکتورهای تاثیر غیرمستقیم ارائه می‌شود.

**کلمات کلیدی:** تحلیل پوششی داده‌ها، فاکتور تاثیر غیرمستقیم، رتبه‌بندی.

\* عهده‌دار مکاتبات

آدرس الکترونیکی: Mohsen\_rostamy@yahoo.com

## ۱ مقدمه

با توجه به محدودیت و کمبود منابعی از قبیل: میزان سرمایه، نیروی انسانی، منابع طبیعی و ...، همواره مدیران درصدد چاره‌اندیشی و یافتن راهکارهای علمی مناسب، برای استفاده بهینه از این منابع می‌باشند؛ بنابراین همواره نیاز به ارزیابی عملکرد و یافتن الگوی مناسب برای واحدهای تصمیم‌گیرنده (*DMU*) تحت سرپرستی دارند. در واقع هدف به دست آوردن حداکثر بازدهی با استفاده از منابع موجود می‌باشد؛ یعنی به دنبال تابعی هستیم که به ازای ترکیبی از عوامل ورودی حداکثر خروجی را به ما بدهد که این تابع را تابع تولید می‌نامیم [۱]. با توجه به مشکلات موجود در محاسبه تابع تولید، به ناچار از تابعی استفاده می‌کنیم که تقریب مناسبی از آن را نمایش دهد. تقریب تابع تولید با دو روش پارامتری و ناپارامتری صورت می‌گیرد. با توجه به ایرادات وارده به روش‌های پارامتری [۲]، روش‌های ناپارامتری ابزار مناسبی به شمار می‌آیند. یکی از این روش‌ها، تحلیل پوششی داده‌ها می‌باشد. تحلیل پوششی داده‌ها، مجموعه‌ای به نام امکان تولید را ساخته و مرز آن را تخمینی از تابع تولید در نظر می‌گیرد و با استفاده از آن، سطوح کارایی را برای هر یک از ورودی‌ها و خروجی‌ها مشخص می‌نماید. در نتیجه می‌توان به ارزیابی عملکرد واحدهای تصمیم‌گیرنده پرداخت. این روش با کار فارل [۳] شروع شد و در ادامه چارلز و همکاران [۴] آن را توسعه دادند. در ادامه مدل‌های زیادی ارائه شدند که هر یک دارای تکنولوژی خاصی می‌باشند. از آن جمله مدل‌ها می‌توان به مدل *CCR* (بازده به مقیاس ثابت) و مدل *BCC* (بازده به مقیاس متغیر) اشاره کرد [۵]. به مدل‌های ذکر شده مدل‌های شعاعی گفته می‌شود. مشکل مدل‌های شعاعی، عدم تاثیر تمام ضعف‌های ورودی‌ها و خروجی‌ها روی کارایی می‌باشد. به همین خاطر مدل‌های غیرشعاعی مانند مدل‌های جمعی [۶] و راسل اصلاح شده [۷] به وجود آمدند. در راسل اصلاح شده تمام نقاط ضعف و قدرت ورودی و خروجی‌ها روی کارایی تاثیر می‌گذارند. یکی از مباحث مهم در تحلیل پوششی داده‌ها، رتبه‌بندی واحدها می‌باشد؛ زیرا با توجه به عواملی مانند: وجود بازار رقابتی بین واحدهای تصمیم‌گیرنده و ...، مدیران توجه ویژه‌ای به مبحث رتبه‌بندی دارند. تاکنون روش‌های متعددی جهت رتبه‌بندی واحدها ارائه شده که هر یک به نوبه خود دارای نقاط ضعف و قوت می‌باشند. از جمله مشکلات روش‌های رتبه‌بندی، ارائه بیش از یک واحد به عنوان کارا می‌باشد. سکستون و همکاران [۸] ارزیابی کارایی متقاطع را ارائه دادند. این روش کارایی واحدها را با ترکیبی از بهترین وزن خود *DMU* و بهترین وزن *DMU*های دیگر به دست می‌آورد. یکی از مشکلات اساسی این روش وجود جواب بهینه چندگانه می‌باشد. به همین دلیل جهانشاهلو و همکاران [۹ و ۱۰] و وانگ و همکاران [۱۱] روش‌هایی را مبتنی بر کارایی متقاطع، برای حل این مشکل ارائه دادند. داودی و همکاران [۱۲] نیز روشی برای اصلاح روش سکستون ارائه دادند. روش مذکور به گونه‌ای اصلاح شده است که مشکل ناشی از وجود جواب-های بهینه چندگانه در مدل مضربی برطرف گردیده است. اندرسون و پیترسون [۱۳] مدل ابر کارایی *AP* را ارائه دادند که دارای ایراداتی مانند نشدنی بودن، ناپایداری، رتبه‌بندی نکردن واحدهای کارایی غیررأسی می‌باشد. محرابیان و همکاران [۱۴] روش رتبه‌بندی *MAJ* را ارائه دادند. انتانی و همکاران [۱۵] کارایی *DMU*ها را از دو دیدگاه خوش‌بینانه و بدبینانه به دست آورده و یک بازه کارایی ارائه دادند. حسین‌زاده لطفی و همکاران [۱۶] با دسته‌بندی روش‌های رتبه‌بندی، مقاله‌ای مروری در رابطه با رتبه‌بندی ارائه دادند.

حال به بیان ضعف موجود در مدل‌های کلاسیک  $DEA$  می‌پردازیم. در مدل  $CCR$  اگر  $DMU_1$  کارا باشد، با ضرب تمام ورودی‌ها و خروجی‌ها در یک اسکالر بزرگ‌تر از یک،  $DMU_2$  به وجود آمده نیز کارا خواهد بود و این دو  $DMU$  هیچ تفاوتی از نظر  $DEA$  با هم ندارند؛ ولی از نظر مدیریتی شاید این باعث مشکلاتی شود. مثلاً اگر ورودی اول  $DMU$ ‌ها را تعداد پرسنل بگیریم، تعداد پرسنل  $DMU_2$  بیش‌تر از  $DMU_1$  می‌باشد، ولی زیاد شدن تعداد کارمندان شاید باعث اعتصاب و به هم خوردن نظم موجود شود یا شاید باعث واجد شرایط شدن کارخانه برای اجرای برخی از دستورالعمل‌ها (قوانین بیمه) که هزینه بردار می‌باشند، شود. در این صورت امکان دارد از نظر مدیریتی  $DMU_1$  را به  $DMU_2$  ترجیح دهیم. به عنوان مثال دیگر فرض کنید سرمایه‌گذاری بخواند از میان دو کارخانه ( $DMU$ ) یکی را برای سرمایه‌گذاری انتخاب کند.  $DMU_1$  با مقدار مشخصی مواد اولیه،  $S$  واحد محصول  $a$  را تولید می‌کند و  $DMU_2$  با همان مقدار مشخص مواد اولیه،  $S$  واحد محصول  $b$  را تولید می‌کند. قیمت محصول  $b$  بالاتر از محصول  $a$  می‌باشد پس از نظر تحلیل پوششی داده‌ها  $DMU_2$  کارتر از  $DMU_1$  بوده و مورد ترجیح سرمایه‌گذاری می‌باشد. حال با در نظر گرفتن این فرض که محصول  $a$  ماندگاری بیش‌تر داشته و نسبت به محصول  $b$  سریع‌تر به فروش می‌رسد، دیگر به راحتی نمی‌توان  $DMU_2$  را به  $DMU_1$  ترجیح داد و عملکرد آن‌ها را با استفاده از مدل‌های کلاسیک  $DEA$  ارزیابی کرد. در نتیجه علاوه بر مقادیر ورودی‌ها و خروجی‌ها، که آن‌ها را به عنوان فاکتور تاثیر مستقیم در نظر می‌گیریم، فاکتورهای کمی یا کیفی دیگری که وابسته به ذات و ماهیت ورودی‌ها و خروجی‌ها می‌باشند نیز در ارزیابی عملکرد و رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده موثر می‌باشند که آن‌ها را به عنوان فاکتورهای تاثیر غیرمستقیم نامگذاری می‌کنیم. نکته جالب این است که این فاکتورهای تاثیر غیرمستقیم را نمی‌توان به عنوان ورودی یا خروجی و یا ورودی یا خروجی کنترل-پذیر در نظر گرفت و از طرفی این فاکتورهای مدنظر تاثیر منفی بر روی کارایی می‌گذارند؛ بنابراین برای انجام این کار فاکتورهای تاثیر غیرمستقیم را به صورت کمیت‌های عددی به ورودی و خروجی‌ها اختصاص می‌دهیم و با استفاده از دستکاری در داده‌ها و بهره بردن از بعضی مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها، مدل‌هایی را برای ارزیابی عملکرد و رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده ارائه می‌دهیم. این مقاله به صورت زیر بخش‌بندی شده است:

در بخش ۲ به بیان ضعف موجود در مدل‌های کلاسیک  $DEA$  برای ارزیابی عملکرد واحدهای تصمیم‌گیرنده می‌پردازیم. در بخش ۳ روشی برای بهبود این نقیصه ارائه داده و در انتهای بخش، مدل‌های کلاسیک  $DEA$  را به روش گفته شده مجهز می‌کنیم و با استفاده از این روش‌ها، به رتبه‌بندی و ارزیابی عملکرد واحدهای تصمیم‌گیرنده می‌پردازیم. بخش ۴، شامل مثال عددی برای تشریح روش‌های پیشنهادی می‌باشد. مقاله را با نتیجه‌گیری در بخش ۵ به پایان می‌بریم.

## ۲ بیان ضعف موجود در مدل‌های کلاسیک $DEA$

در تحلیل پوششی داده‌ها هر واحد تصمیم‌گیرنده دارای تعدادی ورودی و خروجی می‌باشد و با استفاده از مرز کارایی حاصل از تکنولوژی تولید، می‌توان به ارزیابی عملکرد واحدهای تصمیم‌گیرنده پرداخت. هر یک از ورودی و خروجی‌های واحد تصمیم‌گیرنده نقش اساسی در ارزیابی عملکرد واحد مربوطه بازی می‌کنند که از

آن می‌توان به عنوان فاکتور تاثیر مستقیم یاد کرد. ورودی‌ها و خروجی‌های واحدهای تصمیم‌گیرنده تاثیر غیرمستقیمی نیز در ارزیابی عملکرد واحدهای تصمیم‌گیرنده دارند که یکی از ضعف‌های مدل‌های کلاسیک *DEA* در نظر نگرفتن این فاکتور تاثیر غیرمستقیم می‌باشد. فاکتور تاثیر غیرمستقیم مورد نظر ما اثر منفی بر روی کارایی می‌گذارد که نشأت گرفته از ذات و ماهیت ورودی‌ها و خروجی‌ها می‌باشد که در ادامه به معرفی آن‌ها می‌پردازیم. مثلاً کارخانه‌ای را در نظر بگیرید که دارای دو ورودی (نیروی انسانی و مواد اولیه) و یک خروجی (درآمد) باشد. حال به بررسی ورودی اول (نیروی انسانی) می‌پردازیم. می‌دانیم با افزایش ورودی‌ها می‌توان خروجی‌ها را نیز افزایش داد؛ ولی امکان دارد با افزایش تعداد کارمندان باعث اعتصاب، بی‌نظمی و واجد شرایط شدن برای قوانین دست و پاگیر و هزینه‌بر (قوانین بیمه) در کارخانه شویم یعنی با افزایش نیروی انسانی، تاثیر ورودی اول در ارزیابی عملکرد واحد تصمیم‌گیرنده به اندازه مورد انتظار افزایش نیابد که این همان تاثیر غیرمستقیم می‌باشد. بنابراین می‌توان ضریبی مانند  $0 \leq L \leq 1$  را به ورودی اول نسبت داد که هرچقدر  $L$  به صفر نزدیک شود، نشانگر کاهش تاثیر غیرمستقیم افزایش نیروی انسانی بر عملکرد کارخانه و هرچه  $L$  به سمت یک نزدیک شود، نشانگر افزایش تاثیر غیرمستقیم افزایش نیروی انسانی بر عملکرد واحد مربوطه می‌باشد ( $L$  هرچقدر کم‌تر باشد، بهتر است). پس در این ورودی خاص کاهش  $L$  باعث کم رنگ شدن تاثیر غیرمستقیم ورودی اول در ارزیابی عملکرد کارخانه خواهد شد.

حال ورودی دوم (مواد اولیه) را در نظر بگیرید. فاکتور تاثیر غیرمستقیم برای ورودی دوم را می‌توان میزان استفاده مفید کارخانه از مواد اولیه در نظر گرفت که می‌تواند ناشی از کیفیت نگهداری، تکنولوژی دستگاه‌ها، محل احداث کارخانه و روش حمل و نقل مواد اولیه، در کارخانه باشد. پس افزایش مواد اولیه زمانی تاثیر مثبت در کارایی دارد که کارخانه فاکتور تاثیر غیرمستقیم بالایی نسبت به این ورودی داشته باشد. پس ضریبی مانند  $0 \leq L \leq 1$  را می‌توان به ورودی دوم نسبت داد که تاثیر غیرمستقیم در ارزیابی عملکرد کارخانه دارد. در اینجا هر چقدر  $L$  به صفر نزدیک شود، نشان از افزایش تاثیر غیرمستقیم افزایش مواد اولیه در ارزیابی عملکرد کارخانه و هر چقدر  $L$  به یک نزدیک شود، نشان از کاهش تاثیر غیرمستقیم افزایش مواد اولیه در ارزیابی عملکرد کارخانه دارد. در ادامه، خروجی اول (درآمد) را در نظر می‌گیریم. ما همیشه در صدد افزایش درآمد می‌باشیم ولی با افزایش درآمد، ریسک نیز افزایش می‌یابد که در این صورت امکان بر شکستگی زیاد شده و باعث از بین رفتن سود حاصله می‌شود. این ریسک می‌تواند ناشی از نوع، کیفیت و ماندگاری و مدت زمان لازم برای بفروش رفتن محصول باشد. این همان تاثیر غیرمستقیم خروجی اول روی کارایی می‌باشد، بنابراین می‌توان ضریبی مانند  $0 \leq K \leq 1$  را به خروجی اول نسبت داد که تاثیر غیرمستقیم در ارزیابی عملکرد کارخانه دارد. در اینجا نیز نزدیک شدن  $K$  به صفر، نشانگر کاهش تاثیر غیرمستقیم افزایش درآمد در ارزیابی عملکرد و نزدیک شدن  $K$  به یک، نشانگر افزایش تاثیر غیرمستقیم افزایش درآمد در ارزیابی عملکرد می‌باشد. در انتهای توجه خود را به این مطلب معطوف می‌کنیم که شاید ادعا شود، می‌توان فاکتورهای تاثیر غیرمستقیم را به عنوان ورودی‌ها و خروجی‌های جدید به *DMU* اضافه کرد و یا آن‌ها را به عنوان ورودی‌ها یا خروجی‌های کنترل‌پذیر

در نظر گرفت ولی این ادعا متناقض با ذات و ماهیت این فاکتورها می باشد و در انتهای فصل بعد، نسبت به رد این ادعا به تفصیل بحث خواهد شد.

**۳. ارزیابی روشی برای از بین بردن ضعف بیان شدن و تجهیز مدل های کلاسیک DEA به این روش**  
 n تا DMU شامل s تا خروجی و m تا ورودی را در نظر بگیرید که بعضی از ورودی ها و خروجی ها تاثیر غیرمستقیم منفی روی کارایی دارند. در نتیجه به یک کمیت عددی به نام فاکتور تاثیر غیرمستقیم مجهز شده اند که در جدول ۱، قابل مشاهده می باشند.

جدول ۱. ورودی ها و خروجی های مجهز شده به فاکتور تاثیر غیرمستقیم

	$DMU_1$	$DMU_2$	...	$DMU_n$
$A$	$x_{11}(L_{11})$	$x_{12}(L_{12})$	...	$x_{1n}(L_{1n})$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$x_{t1}(L_{t1})$	$x_{t2}(L_{t2})$	...	$x_{tn}(L_{tn})$
$B$	$x_{t+11}(L_{t+11})$	$x_{t+12}(L_{t+12})$	...	$x_{t+1n}(L_{t+1n})$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$x_{m1}(L_{m1})$	$x_{m2}(L_{m2})$	...	$x_{mn}(L_{mn})$
$A'$	$y_{11}(K_{11})$	$y_{12}(K_{12})$	...	$y_{1n}(K_{1n})$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$y_{d1}(K_{d1})$	$y_{d2}(K_{d2})$	...	$y_{dn}(K_{dn})$
$B'$	$y_{d+11}(K_{d+11})$	$y_{d+12}(K_{d+12})$	...	$y_{d+1n}(K_{d+1n})$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$y_{s1}(K_{s1})$	$y_{s2}(K_{s2})$	...	$y_{sn}(K_{sn})$

که  $0 \leq L_{ij} \leq 1$  و  $0 \leq K_{ij} \leq 1$  می باشند. هر DMU شامل دو دسته از ورودی ها و خروجی ها می باشد. افزایش فاکتورهای  $L_{ij}$  یا  $K_{ij}$  در دسته های  $A$  و  $A'$  باعث کاهش تاثیر غیرمستقیم منفی این ورودی ها و خروجی ها در ارزیابی عملکرد واحدهای تصمیم گیرنده می شود و بالعکس. در دسته های  $B$  و  $B'$  کاهش فاکتورهای  $L_{ij}$  یا  $K_{ij}$  باعث کاهش تاثیر غیرمستقیم منفی این ورودی و خروجی ها در ارزیابی عملکرد واحدهای تصمیم گیرنده می شود و بالعکس. اگر ورودی  $q$  در تمامی DMU ها دارای فاکتور تاثیر غیرمستقیم نباشد، با در نظر گرفتن  $L_{iq} = 1$  (یا  $L_{iq} = 0$ ) در دسته  $A$  (یا  $B$ ) قرار می گیرد و اگر خروجی  $q$  در تمامی DMU ها دارای فاکتور تاثیر غیرمستقیم نباشد، با در نظر گرفتن  $K_{iq} = 1$  (یا  $K_{iq} = 0$ ) در دسته  $A'$  (یا  $B'$ ) قرار می گیرد. حال می خواهیم روشی ارزیابی دهیم که توسط آن بتوانیم فاکتورهای تاثیر غیرمستقیم را در ارزیابی عملکرد واحدهای تصمیم گیرنده اعمال

کنیم. این کار به دو روش می‌تواند انجام شود. روش اول مبتنی بر ارایه مدل و روش دوم مبتنی بر دستکاری در داده‌ها می‌باشد. ما در این مقاله از دستکاری در داده‌ها استفاده می‌کنیم. فرض کنید می‌خواهیم کارایی  $DMU_p$  را به دست آوریم. فرض کنید  $x_{ip}$  متعلق به دسته  $A$  یا  $B$  از ورودی‌ها باشد.  $L_{ip}$  فاکتور تاثیر غیرمستقیم ورودی مزبور می‌باشد. با توجه به تاثیر منفی این فاکتور در کارایی، پس باید کاری کنیم به یک نسبت خاصی ورودی  $x_{ip}$  افزایش یابد تا باعث کاهش کارایی شود. در رابطه (۲)، این نسبت باید طوری انتخاب شود که با افزایش  $L_{ip}$  این تاثیر کمرنگ‌تر (پرننگ‌تر) شود و بالعکس. پس به جای استفاده از  $x_{ip}$  در ارزیابی عملکرد  $DMU_p$  از  $x'_{ip}$  استفاده می‌کنیم که به صورت زیر به دست می‌آید:

$$x'_{ip} = x_{ip} \left( \frac{L_{iN}}{\beta_i (L_{iN} - L_{ip}) + L_{ip}} \right), i \in A \quad (1)$$

$$L_{iN} = \text{Max} \{L_{ij} | j = 1, \dots, n\}$$

یا

$$x'_{ip} = x_{ip} \left( \frac{L_{ip} + \delta}{(\beta_i (L_{ip} - L_{iN}) + L_{iN}) + \delta} \right), i \in B \quad (2)$$

$$L_{iN} = \text{Min} \{L_{ij} | j = 1, \dots, n\}$$

که  $0 \leq \beta_i \leq 1$  توسط مدیر تعیین می‌شود و با استفاده از آن می‌توان درصد افزایش ورودی  $x_{ip}$  را نسبت به فاکتور تاثیر غیرمستقیم کنترل کرد. بدیهی است که:

$$1 \leq \frac{L_{iN}}{\beta_i (L_{iN} - L_{ip}) + L_{ip}} \leq \frac{L_{iN}}{L_{ip}}, \quad 1 \leq \frac{L_{ip} + \delta}{(\beta_i (L_{ip} - L_{iN}) + L_{iN}) + \delta} \leq \frac{L_{ip} + \delta}{L_{iN} + \delta}$$

با توجه به روابط بالاداریم:

$x_{ip} \leq x'_{ip}$   
 حال اگر خروجی  $y_{ip}$  متعلق به دسته  $A'$  یا  $B'$  با فاکتور تاثیر غیرمستقیم  $K_{ip}$  باشد، برای کاهش کارایی با توجه به تاثیر منفی این فاکتور در کارایی، باید کاری کنیم که خروجی  $y_{ip}$  با یک نسبت خاصی کاهش یابد. بدین منظور هنگام ارزیابی  $DMU_p$  بجای  $y_{ip}$  از  $y'_{ip}$  استفاده می‌کنیم.

$$y'_{ip} = y_{ip} \left( \frac{\alpha_r (K_{rN} - K_{ip}) + K_{ip}}{K_{rN}} \right), i \in A' \quad (3)$$

$$K_{rN} = \text{Max} \{K_{rj} | j = 1, \dots, n\}$$

یا

$$y'_p = y_p \left( \frac{(\alpha_r (K_{rp} - K_{rN}) + K_{rN}) + \delta}{K_{rp} + \delta} \right), i \in B' \quad (4)$$

$$K_{rN} = \text{Min} \{K_{rj} | j = 1, \dots, n\}$$

در رابطه ۲(۴)، این نسبت طوری انتخاب شده است که با افزایش  $K_{rp}$  این تاثیر کم‌رنگ‌تر (پررنگ‌تر) خواهد شد و بالعکس. در اینجا نیز  $0 \leq \alpha_i \leq 1$  توسط مدیر تعیین می‌شود و با استفاده از آن می‌توان درصد کاهش خروجی  $y_p$  را نسبت به فاکتور تاثیر غیرمستقیم کنترل کرد. بدیهی است که:

$$\frac{K_{rp}}{K_{rN}} \leq \frac{\alpha_r (K_{rN} - K_{rp}) + K_{rp}}{K_{rN}} \leq 1, \quad \frac{K_{rN} + \delta}{K_{rp} + \delta} \leq \frac{(\alpha_r (K_{rp} - K_{rN}) + K_{rN}) + \delta}{K_{rp} + \delta} \leq 1$$

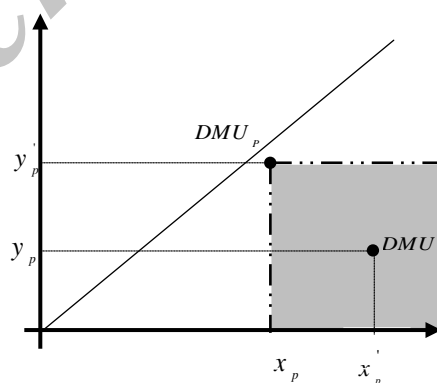
با توجه به روابط بالا داریم:

$$y'_p \leq y_p$$

اسکالر  $\delta$  استفاده شده در روابط ۲ و ۴ را یک عدد کوچک در نظر گرفته و برای بامعنی کردن روابط ۲ و ۴، هنگامی که  $L_{ip} = L_{iN} = 0$  یا  $K_{rp} = K_{rN} = 0$ ، به کار می‌رود، زیرا در غیر این صورت امکان دارد روابط ۲ و ۴، مبهم شوند. از طرفی به علت کوچک بودن، تاثیر قابل توجهی در روابط ۲ و ۴، نمی‌گذارد. پس هنگام ارزیابی عملکرد  $DMU_p$  کفایت به جای آن از  $DMU'_p$  استفاده کنیم که دارای ورودی  $x'_p$  و خروجی  $y'_p$  می‌باشد و با استفاده از روابط ۱، ۲، ۳ و ۴ به دست می‌آیند. فرض کنیم  $DMU_p$  دارای یک ورودی و خروجی باشد. با استفاده از شکل ۱ و ۲، می‌توان رابطه مابین  $DMU_p$  و  $DMU'_p$  را بیان کرد:

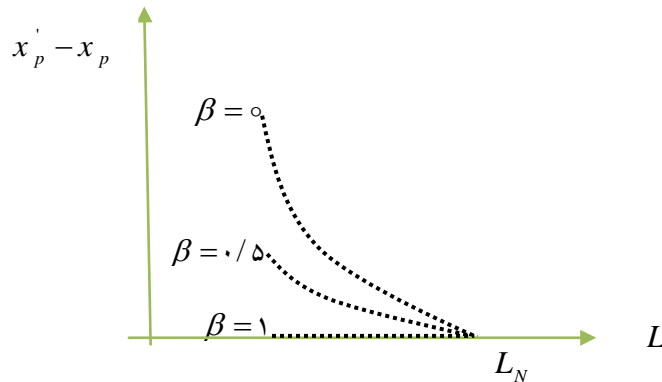
$$DMU_p \begin{cases} x_p (L_p) \in A \\ y_p (K_p) \in A' \end{cases},$$

$$DMU'_p \begin{cases} x'_p \\ y'_p \end{cases}$$



شکل ۱. رابطه مابین  $DMU_p$  و  $DMU'_p$

که  $DMU'_p$  در ناحیه هاشورخورده قرار می‌گیرد:



شکل ۲. تغییرات ورودی  $x'_p - x_p$  را برحسب فاکتور تاثیر غیرمستقیم نسبت به  $\beta$  های مختلف

شکل ۲، تغییرات ورودی  $x'_p - x_p$  را برحسب فاکتور تاثیر غیرمستقیم نسبت به  $\beta$  های مختلف نشان می‌دهد. این نمودار را برای تغییرات خروجی برحسب  $K$  نیز می‌توان رسم نمود. در ادامه مدل‌های کلاسیک  $DEA$  را به این روش مجهز می‌کنیم. با توجه به روش به کار رفته در این مقاله (دستکاری در داده‌ها) باید از مدلی استفاده کنیم که تمام نقاط ضعف و قوت، ورودی‌ها و خروجی‌ها را در کارایی دخالت دهد، زیرا در این مقاله فاکتورهای تاثیر غیرمستقیم، مستقیماً روی داده‌های ورودی‌ها و خروجی‌ها اثر می‌گذارند و بهترین گزینه برای این هدف، راسل اصلاح شده می‌باشد، زیرا تنها مدلی است که از تمامی نقاط ضعف و قوت، ورودی‌ها و خروجی‌ها استفاده کرده و کارایی نسبی می‌دهد. مدل‌های دیگر تمامی این مزیت‌ها را ندارند. با توجه به روش ساخت  $DMU'_p$ ، بدیهی است که  $PPS$  ما تغییر نخواهد کرد؛ بنابراین داریم:

$$\text{Min } \rho = \frac{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \theta_i}{\frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \varphi_r}$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq \theta_i x_{ip} \left( \frac{L_{iN}}{\beta_i (L_{iN} - L_{ip}) + L_{ip}} \right), \quad i \in A, \quad (5)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq \theta_i x_{ip} \left( \frac{L_{ip} + \delta}{(\beta_i (L_{ip} - L_{iN}) + L_{iN}) + \delta} \right), \quad i \in B,$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq \varphi_r y_{rp} \left( \frac{\alpha_r (K_{rN} - K_{rp}) + K_{rp}}{K_{rN}} \right), \quad i \in A',$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq \varphi_r y_{rp} \left( \frac{(\alpha_r (K_{rp} - K_{rN}) + K_{rN}) + \delta}{K_{rp} + \delta} \right), \quad i \in B',$$



$$\begin{aligned} \lambda_j &\geq 0, & j &= 1, \dots, n, \\ \theta_i &\leq 1, & i &= 1, \dots, m, \\ \varphi_r &\geq 1, & r &= 1, \dots, s. \end{aligned}$$

از مدل ۵، می‌توان برای ارزیابی عملکرد و رتبه‌بندی  $DMU_p$  ها استفاده کرد زیرا جواب‌های مدل ۵، کارایی نسبی نمی‌باشند، زیرا امکان دارد به ازای هر  $DMU$ ،  $\rho^* < 1$  باشد، ولی با استفاده از جواب‌های مدل ۵، می‌توان کارایی نسبی  $DMU$ ها را به دست آورد. همچنین می‌توان برای به دست آوردن کارایی نسبی، روش دیگری ارائه دهیم که از تکنولوژی متفاوتی استفاده می‌کند. در این روش به ازای هر  $DMU$  مشاهده شده  $DMU'$  را با استفاده از روابط ۱، ۲، ۳ و ۴ به دست آورده و مجموعه امکان جدیدی ( $PPS'$ ) را با استفاده از  $DMU'$ ها می‌سازیم و با استفاده از راسل اصلاح شده عملکردشان را ارزیابی می‌کنیم.

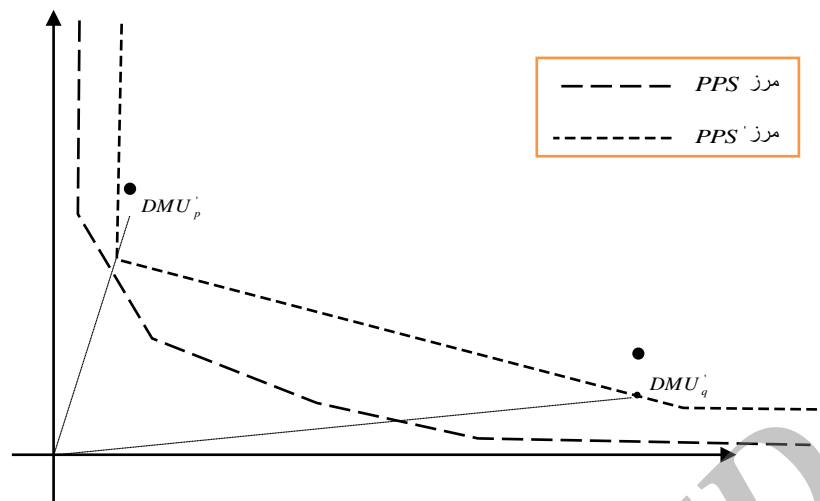
$$\text{Min } \rho = \frac{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \theta_i}{\frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \varphi_r}$$

s.t.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \lambda_j x'_{ij} &\leq \theta_i x'_{ip}, & i &\in A, B, \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j y'_{rj} &\geq \varphi_r y'_{rp}, & r &\in A', B', \\ \lambda_j &\geq 0, & j &= 1, \dots, n, \\ \theta_i &\leq 1, & i &= 1, \dots, m, \\ \varphi_r &\geq 1, & r &= 1, \dots, s. \end{aligned} \quad (6)$$

بدیهی است که از مدل ۶، می‌توان کارایی نسبی را به دست آورد. در ادامه با در نظر گرفتن شکل ۳، (مرز فارل) واضح است که رتبه‌بندی به دست آمده توسط مدل‌های ۵ و ۶، یکسان نخواهد بود، زیرا مدل ۵،  $DMU_p$  را نسبت به مرز  $PPS$  ارزیابی می‌کند، یعنی فاکتورهای تاثیر غیرمستقیم را فقط در واحد تصمیم گیرنده تحت ارزیابی، تاثیر می‌دهد، ولی مدل ۶،  $DMU_p$  را نسبت به مرز  $PPS'$  ارزیابی می‌کند، یعنی فاکتورهای تاثیر غیرمستقیم را در تمامی واحدهای تصمیم گیرنده تاثیر داده و سپس به ارزیابی می‌پردازد.

در انتهای این بخش به رد این ادعا می‌پردازیم که می‌توان فاکتورهای تاثیر غیرمستقیم را به عنوان ورودی‌ها و خروجی‌های جدید به  $DMU$ ها اضافه کرد و یا آن‌ها را به عنوان ورودی‌ها یا خروجی‌های کنترل پذیر در نظر گرفت. این ادعا متناقض با ذات و ماهیت این فاکتورها می‌باشد زیرا ارزیابی عملکرد شامل شناخت ضعف و قدرت ورودی‌ها و خروجی‌ها و ارائه برنامه و هدفی مناسب برای هر کدام از آن‌ها می‌باشد؛ ولی فاکتورهای تاثیر غیرمستقیم نسبت به هر  $DMU$  ثابت و منحصر به فرد بوده و به راحتی قابل تغییر نمی‌باشد یا اصلاً اجازه تغییر در آن فاکتورها را نداریم. مثلاً کیفیت محصول رابطه مستقیمی با تکنولوژی مورد استفاده دارد.



شکل ۳. مقایسه مجموعه امکان حاصل از روش اول و دوم

حال برای افزایش کیفیت باید تکنولوژی مورد استفاده را عوض کنیم که این خود در برخی موارد مستلزم صرف هزینه هنگفتی می‌باشد. به این دلیل از تغییر تکنولوژی صرف نظر کرده و فاکتور کیفیت را به عنوان یک فاکتور تاثیر غیر مستقیم در نظر می‌گیریم. در ادامه شاید ادعا شود که می‌توان فاکتورهای تاثیر غیر مستقیم را به صورت ورودی و یا خروجی کنترل پذیر (مثلا در مدل CCR) در نظر گرفت؛ بنابراین یکی از فاکتورهای تاثیر غیر مستقیم عضو مجموعه A را، به عنوان ورودی نام،  $DMU_p$  در نظر می‌گیریم که با توجه به ذات و ماهیت‌شان می‌تواند به صورت روابط ۷ یا ۸ باشد:

$$\begin{aligned} \lambda_1 L_{i_1} + \lambda_2 L_{i_2} + \dots + \lambda_n L_{i_n} &\leq L_{ip} \\ \lambda_1 L_{i_1} + \lambda_2 L_{i_2} + \dots + \lambda_n L_{i_n} &= L_{ip} \end{aligned} \quad (7)$$

یا

$$\begin{aligned} \lambda_1 L_{i_1} + \lambda_2 L_{i_2} + \dots + \lambda_n L_{i_n} &\leq \theta L_{ip} \\ \lambda_1 L_{i_1} + \lambda_2 L_{i_2} + \dots + \lambda_n L_{i_n} &= L_{ip} \end{aligned} \quad (8)$$

علت اضافه کردن قید دوم روابط ۷ یا ۸، به دلیل ثابت نگه داشتن فاکتور تاثیر غیر مستقیم در پنج مارک می‌باشد. از رابطه ۷ نتیجه می‌گیریم که:

$$L_{ip} \leq L_{ip} \Rightarrow 1 \leq 1$$

یعنی در این حالت با در نظر گرفتن این فاکتور به عنوان ورودی، تاثیری در کارایی نمی‌گذارد، پس ادعا رد می‌شود. حال از رابطه ۸ داریم:

$$L_{ip} \leq \theta L_{ip} \Rightarrow 1 \leq \theta \Rightarrow \theta = 1$$

در این حالت با در نظر گرفتن این فاکتور به عنوان ورودی تمامی DMUها کارا می‌شوند و در واقع تاثیر بقیه ورودی‌ها و خروجی‌ها را در کارایی از بین می‌برد که از نظر مدیریتی درست نمی‌باشد. پس در این حالت نیز ادعا رد می‌شود.

#### ۴ مثال عددی

در این بخش با ارایه مثالی عددی به تشریح مدل‌های پیشنهادی در بخش‌های قبل می‌پردازیم. ( $\alpha_r = \beta_i = 0/5$ )  
**مثال ۱:** جدول ۲ شامل ۱۲ تا  $DMU$  با ورودی‌ها، خروجی‌ها و فاکتورهای تاثیر غیرمستقیم بوده که  $L1 \in A$ ،  $L2 \in B$ ،  $K1 \in A'$  و  $K2 \in B'$  می‌باشد. داده‌های ورودی‌ها و خروجی‌ها واقعی؛ ولی داده‌های فاکتور تاثیر غیرمستقیم غیرواقعی می‌باشد؛ زیرا این فاکتورها برای اولین بار در این مقاله مطرح شده است و به دست آوردن داده‌های واقعی را می‌توان به عنوان کار تحقیقی جدید در نظر گرفت. حال با استفاده از مدل ۵ و مدل  $AP$  به رتبه‌بندی واحدهای مذکور می‌پردازیم:

جدول ۲. داده‌های مثال ۱

$DMU$	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
I1	۲۰	۱۹	۲۵	۲۷	۲۲	۵۵	۳۳	۳۱	۳۰	۵۰	۵۳	۳۸
I2	۱۵۱	۱۳۱	۱۶۰	۱۶۸	۱۵۸	۲۵۵	۲۳۵	۲۰۶	۲۴۴	۲۶۸	۳۰۶	۲۸۴
O1	۱۰۰	۱۵۰	۱۶۰	۱۸۰	۹۴	۲۳۰	۲۲۰	۱۵۲	۱۹۰	۲۵۰	۲۶۰	۲۵۰
O2	۹۰	۵۰	۵۵	۷۲	۶۶	۹۰	۸۸	۸۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۴۷	۱۲۰
L1	۰/۹	۰/۸	۰/۹۹	۰/۸۸	۰/۷۵	۰/۹۵	۰/۸۳	۰/۸۸	۰/۹	۰/۹	۰/۹۵	۰/۸۹
L2	۰/۵	۰/۰۵	۰/۰۳	۰/۰۷	۰/۰۵	۰/۱	۰/۲	۰/۰۹	۰/۰۹	۰/۲	۰/۳	۰/۰۱
K1	۰/۸	۰/۹۹	۰/۹	۰/۸۱	۰/۷	۰/۹	۰/۷۳	۰/۷۸	۰/۹	۰/۹۱	۰/۹۵	۰/۹
K2	۰/۱۱	۰/۰۵	۰/۱۳	۰/۰۹	۰/۰۸	۰/۱	۰/۲	۰/۰۶	۰/۱۵	۰/۲۵	۰/۰۶	۰/۱

جدول ۳. ارزیابی عملکرد به دست آمده از مدل ۵ و مدل  $AP$

$DMU$	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
مدل ۵	۰/۸۵	۰/۹۰	۰/۷۱	۰/۷۷	۰/۶۹	۰/۵۵	۰/۶۸	۰/۷۴	۰/۸۰	۰/۵۶	۰/۷۹	۰/۸۳
$AP$	۱/۴۰۸	۱/۱۸۴	۰/۸۸۳	۱/۰۱۶	۰/۷۶۳	۰/۸۳۵	۰/۹۰۲	۰/۷۹۶	۰/۹۶۰	۰/۸۷۱	۰/۹۵۵	۰/۹۵۸

با توجه به جدول ۳، رتبه‌بندی‌های متفاوتی برای مدل‌های ۵ و  $AP$  به دست می‌آید:

رتبه‌بندی دست آمده با استفاده از مدل ۵:

$$DMU_9 < DMU_{10} < DMU_7 < DMU_5 < DMU_3 < DMU_8 < DMU_6 < DMU_{11} < DMU_9 < DMU_{12} < DMU_1 < DMU_2$$

رتبه‌بندی به دست آمده با استفاده از مدل  $AP$ :

$$DMU_5 < DMU_8 < DMU_6 < DMU_{10} < DMU_3 < DMU_7 < DMU_{11} < DMU_{12} < DMU_9 < DMU_4 < DMU_2 < DMU_1$$

با توجه به نتایج به دست آمده، واضح است که در نظر گرفتن فاکتورهای تاثیر غیرمستقیم، نقش بسزایی در ارزیابی عملکرد واحدهای تصمیم‌گیرنده بازی می‌کند.

حال با استفاده از مدل‌های ۵ و ۶، به ارزیابی عملکرد این واحدها می‌پردازیم: برای به دست آوردن کارایی نسبی واحدهای تصمیم‌گیرنده از مدل ۵، کافی است کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده را بر بزرگ‌ترین کارایی به دست آمده تقسیم کنیم.

جدول ۴. کارایی نسبی به‌دست‌آمده از مدل‌های ۵ و ۶

DMU	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
مدل ۵	۰/۹۲	۰/۸۸	۰/۶۲	۰/۸۹	۰/۸۲	۰/۷۶	۰/۶۱	۰/۷۷	۰/۸۶	۰/۷۹	۱	۰/۹۴
مدل ۶	۱	۱	۰/۷۷	۰/۸۳	۰/۶	۰/۵۷	۰/۷۱	۰/۷۲	۰/۸۷	۰/۵۸	۱	۱

با توجه به جدول ۴ واضح است کارایی نسبی به‌دست‌آمده برای  $DMU$  ها با استفاده از مدل‌های ۵ و ۶، متفاوت می‌باشد؛ زیرا تکنولوژی‌های متفاوتی برای ساخت مدل‌های ۵ و ۶، استفاده شده است. از جمله تفاوت‌های موجود می‌توان به کارایی نسبی بودن  $DMU_1$  در مدل ۵ و کارایی نسبی بودن  $DMU_1$ ،  $DMU_2$ ،  $DMU_3$  و  $DMU_{11}$  در مدل ۶ اشاره کرد. از طرفی  $DMU_1$ ،  $DMU_2$  و  $DMU_3$  دارای مقدار کارایی نسبی بیش‌تری در مدل ۵ نسبت به مدل ۶ و بقیه واحدهای تصمیم‌گیرنده دارای مقدار کارایی نسبی بیش‌تری در مدل ۶ نسبت به مدل ۵ می‌باشند.

## ۵ نتیجه‌گیری

تشخیص فاکتورهای تاثیر غیرمستقیم، نقش بسزایی در ارزیابی عملکرد و رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده بازی می‌کند. از طرفی به علت ذات و ماهیت‌شان (غیر قابل تغییر بودن)، نمی‌توان این فاکتورها را به عنوان ورودی یا خروجی، یا به عنوان ورودی یا خروجی کنترل‌پذیر، در نظر گرفت. ما در این مقاله روش‌هایی برای ارزیابی عملکرد و رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده با استفاده از فاکتورهای تاثیر غیرمستقیم ارائه دادیم. در یکی از این روش‌ها با دست‌کاری در ورودی و خروجی‌های واحد تصمیم‌گیرنده، عملکرد واحد مربوطه را با استفاده از مدل راسل اصلاح شده ارزیابی کردیم و در روش دوم، دست‌کاری در داده‌ها را برای تمامی واحدهای تصمیم‌گیرنده اعمال کرده سپس به ارزیابی عملکرد واحدهای تصمیم‌گیرنده پرداختیم و سپس ثابت کردیم نمی‌توان این فاکتورها را به عنوان ورودی یا خروجی، یا به عنوان ورودی یا خروجی کنترل‌پذیر، در نظر گرفت. در انتها مثالی در تصدیق درستی این روش‌ها بیان کرده و نشان دادیم در نظر نگرفتن این فاکتورهای تاثیر غیرمستقیم تاثیر بسزایی در ارزیابی عملکرد می‌گذارد. از ضعف‌های موجود در مقاله، می‌توان به ارائه ندادن روشی برای پیدا کردن مقادیر عددی فاکتورهای تاثیر غیرمستقیم و واقعی نبودن داده‌های فاکتورهای تاثیر غیرمستقیم در مثال استفاده شده، اشاره کرد و برطرف کردن این ضعف‌ها می‌تواند به عنوان کار تحقیقی جدید پیش‌رو قرار گیرد.

## منابع

[۱۲] داودی، ل. ح.، جهانشاهلو، ه.، گودرزی، م. م.، (۱۳۸۹). اصلاح روش سکستون جهت رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده در تحلیل پوششی داده‌ها. تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، ۷(۳)، ۳۵-۴۰.

- [1] Solow, R. M., (1957). Technical change and the aggregate production function. The review of Economics and Statistics, 312-320.
- [2] Bjurek, H., Hjalmarsson, L., Forsund, F. R., (1990). Deterministic parametric and nonparametric estimation of efficiency in service production: A comparison. Journal of Econometrics, 46(1), 213-227.

- [3] Farrell, M. J., (1957). The measurement of productive efficiency. *Journal of the Royal Statistical Society, Series A (General)*, 253-290.
- [4] Charnes, A., Cooper, W. W., Rhodes, E., (1978). Measuring the efficiency of decision making units. *European journal of operational research*, 2(6), 429-444.
- [5] Banker, R. D., Charnes, A., Cooper, W. W., (1984). Some models for estimating technical and scale inefficiencies in Data Envelopment Analysis. *Management Science*, 30,1078-1092.
- [6] Cooper, W. W., Seiford, L. M., Tone, K., (2007). *Data envelopment analysis: a comprehensive text with models, applications, references and DEA-solver software*. Springer Science & Business Media.
- [7] Pastor, J. T., Ruiz, J. L., Sirvent, I., (1999). An enhanced DEA Russell graph efficiency measure. *European Journal of Operational Research*, 115(3), 596-607.
- [8] Sexton, T. R., Silkman, R. H., Hogan, A. J., (1986). Data envelopment analysis: Critique and extensions. *New Directions for Program Evaluation*, 32, 73-105.
- [9] Jahanshahloo, G. R., Lotfi, F. H., Jafari, Y., Maddahi, R., (2011). Selecting symmetric weights as a secondary goal in DEA cross-efficiency evaluation. *Applied Mathematical Modelling*, 35(1), 544-549.
- [10] Jahanshahloo G. R., Khodabakhshi, M., Lotfi, F. H., Goudarzi, M. M., (2011). A cross-efficiency model based on super-efficiency for ranking units through the TOPSIS approach and its extension to the interval case. *Mathematical and Computer Modelling*, 53(9), 1946-1955.
- [11] Wang, Y. M., Chin, K. S., (2010). A neutral DEA model for cross-efficiency evaluation and its extension. *Expert Systems with Applications*, 37(5), 3666-3675.
- [13] Andersen, P., Petersen, N. C., (1993). A procedure for ranking efficient units in data envelopment analysis. *Management science*, 39(10), 1261-1264.
- [14] Mehrabian, S., Alirezaee, M. R., Jahanshahloo, G. R., (1999). A complete efficiency ranking of decision making units in data envelopment analysis. *Computational optimization and applications*, 14(2), 261-266.
- [15] Entani, T., Maeda, Y., Tanaka, H., (2002). Dual models of interval DEA and its extension to interval data. *European Journal of Operational Research*, 136(1), 32-45.
- [16] Hosseinzadeh Lotfi, F., Jahanshahloo, G. R., Khodabakhshi, M., Rostamy-Malkhlifeh, M., Moghaddas, Z., Vaez-Ghasemi, M., (2013). A review of ranking models in data envelopment analysis. *Journal of Applied Mathematics*, <http://dx.doi.org/10.1155/2013/492421>.