

## یک نگرش ترکیب سطوح برای تخمین ماتریس مبدأ-مقصد در شبکه‌های بزرگ مقیاس

مریم ابارشی<sup>۱</sup>، مهدی زعفرانیه<sup>۲\*</sup>

۱- مدرس دانشگاه حکیم سبزواری، دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، گروه ریاضی کاربردی، سبزوار، ایران

۲- استادیار دانشگاه حکیم سبزواری، دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، گروه ریاضی کاربردی، سبزوار، ایران

رسید مقاله: ۱۴ تیر ۱۳۹۶

پذیرش مقاله: ۳۰ بهمن ۱۳۹۶

### چکیده

مسائل حمل و نقل معمولاً در شبکه‌هایی با ابعاد بزرگ بررسی می‌شوند و حل چنین مسائلی مستلزم صرف وقت و هزینه زیاد است. یک راهبرد موثر برای حل مسائل شبکه، تجزیه مساله با ابعاد بزرگ به مسائل فرعی کوچک‌تر است. در این مقاله برای اولین بار، مساله تخمین ماتریس مبدأ-مقصد در یک نگرش ترکیب سطوح مورد بررسی قرار می‌گیرد و میزان تقاضای سفر بین زوج‌های مبدأ-مقصد در یک شبکه بزرگ تخمین زده می‌شود. برای این کار، یک روش تجزیه در سه مرحله معرفی می‌شود که در هر یک از این مراحل جواب یک یا چند مساله در ابعاد کوچک‌تر تخمین زده می‌شود. در مرحله اول تقاضای سفر بین رئوس اصلی شبکه برآورد شده و در مرحله دوم الگوی جریان در شبکه‌های داخلی مربوط به هر یک از این رئوس تعیین می‌شود. در مرحله سوم با استفاده از اطلاعات دو مرحله قبل تقاضای جریان بین رئوس اولیه مبدأ-مقصد تعیین می‌شود.

**کلمات کلیدی:** شبکه حمل و نقل، ماتریس مبدأ-مقصد، نگرش کم‌ترین مربعات، ترکیب سطوح.

### ۱ مقدمه و تاریخچه

مساله تعیین یک الگوی جریان متعادل در شبکه‌های حمل و نقل که با نام مساله تخصیص ترافیک شناخته می‌شود، یکی از مسائل مهم در موضوعات مربوط به برنامه‌ریزی شبکه است. در این مساله تقاضای زوج‌های مبدأ-مقصد شبکه، به کوتاه‌ترین مسیرهای بین آن‌ها تخصیص داده می‌شود. در نتیجه، جریان عبوری از هر مسیر و نیز جریان ترافیک یال‌های شبکه تعیین می‌شوند. به عبارت دیگر در مساله تخصیص ترافیک، تقاضای زوج‌های مبدأ-مقصد ورودی و جریان ترافیک مسیرها و یال‌های شبکه خروجی هستند. گاه ممکن است، تقاضای بین زوج‌های مبدأ-مقصد نامشخص بوده و در مقابل ترافیک یال‌های شبکه در دسترس باشند، در این صورت می‌توان

\* عهده دار مکاتبات

آدرس الکترونیکی: zaferanieh@hsu.ac.ir

تقاضای بین زوج‌های مبدأ-مقصد را با استفاده از جریان ترافیک یال‌ها و سایر اطلاعات شبکه برآورد کرد. این مسأله، که مسأله تخمین ماتریس مبدأ-مقصد نامیده می‌شود، عکس مسأله تخصیص ترافیک تفسیر می‌شود و از مسایل مهم در زمینه حمل‌ونقل است. میزان جریان‌هایی که بین نواحی یا به عبارت دیگر زوج‌های مبدأ-مقصد مختلف شبکه جابه‌جا می‌شود، در ماتریسی به نام ماتریس مبدأ-مقصد ذخیره می‌شود. اطلاعات به دست آمده از ماتریس مبدأ-مقصد، در تصمیم‌گیری‌های مدیریتی راجع به مسایل شبکه از جمله احداث مسیر جدید و یا قراردادن مکان‌های تسهیلات بین راهی و حتی تعیین میزان اطلاعات جابه‌جا شده بین مراکز مختلف در شبکه‌های اینترنتی کاربرد دارند.

روش‌های سنتی تخمین ماتریس مبدأ-مقصد، روش‌های آمارگیری جاده‌ای هستند که روش‌های مستقیم نیز نامیده می‌شوند. این روش‌ها زمان‌بر و پرهزینه بوده و علاوه بر آن به هنگام‌سازی جواب حاصل از آن‌ها به دلیل وجود محدودیت‌های اجرایی و ظرفیتی در فواصل کوتاه زمانی به راحتی میسر نیست. در سال‌های اخیر، بسیاری از محققان با استفاده از اطلاعات موجود در شبکه مانند اندازه جریان ترافیک یال‌ها و یا نرخ جریان ورودی و خروجی به رؤس، مسأله تخمین ماتریس مبدأ-مقصد را در قالب مدل‌های ریاضی فرمول‌بندی کرده‌اند.

روش‌های نوین تخمین ماتریس مبدأ-مقصد، با استفاده از اطلاعات جریان یال‌ها، به دو دسته کلی تقسیم می‌شوند. در دسته اول از تأثیرات تراکم ترافیک بر شبکه صرف نظر شده و تنها دلیل انتخاب مسیر توسط کاربران، ویژگی‌های ذاتی آن است، به عبارت دیگر تراکم ترافیک تأثیری بر انتخاب مسیر نخواهد داشت. در این مدل که مدل تخصیص نسبی نامیده می‌شود، نسبت جریان جابه‌جا شده بین نواحی مختلف شبکه که از یال‌های مشخص استفاده می‌کنند، در ماتریسی به نام ماتریس تخصیص نسبی ذخیره می‌شود. در مقابل اگر تراکم ترافیک بر انتخاب مسیر توسط کاربران تأثیرگذار باشد، از مدل تخصیص کاربر-متعادل استفاده می‌کنیم که در آن اصل اول واردراپ صدق می‌کند [۱]. بر طبق اصل اول واردراپ شبکه ترافیکی زمانی در تعادل است که هیچ کاربری با تغییر مسیر به مسیری با هزینه کم‌تر دست نیابد. دومین اصل واردراپ نیز بیان می‌کند که در حالت تعادل میانگین هزینه (زمان سفر) کل شبکه کم‌ترین مقدار ممکن خواهد بود [۱].

اولین پژوهش‌ها بر روی ماتریس مبدأ-مقصد در نگرش تخصیص نسبی توسط ون‌زوین و ویلامسن [۲] و ویلامسن [۳] به ترتیب در سال‌های ۱۹۸۰ و ۱۹۸۱ انجام شده‌اند که ماتریس مبدأ-مقصد را در یک مدل بیش‌ترین آشوب<sup>۳</sup> تخمین زدند. در این مدل هدف پیدا کردن ماتریس مبدأ-مقصد است به طوری که جریان شبکه تا حد امکان به صورت متوازن بین زوج‌های مبدأ-مقصد پراکنده شده باشد و برای تمام زوج‌های شبکه سهم یکسانی در انتقال جریان در نظر گرفته شود. به عبارت دیگر هم زمان با این که محدودیت‌های مربوط به ترافیک یال برقرار هستند، بیش‌ترین آشفتگی یا بیش‌ترین آشوب در توزیع جریان شبکه با در نظر گرفتن تابع هدف لگاریتمی آشوب به دست می‌آید. اگر ترافیک یال‌های شبکه به صورت تقریبی و همراه با خطا محاسبه شده باشند، استفاده از آن‌ها در محدودیت‌های مسأله و به عنوان یک داده دقیق ممکن است یک مدل نشدنی را نتیجه دهد. به همین

<sup>3</sup> Maximum Entropy

دلیل کری و همکارانش [۴] در سال ۱۹۸۱ مدل کم‌ترین مربعات<sup>۴</sup> را معرفی کردند. در این مدل با استفاده از تابع هدف کم‌ترین مربعات، ماتریس مبدأ-مقصد و جریان ترافیک یال‌های حاصل از تخصیص آن به گونه‌ای برآورد می‌شوند که کم‌ترین مربعات خطا تا مقادیر هدف (مشاهده شده) به دست آید. ماتریس مبدأ-مقصد هدف (مشاهده شده) معمولاً از یک مدل قدیمی یا یک روش آماری به دست می‌آید. مدل کم‌ترین مربعات معمولی توسط کسکتا [۵] در سال ۱۹۸۴ و امسی نیل و هندریکسون [۶] در سال ۱۹۸۵ به مدل کم‌ترین مربعات تعمیم یافته توسعه داده شد.

مدل تخمین ماتریس مبدأ-مقصد در شبکه‌های متراکم، با در نظر گرفتن تأثیر ترافیک بر انتخاب مسیرها، اولین بار در سال ۱۹۷۷ توسط گوین [۷] معرفی شد. جورنستن و گوین [۸] در سال ۱۹۷۹ این مدل را با به کار بردن نگرش بیش‌ترین آشوب توسعه دادند. مدل‌های دیگری که شامل ترکیبی از مدل توزیع و مسأله تخصیص هستند، توسط فیسک و بویس [۹] در سال ۱۹۸۳ و فیسک [۱۰] در سال ۱۹۸۸ انجام شدند.

با استفاده از روش تخصیص کاربر-متعادل، علاوه بر این که ماتریس مبدأ-مقصد در شبکه‌های دارای تراکم ترافیک محاسبه می‌شود، میزان جریان عبوری از مسیرهای شبکه نیز حاصل می‌شود. در حالی که در تخصیص نسبی، مقادیر جریان مسیرها به صورت جداگانه تعیین نمی‌شوند. یکی از مدل‌هایی که ترافیک جریان مسیرها را به صورت مستقیم برآورد می‌کند، مدل برآوردگر جریان مسیر است. این مدل‌ها زمانی مورد استفاده قرار می‌گیرند که چگونگی توزیع جریان مسیرها نسبت به چگونگی توزیع تقاضای زوج‌های مبدأ-مقصد در اولویت باشد.

مسأله برآوردگر جریان مسیر توسط شرالی و همکارانش [۱۱] در سال ۱۹۹۴ و بل و شیلد [۱۲] در سال ۱۹۹۵ معرفی و سپس توسط چن و همکارانش [۱۳، ۱۴، ۱۵] در سال‌های ۲۰۰۵، ۲۰۰۹ و ۲۰۱۰ توسعه داده شد. شرالی و همکارانش [۱۱] در سال ۱۹۹۴ برای اولین بار، مدل برآوردگر جریان مسیرها را با در نظر گرفتن هزینه ثابت برای یال‌های شبکه، به صورت یک مسأله برنامه‌ریزی خطی فرمول‌بندی کرده و با استفاده از روش تولید ستونی جواب آن را ارائه نمودند. بل و همکارانش [۱۶] در سال ۱۹۹۷ این مدل را به مدل غیرخطی آشوب با محدودیت‌های خطی توسعه دادند. ابارشی و همکارانش [۱۷] در سال ۲۰۱۶ مسأله برآوردگر جریان مسیر در نگرش بیش‌ترین آشوب را با در نظر گرفتن جریان‌های تفکیک شده در شبکه مورد بررسی قرار داده و یک الگوریتم *l*-شکل را برای حل آن به کار بردند.

مدل‌های دوسطحی دسته دیگری از مدل‌های برآورد ماتریس مبدأ-مقصد هستند که در شبکه‌های متراکم استفاده می‌شوند. این مدل‌ها شامل دو مسأله برنامه‌ریزی با نام‌های مسأله سطح بالاتر (پیشرو) و مسأله سطح پایین‌تر (پیرو) هستند که جواب مسأله سطح پایین‌تر جزئی از محدودیت‌های مسأله سطح بالاتر در نظر گرفته می‌شود. به عبارت دیگر تصمیم‌گیرنده سطح پایین‌تر، جواب بهینه خود را با توجه به انتخاب تصمیم‌گیرنده سطح بالاتر تعیین می‌کند [۱۸]. مدل دوسطحی تخمین ماتریس مبدأ-مقصد، مسأله ماتریس مبدأ-مقصد را با مسأله تخصیص ترافیک ترکیب می‌کند. در این مدل محدودیت مربوط به تخصیص کاربر-متعادل به صورت یک مسأله

<sup>4</sup> Least squares

تخصیص در سطح پایین تر و به عنوان جزئی از محدودیت‌های مسأله سطح بالاتر که معمولاً مدل کم‌ترین مربعات است، در نظر گرفته می‌شود. یانگ [۱۹] در سال ۱۹۹۵ و ماهر و ژنگ [۲۰] در سال ۱۹۹۹ یک مدل پیشرو-پیرو استکلبرگ را برای تخمین ماتریس مبدأ-مقصد در یک نگرش دوسطحی معرفی کردند. در سطح اول این مدل، یک مسأله کم‌ترین مربعات تعمیم‌یافته و در سطح دوم آن یک مسأله تخصیص به عنوان جزئی از محدودیت‌های مسأله سطح یک در نظر گرفته شده است.

با توجه به عدم قطعیت در پدیده‌های مربوط به شبکه‌های حمل‌ونقل مانند جریان ترافیک و یا زمان عبور یال‌ها در شرایط مختلف، در نظر گرفتن مدل‌های احتمالی در مسأله ماتریس مبدأ-مقصد متداول و پرکاربرد است. ماهر [۲۱] در سال ۱۹۸۳ و اسپیس [۲۲] در سال ۱۹۸۷ با استفاده از یک ماتریس هدف، به ترتیب ماتریس مبدأ-مقصد را در نگرش‌های بیزی و بیش‌ترین احتمال بررسی کردند. هازلتون در سال ۲۰۱۰ مسأله ماتریس مبدأ-مقصد را در نگرش بیزی با در نظر گرفتن یک زنجیره مارکوف برای تعداد مسافری سوار و پیاده شده در ایستگاه‌های متوالی، مورد بررسی قرار داد [۲۳]. در سال ۲۰۱۳ پاری و هازلتون با استفاده از مشاهدات روزانه جریان ترافیک یال‌های شبکه، الگوی رفتاری جریان روزانه شبکه را در یک نگرش بیزی بررسی کردند [۲۴].

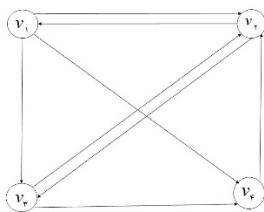
بسیاری از مسایل واقعی حمل‌ونقل و تخصیص ترافیک، در شبکه‌هایی با تعداد زیادی رأس و یال بررسی می‌شوند. چنین مسایلی می‌توانند به صورت ترکیبی از شبکه‌های کوچک‌تر درون یک شبکه بزرگ‌تر در نظر گرفته شوند [۲۵]. به عبارت دیگر در یک شبکه بزرگ با تعداد زیادی رأس، می‌توان دسته‌هایی از یال‌ها و رئوس شبکه در فاصله نزدیک به یک‌دیگر را به صورت یک واحد مجزا در یک رأس در نظر گرفت. به این ترتیب شبکه اولیه به شبکه‌های کوچک‌تر دسته‌بندی می‌شود که با تعدادی یال اصلی به یک‌دیگر متصل هستند. برای مثال، هر یک از کلان‌شهرهای یک ناحیه به همراه شهرستان‌ها و روستاهای اطراف خود می‌توانند به صورت رئوس مجزایی در نظر گرفته شوند که به یک‌دیگر متصل بوده و درون هر یک از این رئوس یک شبکه داخلی با رئوس و یال‌های متناظر وجود دارد.

هم‌چنین برای ورود و خروج از این کلان‌شهرها، معمولاً از یک سری نقاط ورودی و خروجی استفاده می‌شود که ما آن‌ها را نقاط گذر<sup>۵</sup> می‌نامیم. این نقاط گذر هر یک سهمی در انتقال جریان از داخل کلان‌شهر به بیرون و یا در جهت عکس خواهند داشت. در این مقاله درصدد هستیم تا ماتریس مبدأ-مقصد را در یک شبکه متشکل از تعدادی رأس اصلی که هر یک شامل شبکه‌ای از رئوس و یال‌های داخلی هستند، برآورد کنیم. از طرفی فرض می‌کنیم که ترافیک مشاهده شده یال‌های متصل‌کننده رئوس اصلی و نیز سهم هر یک از نقاط گذر در انتقال جریان به داخل یا بیرون رأس اصلی مشخص باشد. به علاوه، فرض می‌کنیم مقادیر هدف (مشاهده شده) جریان انتقالی بین نقاط گذر هر یک از رئوس اصلی و رئوس مبدأ (مقصد) درون آن در دسترس باشند.

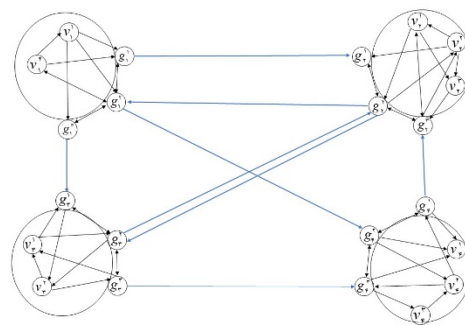
با در نظر گرفتن یک نگرش ترکیبی برای مسایل با اندازه بزرگ و تبدیل آن‌ها به چندین زیرمسأله کوچک‌تر، ابعاد مسأله کاهش پیدا کرده و به دنبال آن زمان دسترسی به جواب بهینه نیز بهبود خواهد یافت. این نگرش تاکنون برای مسایل مکانیابی از جمله مسأله  $p$ -میان مورد بررسی قرار گرفته است [۲۵]. با توجه به این که بعد شبکه‌های

<sup>5</sup> Gate point

حمل و نقل معمولاً بسیار بزرگ است، بررسی نگرش ترکیب سطوح برای مسایل مربوط به آن و به خصوص مسأله تخمین ماتریس مبدأ-مقصد، می تواند نقش به سزایی در کاربردی کردن مدل های حمل و نقل مطرح شده و پیاده سازی آن ها ایفا کند. در ادامه این نگرش برای شبکه های با داده های قطعی و با ابعاد بزرگ مورد بررسی قرار می گیرد. برای تعیین ماتریس مبدأ-مقصد، از یک روش سه مرحله ای استفاده شده که در هر مرحله یک یا چند مسأله تخمین ماتریس مبدأ-مقصد در اندازه های کوچک تر نسبت به شبکه اصلی بررسی می شوند. در ادامه، در بخش دوم فرمول بندی مسأله ماتریس مبدأ-مقصد با استفاده از تابع هدف برآورد کم ترین مربعات خطا رایج و روش حل آن با استفاده از روش ترکیب سطوح بررسی می شود. در بخش سوم مثال های عددی برای نشان دادن کارایی روش پیشنهادی مطرح شده و در بخش آخر نتیجه گیری و پیشنهادات برای کارهای آتی بیان می شوند.



شکل ۱.ب. شکل ساده شده شبکه (الف)



شکل ۱.الف. شبکه با چهار رأس اصلی

## ۲ فرمول بندی مسأله

فرض کنید  $G = (N, E)$  یک شبکه با مجموعه رئوس  $N$  و مجموعه یال های  $E$  باشد. هر یک از رئوس  $v_i; i = 1, \dots, |N|$  شامل یک شبکه حمل و نقل  $G_i = (N_i, E_i)$  است که رئوس داخلی این شبکه با  $v_i^k \in N_i; k = 1, \dots, |N_i|$  و یال های داخلی متصل کننده دو رأس  $v_i^k$  و  $v_i^l$  با  $e_{i,k}^l \in E_i$  نشان داده می شوند. رئوس  $v_i \in N$  که هر یک شامل شبکه ای از رئوس و یال های داخلی هستند را رئوس اصلی و یال های متصل کننده آن ها را یال های اصلی شبکه می نامیم. یال اصلی متصل کننده دو رأس اصلی  $v_i$  و  $v_j$  را با  $e_{i,j}$  نشان می دهیم. هم چنین رئوس درون شبکه های  $N_i$  متناظر با رئوس اصلی را، رئوس فرعی و یال های متصل کننده آن ها را یال های فرعی نامیم.

به علاوه در هر یک از شبکه های  $N_i$  تعدادی نقطه گذر برای انتقال جریان وجود دارد که با  $g_i^t \in N_i$  نمایش داده می شوند. برای مثال در شبکه شکل (۱) رئوس اصلی  $v_i; i = 1, \dots, 4$  هستند که رئوس فرعی  $v_i^k$  و نقاط گذر  $g_i^t$  در شبکه های  $N_i; i = 1, \dots, 4$  متناظر رئوس اصلی مشخص شده اند. اگر از رئوس و یال های فرعی درون  $N_i$  ها صرف نظر کنیم و آن ها را در شبکه نشان ندهیم، شبکه اصلی به شبکه کوچک تری کاهش پیدا خواهد کرد (شکل های (الف) و (ب) را ببینید). در شکل (ب) یال اصلی  $e_{1,2}$  رئوس اصلی  $v_1$  و  $v_2$  را به یک دیگر متصل می کند.

فرض می‌کنیم کل جریان‌های خروجی از رئوس اصلی توسط نقاط گذر خروجی از آن رأس خارج می‌شوند. به همین ترتیب کل جریان‌های ورودی به رئوس اصلی نیز توسط نقاط گذر ورودی تأمین می‌شوند. اگر سهم نسبی هر یک از نقاط گذر خروجی یا ورودی در انتقال جریان رأس اصلی  $v_i$  مشخص باشد و علاوه بر آن میزان کل جریان خارج شده و کل جریان وارد شده به این رأس نیز در دسترس باشد، می‌توان میزان جریانی که توسط هر یک از نقاط گذر به رأس وارد و یا از آن خارج می‌شود، را مشخص نمود.

میزان سهم خروجی نقطه گذر  $g_i^t$  در انتقال جریان از رأس اصلی  $v_i$  به بیرون را با  $p_i^t$  و میزان سهم ورودی آن در انتقال جریان از بیرون رأس  $v_i$  به درون آن را با  $q_i^t$  نشان می‌دهیم؛ بنابراین اگر  $O_i$  و  $D_i$  به ترتیب کل جریان خروجی و ورودی به راس  $v_i$  باشند، آنگاه جریانی که از درون رأس اصلی  $v_i$  توسط نقطه گذر  $g_i^t$  به بیرون منتقل می‌شود، برابر با  $p_i^t O_i$  است و جریانی که توسط نقطه گذر  $g_i^t$  از بیرون رأس  $v_i$  به درون آن منتقل می‌شود، برابر با  $q_i^t D_i$  است.

جدول ۱. نمادهای مورد نیاز

مجموعه رئوس اصلی شبکه	$N$
مجموعه یال‌های اصلی متصل‌کننده رئوس اصلی	$E$
شبکه متناظر با رأس اصلی $v_i \in N$	$N_i$
$t$ -امین رأس فرعی در شبکه $N_i$	$v_i^t$
$t$ امین نقطه گذر در شبکه $N_i$	$g_i^t$
جریان ورودی به شبکه $N_i$	$D_i$
جریان خروجی از شبکه $N_i$	$O_i$
سهم $t$ امین نقطه گذر در شبکه $N_i$ برای انتقال جریان از درون شبکه به بیرون	$p_i^t$
سهم $t$ امین نقطه گذر در شبکه $N_i$ برای انتقال جریان از بیرون شبکه به درون	$q_i^t$
جریانی که توسط نقطه گذر $g_i^t$ از بیرون شبکه $N_i$ به درون آن منتقل می‌شود	$d_{i,t}$
جریانی که توسط نقطه گذر $g_i^t$ از درون شبکه $N_i$ به بیرون آن منتقل می‌شود	$o_{i,t}$
تقاضای جریان بین زوج مبدأ-مقصد اصلی $(v_i, v_j) \in N \times N$	$x_{i,j}$
تقاضای جریان بین زوج مبدأ-مقصد اولیه $(r_i, s_j) \in N_i \times N_j$	$x_{r_i, s_j}$
تقاضای جریان بین مبدأ $r_i$ و $t$ امین نقطه گذر خروجی در شبکه $N_i$	$x_{r_i, g_i^t}$
تقاضای جریان بین $t$ امین نقطه گذر ورودی شبکه $N_i$ و مقصد $s_j$	$x_{g_i^t, s_j}$
جریان مشاهده شده بین مبدأ $r_i$ و $t$ امین نقطه گذر خروجی شبکه $N_i$	$\bar{x}_{r_i, g_i^t}$
جریان مشاهده شده بین $t$ امین نقطه گذر ورودی شبکه $N_i$ و مقصد $s_j$	$\bar{x}_{g_i^t, s_j}$
ترافیک مشاهده شده یال اصلی $e \in E$	$\bar{a}_e$
جریان مسیر $k$ بین زوج مبدأ-مقصد $(r_i, s_j)$	$f_{r_i, s_j}^k$
مجموعه $K$ - کوتاه‌ترین مسیرهای بین زوج مبدأ-مقصد $(r_i, s_j)$	$K_{r_i, s_j}$

اگر نسبت انتقال جریان از نقاط گذر مختلف شبکه با گذشت زمان تغییر نکند، با استفاده از یک نمونه گیری آماری یا مدل های قدیمی مربوط به الگوی جریان شبکه، می توانیم سهم هریک از نقاط گذر و در نتیجه میزان جریان انتقال یافته توسط آن ها به بیرون و درون شبکه را بیابیم. این اطلاعات در تعیین الگوی جریان داخلی شبکه های متناظر به رئوس اصلی مورد استفاده قرار می گیرند.

در این مقاله فرض می شود که علاوه بر ترافیک مشاهده شده یال های اصلی، میزان تقاضای هدف (مشاهده شده) بین رئوس درونی هریک از شبکه های  $N_i$  و نقاط گذر این شبکه نیز در دسترس باشد. هم چنین سهم نسبی هریک از نقاط گذر در انتقال جریان، یعنی مقادیر  $p_i^t$  و  $q_i^t$  در هر یک از شبکه های  $N_i$  مشخص باشد. استفاده از ترافیک مشاهده شده یال های اصلی به جای ترافیک تمام یال های شبکه، حجم محاسبات لازم برای تعیین داده های مسأله را کاهش خواهد داد، به ویژه این که در شبکه های بزرگ مقیاس، تعداد کل یال های فرعی درون شبکه ها معمولاً بسیار بیشتر از تعداد یال های اصلی شبکه است.

نمادهای مورد استفاده در این مقاله در جدول (۱) خلاصه شده اند. با در نظر گرفتن یک ماتریس مبدأ-مقصد هدف برای تقاضای بین رئوس داخلی هر شبکه و نقاط گذر آن و به کار بردن مدل کم ترین مربعات، جریان ترافیک شبکه را به گونه ای تخمین می زنیم که علاوه بر برآورده کردن محدودیت مربوط به ترافیک یال های اصلی، کم ترین مربعات خطا را تا مقادیر هدف از پیش تعیین شده به دست آوریم. مدل اصلی مسأله در نگرش کم ترین مربعات به صورت مدل (۱) معرفی می شود:

$$MP : \min \sum_i \sum_t \left( \sum_{r_i \in N_i} (x_{r_i, g_i^t} - \bar{x}_{r_i, g_i^t})^2 + \sum_{s_i \in N_i} (x_{g_i^t, s_i} - \bar{x}_{g_i^t, s_i})^2 \right) \quad (1)$$

$$\sum_j \sum_{s_j \in N_j} x_{r_i, s_j} - \sum_t x_{r_i, g_i^t} = 0, \forall i, \forall r_i \in N_i, \quad (2)$$

$$\sum_j \sum_{r_j \in N_j} x_{r_j, s_i} - \sum_t x_{g_i^t, s_i} = 0, \forall i, \forall s_i \in N_i, \quad (3)$$

$$\sum_{i,j} \sum_{(r_i, s_j) \in N_i \times N_j} \sum_{k \in K_{r_i, s_j}} f_{r_i, s_j}^k \delta_{e,k} = \bar{a}_e, \forall e \in E, \quad (4)$$

$$\sum_{k \in K_{r_i, s_j}} f_{r_i, s_j}^k = x_{r_i, s_j} \quad \forall (r_i, s_j) \in N_i \times N_j, \quad \forall i, j, \quad (5)$$

$$f_{r_i, s_j}^k \geq 0 \quad \forall i, j, \forall (r_i, s_j) \in N_i \times N_j, \forall k \in K_{r_i, s_j}.$$

که  $\bar{a}_e$  ترافیک مشاهده شده یال اصلی  $e \in E$ ،  $x_{r_i, g_i^t}$  تقاضای سفر بین مبدأ  $r_i \in N_i$  و خروجی  $g_i^t$  و  $\bar{x}_{r_i, g_i^t}$  مقدار مشاهده شده آن است. به ترتیب مشابه  $x_{g_i^t, s_i}$  تقای سفر بین ورودی  $g_i^t$  و مقصد  $s_i \in N_i$  و  $\bar{x}_{g_i^t, s_i}$  مقدار مشاهده شده آن است.  $x_{r_i, s_j}$  تقاضای زوج مبدأ-مقصد  $(r_i, s_j)$  و  $f_{r_i, s_j}^k$  جریان مسیر  $k$  ام بین زوج مبدأ-مقصد  $(r_i, s_j)$  است. زوج  $(r_i, s_j)$  را یک زوج مبدأ-مقصد اولیه می نامیم. هم چنین  $K_{r_i, s_j}$  مجموعه  $K$ -کوتاه ترین

مسیرهای بین  $(r_i, s_j)$  است که توسط الگوریتم  $K$ -کوتاه‌ترین مسیر اپستین [۲۶] تعیین می‌شوند.  $\delta_{e,k}$  شاخص یال و مسیر است، اگر یال  $e$  در مسیر  $k$  وجود داشته باشد،  $\delta_{e,k} = 1$  و در غیر این صورت صفر است. توجه داریم که  $\delta_{e,k}$  مقدار مشخصی است که توسط الگوریتم  $K$ -کوتاه‌ترین مسیر تعیین می‌شود. این شاخص ارتباط بین جریان عبوری از یال‌ها و جریان مسیرهای بین زوج‌های مبدأ-مقصد یا به عبارت دیگر ارتباط بین جریان عبوری از یال‌ها و تقاضای زوج‌های مبدأ-مقصد را مشخص می‌کند.

محدودیت (۲) بیان می‌کند که برای هر یک از رئوس مبدأ  $r_i \in N_i$ ، مجموع جریان خروجی از  $r_i$  برابر با کل جریان انتقالی بین  $r_i$  و خروجی‌های موجود در شبکه  $N_i$  است. برای مثال در شبکه شکل (۱) اگر رئوس مقصد متناظر با رأس  $v_1^2$  را  $v_4^1$  و  $v_4^2$  در نظر بگیریم، در این صورت رابطه  $x_{v_1^2, v_4^1} + x_{v_1^2, v_4^2} = x_{v_1^2, s_1} + x_{v_1^2, s_2} + x_{v_1^2, s_3}$  را خواهیم داشت. هم‌چنین محدودیت (۳) برابری مجموع جریان ورودی به  $s_i$  با کل جریان انتقالی بین ورودی‌های موجود در شبکه  $N_i$  و  $s_i$  را نشان می‌دهد. محدودیت (۴) نشان می‌دهد که مجموع جریان عبوری از هر یک از یال‌های اصلی با ترافیک مشاهده شده آن برابر است. محدودیت (۵) نیز بیان می‌کند که تقاضای جریان بین یک زوج مبدأ-مقصد برابر با مجموع جریان عبوری از مسیرهای متصل کننده آن زوج است.

مسئله ماتریس مبدأ-مقصد در قالب مدل کم‌ترین مربعات با استفاده از روش‌هایی چون ضربگرهای لاگرانژ، مجموعه محدودیت‌های فعال و سایر روش‌های حل مسایل برنامه‌ریزی درجه دوم قابل حل است [۲۷ و ۵]. در شبکه‌های بزرگ با تعداد زوج‌های مبدأ-مقصد و نیز تعداد یال‌های زیاد، تعداد مسیرهای شبکه و در نتیجه متغیرهای مسئله افزایش می‌یابد و محاسبات برای حل مدل بسیار زمان‌بر خواهد بود. در ادامه روشی را معرفی می‌کنیم که در آن به جای حل مسئله در قالب یک شبکه بزرگ، مسئله را در سه مرحله حل نموده که در دو مرحله نخست یک یا چند مسئله ماتریس مبدأ-مقصد در شبکه‌های کوچک‌تر حل می‌شوند و سپس در مرحله سوم با حل یک دستگاه معادلات خطی و یا مسئله کم‌ترین مربعات متناظر با آن جواب مسئله اصلی حاصل می‌شود.

**۲.۱ مرحله اول.** در این مرحله میزان جریان انتقال یافته بین رئوس اصلی شبکه تخمین زده می‌شود. در مدل ارائه شده در مسئله (۶)، زوج‌های مبدأ-مقصد متناظر با رئوس اصلی شبکه هستند. به عبارت دیگر زوج  $(v_i, v_j)$  یک زوج مبدأ-مقصد برای مدل  $SP1$  است، اگر یک زوج مبدأ-مقصد اولیه  $(r_i, s_j)$  در مدل  $MP$  وجود داشته باشد که  $r_i \in N_i$  و  $s_j \in N_j$  باشند. متغیر  $x_{i,j}$  میزان تقاضای سفر بین زوج رئوس اصلی  $(v_i, v_j)$  را نشان می‌دهد. در مدل  $MP$  محدودیت (۴) مربوط به ترافیک مشاهده شده یال‌های اصلی است که در مدل  $SP1$  به صورت محدودیت (۷) نوشته شده است. در حقیقت در محدودیت (۴) برابری جریان ترافیک یال اصلی  $e \in E$  با مجموع جریان مسیرهای بین زوج‌های مبدأ-مقصد اولیه گذرنده از آن یال را نشان می‌دهیم. در مدل  $SP1$  جریان ترافیک هر یال اصلی برابر با مجموع جریان مسیرهای بین زوج‌های  $(v_i, v_j)$  گذرنده از آن یال



خواهد بود، این رابطه در محدودیت (۷) بیان شده است. سایر محدودیت‌های مدل  $MP$  در مسأله جدید نوشته نمی‌شوند.

$$SP1: \min \sum_i (\sum_j x_{i,j} - \sum_t \sum_{r_i} \bar{x}_{r_i, g_i^t})^2 + \sum_j (\sum_i x_{j,i} - \sum_t \sum_{s_j} \bar{x}_{g_j^t, s_j})^2 \quad (6)$$

$$\sum_{(i,j) \in N \times N} \sum_{k \in K_{i,j}} f_{i,j}^k \delta_{e,k} = \bar{a}_e, e \in E, \quad (7)$$

$$\sum_{k \in K_{i,j}} f_{i,j}^k = x_{i,j}, \forall (i,j) \in N \times N, \quad (8)$$

$$f_{i,j}^k \geq 0, \forall (i,j) \in N \times N, \forall k.$$

توجه داریم مقدار متغیر  $x_{i,j}$  برابر با مجموع تقاضای زوج‌های مبدأ-مقصد اولیه متعلق به مجموعه  $N_i \times N_j$  است. در واقع هر کدام از زوج‌های مبدأ-مقصد  $(v_i, v_j)$  شامل تعدادی زوج مبدأ-مقصد اولیه هستند که با  $(r_i, s_j) \in N_i \times N_j$  نمایش داده می‌شوند. رابطه بین  $x_{i,j}$  و  $x_{r_i, s_j}$  ها به صورت  $\bar{x}_{i,j} = \sum_{(r_i, s_j) \in N_i \times N_j} x_{r_i, s_j}$  نوشته می‌شود. در تابع هدف مسأله (۶) مقادیر  $x_{i,j}$  را به گونه‌ای برآورد می‌کنیم که مجموع مقادیر ورودی (خروجی) به یک رأس کم‌ترین مربعات خطا را تا مجموع مقادیر هدف ورودی (خروجی) از طریق نقاط گذر به آن رأس داشته باشد. مجموعه  $K_{i,j}$  مجموعه  $K$ -کوتاه‌ترین مسیرهای بین زوج  $(v_i, v_j)$  است. اگر یال اصلی  $\ell$  در مسیر  $k$  وجود داشته باشد، مقدار ثابت  $\delta_{e,k}$  یک و در غیر این صورت مقدار ثابت صفر را اختیار خواهد کرد.

در زیر مسأله  $SP1$ ، هدف تعیین میزان تقاضای جریان بین رئوس اصلی شبکه با استفاده از جریان ترافیک یال‌های اصلی و نیز مقادیر هدف ورودی (خروجی) رئوس اصلی از طریق نقاط گذر است. تقاضای زوج‌های مبدأ و مقصد اولیه درون رئوس اصلی، یعنی  $\bar{x}_{r_i, s_j}$  ها، با استفاده از جواب‌های به دست آمده در زیر مسأله  $SP1$ ، در سطوح دو و سه توسط زیر مسأله‌های  $SP2^i$  و  $SP3^i$  تعیین می‌شوند.

با توجه به این که در مسأله (۶)، مقادیر  $\delta_{e,k}$  ثابت و مشخص هستند، مدل  $SP1$  یک مدل محدب با محدودیت‌های خطی است که روش‌های حل مسایل برنامه‌ریزی محدب مانند روش ضرایب لاگرانژ را می‌توان برای آن به کار برد [۲۷]. اکنون با توجه به مقادیر  $x_{i,j}$  حاصل از مسأله (۶)، مجموع جریان ورودی و خروجی رئوس اصلی شبکه از روابط زیر حاصل می‌شوند:

$$O_i = \sum_j x_{i,j}, D_i = \sum_j x_{j,i}$$

هم‌چنین با استفاده از ضرایب  $p_i^t$  و  $q_i^t$  می‌توان مقادیر  $O_{i,t}$  و  $d_{i,t}$  را از روابط  $d_{i,t} = q_i^t D_i$  و  $O_{i,t} = p_i^t O_i$  تعیین نمود. برای مثال اگر میزان جریان ورودی به رأس اصلی  $v_1$  در شبکه مربوط به شکل (۱)،  $D_1$  باشد و سهم ورودی‌های  $g_1^1, g_1^2, g_1^3$  در انتقال جریان به درون رأس اصلی  $v_1$  به ترتیب  $q_1^1 = 0/3$  و  $q_1^2 = 0/5$  و  $q_1^3 = 0/2$  باشد، جریانی که از طریق نقطه گذر  $g_1^1$  وارد  $v_1$  می‌شود، برابر با  $d_{1,1} = 0/3 D_1$ ، جریانی که از طریق نقطه گذر  $g_1^2$  وارد راس  $v_1$  می‌شود، برابر با  $d_{1,2} = 0/5 D_1$  و جریانی که از طریق نقطه گذر  $g_1^3$  وارد  $v_1$  می‌شود، برابر با

است. به عبارت دیگر جریان منتقل شده بین نقطه گذر  $g_1^1$  و مقصدهای درون راس  $v_1$  برابر  $0/3D_1$ ، جریان منتقل شده بین نقطه گذر  $g_1^2$  و مقصدهای درون راس  $v_1$  برابر  $0/5D_1$  و جریان منتقل شده بین نقطه گذر  $g_1^3$  و مقصدهای درون راس  $v_1$  برابر  $0/2D_1$  است. این مقادیر به عنوان داده ورودی در مرحله دوم در نظر گرفته می‌شوند.

**۲.۲ مرحله دوم.** در دومین مرحله، الگوی جریان در هر یک از شبکه‌های حمل و نقل داخلی  $N_i$  متناظر با رئوس اصلی تخمین زده می‌شود. به عبارت دیگر میزان تقاضای جریان بین نقاط گذر  $g_i^t$  و رئوس فرعی مقصد  $s_i \in N_i$  (مبدأ  $r_i \in N_i$ ) مشخص می‌شود. مسأله زیر برای تعیین الگوی جریان در شبکه متناظر با رأس اصلی  $v_i$  در نظر گرفته می‌شود:

$$SP^i : \min \sum_{r_i \in N_i} \sum_t (x_{r_i, g_i^t} - \bar{x}_{r_i, g_i^t})^2 + \sum_{s_i \in N_i} \sum_t (x_{g_i^t, s_i} - \bar{x}_{g_i^t, s_i})^2 \quad (9)$$

$$\sum_{r_i \in N_i} x_{r_i, g_i^t} = o_{i,t}, \forall t, \quad (10)$$

$$\sum_{s_i \in N_i} x_{g_i^t, s_i} = d_{i,t}, \forall t, \quad (11)$$

$$x_{g_i^t, s_i}, x_{r_i, g_i^t} \geq 0$$

در مدل فوق  $x_{r_i, g_i^t}$  تقاضای سفر بین مبدأ  $r_i$  و نقطه گذر خروجی  $g_i^t$  و  $x_{g_i^t, s_i}$  تقاضای سفر بین نقطه گذر ورودی  $g_i^t$  و مقصد  $s_i$  را نشان می‌دهد. محدودیت (۱۰) بیان می‌کند که کل جریان وارد شده به نقطه گذر  $g_i^t$  از درون شبکه  $N_i$  برابر با جریانی است که توسط این نقطه از شبکه  $N_i$  خارج می‌شود. محدودیت (۱۱) نیز به صورت مشابه جریان ورودی به شبکه  $N_i$  از طریق نقطه گذر  $g_i^t$  را نشان می‌دهد. با حل مدل  $SP^i$  برای هر یک از شبکه‌های  $N_i$  با استفاده از روش‌های حل مسایل برنامه‌ریزی مجدد، مقادیر  $x_{r_i, g_i^t}$  و  $x_{g_i^t, s_i}$  تعیین می‌شوند. این مقادیر در مرحله سوم برای تعیین تقاضای زوج‌های مبدأ-مقصد اولیه استفاده می‌شوند.

**۳.۲ مرحله سوم.** اکنون در آخرین مرحله کافی است با استفاده از جواب‌های به دست آمده از مراحل یک و دو، تقاضای سفر بین زوج‌های مبدأ-مقصد اولیه تعیین گردد. می‌دانیم برای هر مبدأ  $r_i \in N_i$  و هر مقصد  $s_j \in N_j$  محدودیت‌های زیر برقرار هستند:

$$\sum_k \sum_{s_k \in N_k} x_{r_i, s_k} = \sum_{t \in N_i} x_{r_i, g_i^t} \quad (12)$$

$$\sum_k \sum_{r_k \in N_k} x_{r_k, s_j} = \sum_{t \in N_j} x_{g_j^t, s_j} \quad (13)$$

برای هر زوج مبدأ-مقصد اصلی  $(v_i, v_j)$  رابطه  $\sum_{(r_i, s_j) \in N_i \times N_j} x_{r_i, s_j} = x_{i,j}$  نیز برقرار است، که در آن  $(r_i, s_j)$  ها زوج‌های مبدأ-مقصد اولیه متناظر با زوج  $(v_i, v_j)$  هستند. اگر تنها یک زوج مبدأ-مقصد اولیه  $(r_i, s_j)$  متناظر با زوج رئوس اصلی  $(v_i, v_j)$  وجود داشته باشد، آن‌گاه  $x_{i,j} = x_{r_i, s_j}$  است. تاکید می‌کنیم که

مقادیر  $x_{r_i, g_i^t}$ ،  $x_{g_j^t, s_j}$  و  $x_{i, j}$  با استفاده از مسایل طرح شده در مراحل یک و دو به صورت مشخص به دست می آیند. جواب این معادلات خطی، مقادیر ماتریس مبدأ- مقصد اولیه را مشخص می کند. باید دقت داشته باشیم که استفاده از روش های تقریبی و یا داده هایی که همراه با خطا اندازه گیری شده اند، ممکن است باعث نشدنی بودن دستگاه معادلات حاصل شوند. برای حل این مشکل کافی است با حل مسأله کم ترین مربعات متناظر دستگاه فوق در مرحله سوم، نزدیک ترین جواب به جواب درست را محاسبه کنیم:

$$SP3: \min_{x_{r_i, s_k}, x_{r_k, s_j}} \sum_i \sum_{r_i \in N_i} \left( \sum_k \sum_{s_k \in N_k} x_{r_i, s_k} - \sum_{t \in N_i} x_{r_i, g_i^t} \right)^2 + \sum_j \sum_{s_j \in N_j} \left( \sum_k \sum_{r_k \in N_k} x_{r_k, s_j} - \sum_{t \in N_j} x_{g_j^t, s_j} \right)^2 + \sum_{i, j} \left( \sum_{(r_i, s_j) \in N_i \times N_j} x_{r_i, s_j} - x_{i, j} \right)^2 \quad (14)$$

$$x_{r_i, s_k}, x_{r_k, s_j}, x_{r_i, s_j} \geq 0$$

### ۳ نتایج محاسباتی

در این بخش مثال های عددی برای بررسی کارایی روش پیشنهادی ارائه شده است. در مثال اول شبکه ای با ۴ رأس اصلی و در مجموع ۲۲ رأس فرعی و نقطه گذر در نظر گرفته شده است. در مثال دوم دو شبکه در نظر گرفته شده، شبکه اول شامل ۹ رأس اصلی و ۴۶ رأس فرعی و نقطه گذر و شبکه دوم شامل ۲۵ رأس اصلی و ۳۹۰ رأس فرعی و نقطه گذر است.

برای بررسی درستی جواب های به دست آمده در مدل های ماتریس مبدأ-مقصد از دو روش استفاده می شود. در روش اول مسأله با روش های موجود حل مسایل برنامه ریزی غیرخطی از جمله روش ضرایب لاگرانژ حل شده و با جواب های به دست آمده از روش پیشنهادی مقاله مقایسه می شود. در حالی که در روش دوم ابتدا مقادیری را به عنوان مقادیر درست تقاضای زوج های مبدأ-مقصد در نظر گرفته و با تخصیص این مقادیر درست، داده های مورد نیاز شبکه حاصل می شود. سپس با استفاده از روش پیشنهادی و داده های حاصل، تقاضای زوج های مبدأ-مقصد تخمین زده می شود و در انتها با مقادیر درست انتخاب شده مقایسه می شوند [۲۷ و ۱۷]. در این مقاله از هر دو روش مقایسه استفاده شده است. ابتدا مقادیری به عنوان مقادیر درست تقاضای زوج های مبدأ-مقصد در نظر گرفته، سپس با تخصیص این مقادیر به شبکه، داده های مورد نیاز حاصل می شوند. در ادامه جواب های به دست آمده از روش پیشنهادی و نیز جواب های حاصل از حل مستقیم مدل (۱) به کمک نرم افزار متلب، با مقادیر درست آن ها مقایسه می شوند. کد مربوط به روش ترکیب سطوح به کمک نرم افزار متلب نوشته شده و سرعت و دقت جواب های حاصل از روش مستقیم و روش ترکیب سطوح با یکدیگر مقایسه می شوند.

**مثال ۱.** در این مثال شبکه شکل (۱) با چهار رأس اصلی در نظر گرفته شده است. رئوس درون هر یک از شبکه های  $N_i; i=1, \dots, 4$  با  $v_i^l$  و نقاط گذر آن با  $g_i^l$  مشخص شده اند. زوج های مبدأ-مقصد اولیه به صورت مجموعه  $\{(v_1^1, v_2^2), (v_1^2, v_3^3), (v_1^3, v_4^4), (v_2^1, v_3^2), (v_2^2, v_3^3), (v_3^1, v_2^2), (v_3^2, v_4^4)\}$  در نظر گرفته شده اند. توجه داریم که

در مدل (۱) زوج‌های مبدأ-مقصد اولیه متناظر زوج رئوس اصلی  $(v_i, v_j)$  با  $(r_i, s_j)$  نمایش داده شدند؛ اما به جهت وجود چندین زوج مبدأ-مقصد اولیه در زوج رئوس اصلی  $(v_i, v_j)$  ناگزیریم برای نشان دادن آن‌ها از نماد  $(v_i^l, v_j^k)$  استفاده کنیم. به عنوان مثال  $(r_1, s_3) = (v_1^1, v_3^2)$  تنها زوج مبدأ-مقصد اولیه متناظر با زوج مبدأ-مقصد اصلی  $(v_1, v_3)$  است، در حالی که متناظر با زوج مبدأ-مقصد اصلی  $(v_1, v_4)$  دو زوج مبدأ-مقصد اولیه به صورت  $(r_1, s_4) = (v_1^2, v_4^1)$  و  $(r_1, s_4) = (v_1^2, v_4^2)$  وجود دارد. در این مثال مقادیر درست ماتریس مبدأ-مقصد اولیه به صورت  $\{100, 150, 80, 60, 50, 160\}$  در نظر گرفته شده‌اند.

برای تعیین  $K$ -کوتاه‌ترین مسیرهای بین زوج‌های مبدأ-مقصد اولیه و تخصیص تقاضاهای درست، هزینه اولیه (هزینه سفر بدون ترافیک جریان) هر یک از یال‌های فرعی شبکه را عددی تصادفی در بازه  $[10, 20]$  و ظرفیت آن را عددی تصادفی در بازه  $[100, 150]$  در نظر گرفته‌ایم. هزینه اولیه و ظرفیت یال‌های اصلی نیز به ترتیب اعداد تصادفی در بازه  $[100, 200]$  و  $[500, 600]$  در نظر گرفته شده‌اند. با تخصیص مقادیر درست ماتریس مبدأ-مقصد به  $K$ -کوتاه‌ترین مسیرهای بین زوج‌های مبدأ-مقصد اولیه، مقادیر ترافیک مشاهده شده یال‌های اصلی و نیز سهم انتقال جریان هر یک از ورودی (خروجی)‌ها توسط جریان‌های تخصیص یافته تعیین می‌شوند.

در این مثال برای بررسی دقت جواب حاصل از روش پیشنهادی در صورت بروز خطا در داده‌های مسأله، فرض کرده‌ایم مقادیر هدف تقاضای جریان بین نقاط گذر و رئوس مبدأ (مقصد) فرعی درون هریک از شبکه‌های متناظر به رئوس اصلی با  $0.5$  خطا نسبت به مقادیر درست محاسبه شده باشند. این مقادیر که از آشفته کردن مقادیر حاصل از تخصیص تقاضاهای درست به اندازه  $0.5$  حاصل شده‌اند، به همراه سهم انتقال جریان هریک از نقاط گذر در جدول (۲) نشان داده شده‌اند.

اکنون با استفاده از مقادیر مشاهده شده ترافیک یال‌های اصلی به همراه سهم انتقال جریان نقاط گذر و نیز مقادیر هدف، الگوی جریان شبکه را در سه مرحله تخمین می‌زنیم. در مرحله اول با حل مدل کم‌ترین مربعات  $SP1$  در مسأله (۶) توسط نرم‌افزار متلب، مقادیر ماتریس مبدأ-مقصد مربوط به رئوس اصلی شبکه به صورت

$$x_{1,2} = 101, x_{1,4} = 229, x_{2,3} = 59, x_{3,2} = 51, x_{4,2} = 160/0.8$$

محاسبه می‌شوند؛ بنابراین  $O_1 = 330, D_1 = 0, O_2 = 59, D_2 = 211/0.8, O_3 = 51, D_3 = 160, O_4 = 160/0.8, D_4 = 229$  به دست می‌آیند. با توجه به سهم انتقال جریان هر یک از نقاط گذر در جدول (۲) می‌توان مقادیر  $d_{i,t}$  و  $o_{i,t}$  را تعیین نمود. در مرحله دوم میزان تقاضای جریان بین نقاط گذر و رئوس مبدأ (مقصد) فرعی درون هر یک از شبکه‌های  $N_i$  با حل زیر مسایل  $SP2^i$  در مدل (۹) محاسبه می‌شوند. در آخرین مرحله توسط حل مدل کم‌ترین مربعات در مسأله (۱۴) مقادیر زوج‌های مبدأ-مقصد اولیه به دست می‌آیند.

جواب‌های مدل (۱) به روش مستقیم، با استفاده از نرم افزار متلب نیز محاسبه شده‌اند. جواب نهایی میزان تقاضای سفر زوج‌های مبدأ-مقصد اولیه با استفاده از هر دو روش مستقیم و ترکیب سطوح با زمان‌های متناظر برحسب ثانیه و نیز ریشه میانگین مربعات خطای نسبی تا مقادیر درست در جدول (۳) آورده شده است. همان‌طور که در دو ستون آخر جدول (۳) مشاهده می‌شود، سرعت و دقت جواب‌های حاصل از روش ترکیب سطوح بیش‌تر از جواب‌های حاصل از حل مستقیم مدل است.

جدول ۲. مقادیر هدف و سهم نقاط گذر در انتقال جریان شبکه شکل (۱)

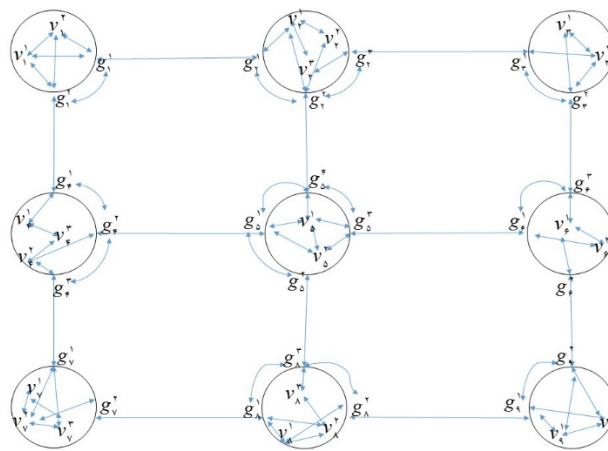
$\bar{x}_{v_1, g_1} = 1$	$\bar{x}_{v_1, g_1} = 240/55$	$\bar{x}_{v_1, g_1} = 0/5$	$\bar{x}_{v_1, g_1} = 93/24$	$\bar{x}_{v_1, g_1} = 0/49$	$\bar{x}_{v_1, g_1} = 0/1$
$g_1^r: p = 0/28, q = 0$		$g_1^r: p = 0/71, q = 0$		$g_1^l: p = 0/01, q = 0$	
$\bar{d}_{d_1, d_1} = 167/52$	$\bar{d}_{d_1, d_1} = 1/01$	$\bar{x}_{g_1, v_1} = 0/11$	$\bar{x}_{v_1, g_1} = 0/45$ $\bar{x}_{g_1, v_1} = 0/95$	$\bar{x}_{v_1, g_1} = 55/80$ $\bar{x}_{g_1, v_1} = 48/71$	$\bar{x}_{v_1, g_1} = 0/64$ $\bar{x}_{g_1, v_1} = 0/84$
$g_1^r: p = 0/01, q = 0/77$		$g_1^r: p = 0/98, q = 0/23$		$g_1^l: p = 0/01, q = 0$	
$\bar{x}_{g_1, v_1} = 0/55$	$\bar{x}_{g_1, v_1} = 61/76$	$\bar{x}_{g_1, v_1} = 94/17$	$\bar{x}_{v_1, g_1} = 0/8$	$\bar{x}_{v_1, g_1} = 46/01$	$\bar{x}_{v_1, g_1} = 0/39$
$g_1^r: p = 0/02, q = 0$		$g_1^r: p = 0/97, q = 0/4$		$g_1^l: p = 0/01, q = 0/6$	
$\bar{x}_{g_1, v_1} = 0/35$	$\bar{x}_{g_1, v_1} = 0/32$	$\bar{x}_{g_1, v_1} = 141/73$	$\bar{x}_{v_1, g_1} = 0/60$ $\bar{x}_{g_1, v_1} = 0/63$	$\bar{x}_{v_1, g_1} = 151/39$ $\bar{x}_{g_1, v_1} = 0/29$	$\bar{x}_{v_1, g_1} = 0/13$ $\bar{x}_{g_1, v_1} = 74/98$
$g_1^r: p = 0/03, q = 0/03$		$g_1^r: p = 0/95, q = 0/02$		$g_1^l: p = 0/02, q = 0/95$	

جدول ۳. زمان اجرا و خطای مقادیر تخمین زده شده توسط روش مستقیم و روش ترکیب سطوح

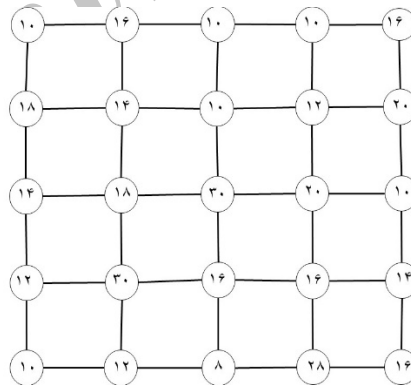
خطا	زمان	زوج‌های مبدأ-مقصد $\left\{ (v_1^1, v_3^2), (v_1^2, v_4^1), (v_1^2, v_4^2), (v_3^1, v_3^2), (v_3^1, v_3^2), (v_4^1, v_2^1) \right\}$					
		۱۰۰	۱۵۰	۸۰	۶۰	۵۰	۱۶۰
۰/۰۷	۲۰/۳۸	۹۷	۱۵۰/۲۵	۸۳/۷۵	۵۸/۱۹	۴۸/۸۵	۱۶۳
۰/۰۶	۰/۷۱	۹۷/۰۹	۱۴۹/۶۰	۸۳/۱۱	۵۹/۳۸	۴۸/۵۵	۱۶۱/۳۸

**مثال ۲.** در مثال دوم، دو شبکه را که به ترتیب با ۹ و ۲۵ رأس اصلی در شکل‌های (۲) و (۳) نشان داده شده‌اند، در نظر می‌گیریم. شبکه شکل (۲) دارای ۴۶ راس فرعی و نقطه گذر و ۱۴۸ یال و شبکه شکل (۳) دارای ۳۹۰ راس فرعی و نقطه گذر و ۶۶۹۴ یال است. در شبکه شکل (۳) تعداد رئوس داخلی هر یک از راس‌های اصلی درون رأس نوشته شده است. در این شکل، شبکه‌های درونی هر یک از رئوس اصلی به صورت یک شبکه کامل در نظر گرفته شده‌اند. برای بررسی کارایی روش ترکیب سطوح، مساله در هر دو شبکه برای تعداد زوج‌های مبدأ-مقصد مختلف با استفاده از هر دو روش حل مستقیم مدل (۱) و نیز روش ترکیب سطوح توسط نرم‌افزار متلب حل شده است. در همه حالت‌ها، ابتدا مقادیری به‌عنوان مقادیر درست تقاضای زوج‌های مبدأ-مقصد اولیه در نظر گرفته شده است. سپس با تخصیص این مقادیر به  $K$ -کوتاه‌ترین مسیرهای بین آن‌ها، جریان مسیرهای شبکه تعیین می‌شود. در این مثال نیز هزینه اولیه و ظرفیت یال‌های اصلی و فرعی شبکه مانند مثال (۱) محاسبه شده‌اند. با تعیین جریان مسیرهای شبکه، ترافیک یال‌های اصلی و میزان جریان انتقال یافته بین نقاط گذر و رئوس مبدأ (مقصد) درون شبکه‌های  $N_i$  حاصل می‌شوند. این مقادیر بدون در نظر گرفتن آشفتگی به‌عنوان مقادیر هدف  $\bar{x}_{g_i, v_i}$  و  $\bar{x}_{v_i, g_i}$  مورد استفاده قرار می‌گیرند. سهم هر یک از نقاط گذر در انتقال جریان شبکه‌های  $N_i$  نیز با استفاده از مقادیر تخصیص یافته حاصل می‌شود.

در جدول (۴) تعداد زوج‌های مبدأ-مقصد انتخابی، زمان رسیدن به جواب برحسب ثانیه و ریشه میانگین مربعات خطای نسبی تا مقادیر درست برای جواب حاصل از هر دو روش مستقیم و ترکیب سطوح آورده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود جواب‌های حاصل از روش ترکیب سطوح از دقت و سرعت بیشتری نسبت به جواب‌های حاصل از روش مستقیم برخوردار هستند. در شکل‌های (۴) و (۵) مقادیر درست تقاضای زوج‌های مبدأ-مقصد اولیه به ترتیب با جواب حاصل از حل مستقیم مدل (۱) و روش ترکیب سطوح برای شبکه شکل (۲) با ۱۲ زوج مبدأ-مقصد، مقایسه شده‌اند. همچنین در شکل‌های (۶) و (۷)، مقادیر درست تقاضای زوج‌های مبدأ-مقصد اولیه به ترتیب با جواب‌های حاصل از حل مستقیم مدل (۱) و جواب حاصل از روش ترکیب سطوح برای شبکه شکل (۳) با ۱۶ زوج مبدأ-مقصد، مقایسه شده‌اند.



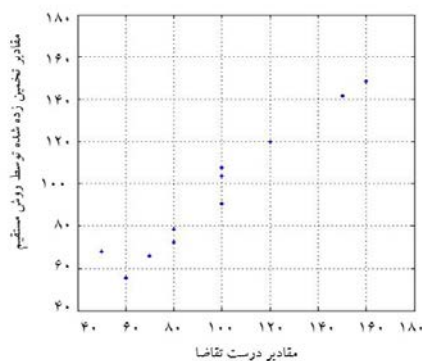
شکل ۲. شبکه با ۹ رأس اصلی و ۴۶ رأس فرعی و نقطه گذر



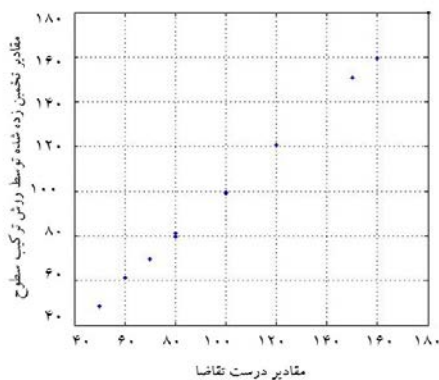
شکل ۳. شبکه با ۲۵ رأس اصلی و ۳۹۰ رأس فرعی و نقطه گذر

**جدول ۴.** مقایسه زمان دستیابی و خطای جواب حاصل از روش مستقیم و روش ترکیب سطوح برای شبکه‌های (۲) و (۳)

شبکه	تعداد زوج‌های مبدأ-مقصد	زمان اجرا		ریشه میانگین مربعات خطای نسبی	
		روش مستقیم	روش ترکیب سطوح	روش مستقیم	روش ترکیب سطوح
شبکه ۹ رأسی	۵	۳۰/۸۱	۷۹۹	۰/۲۶	۰/۲۴
	۸	۴۵/۲۳	۲/۶۳	۰/۸۸	۰/۰۸
	۱۲	۲۰۰/۴۴	۱۲/۲۶	۰/۴۲	۰/۰۴
	۱۶	۱۹۳/۳۸	۱۲/۹۵	۲/۱۶	۰/۰۳
	۱۹	۲۵۲/۷۴	۱۷/۳۶	۳/۵۷	۰/۰۴
شبکه ۲۵ رأسی	۶	۳۰۷۳۲	۶۳۲/۲۲	۰/۰۰۹	۰/۰۰۷
	۱۰	۱۴۷۳/۶	۸۱۶/۳۴	۰/۰۰۶	۰/۰۰۲
	۱۶	۷۵۶۸۸	۱۱۸۲	۳/۹۸	۰/۰۳۴
	۲۰	۱۸۸۴۶	۷۴۳/۹۴	۴/۴۵	۰/۰۴



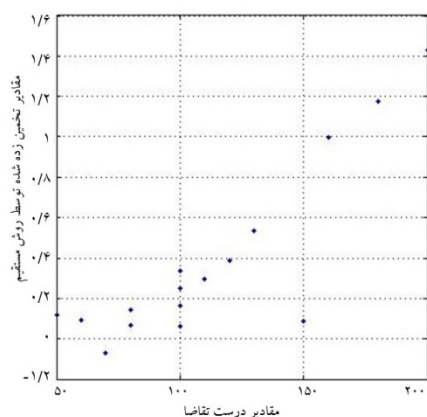
**شکل ۴.** مقایسه مقادیر درست تقاضا و مقادیر تخمین زده شده توسط روش مستقیم در شبکه شکل (۲) با ۱۲ زوج مبدأ-مقصد



**شکل ۵.** مقایسه مقادیر درست تقاضا و مقادیر تخمین زده شده توسط روش ترکیب سطوح در شبکه شکل (۲) با ۱۲ زوج مبدأ-مقصد

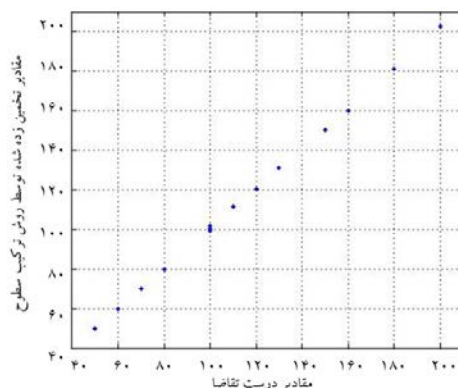
#### ۴ نتیجه‌گیری و پیشنهادها

تخمین ماتریس مبدأ-مقصد در شبکه یکی از مسایل مهم حوزه حمل‌ونقل است که الگوی جریان شبکه را مشخص می‌کند. با توجه به این که شبکه‌های مربوط به حمل‌ونقل معمولاً در ابعاد بزرگ و با تعداد یال‌ها و رئوس زیاد بررسی می‌شوند، استفاده از روش‌های موجود می‌تواند باعث افزایش حجم محاسبات و در نتیجه افزایش زمان دستیابی به جواب شود. در مقاله حاضر مسأله تخمین ماتریس مبدأ-مقصد در نگرش ترکیب سطوح مورد بررسی قرار گرفته است که به جای حل مسأله در ابعاد بزرگ، با حل زیر مسایل کوچک‌تر در سه مرحله، جواب مسأله اصلی تخمین زده شده است. در انتها با ارایه مثال‌های عددی، کارایی الگوریتم پیشنهادی مورد بررسی قرار گرفته است. دسته‌بندی رئوس و یال‌های نزدیک به هم در شبکه‌های بزرگ (روش خوشه‌بندی) و تبدیل مسأله به مدل ترکیب سطوح که در این مقاله بررسی شد، و نیز بررسی مدل در حالات احتمالی می‌تواند به عنوان تعمیمی از این مسأله در کارهای آتی مطرح شود.



شکل ۶ مقایسه مقادیر درست تقاضا و مقادیر تخمین زده شده توسط روش مستقیم در شبکه شکل (۳) با ۱۶ زوج مبدأ-مقصد





شکل ۷. مقایسه مقادیر درست تقاضا و مقادیر تخمین زده شده توسط روش ترکیب سطوح در شبکه شکل (۳) با ۱۶ زوج مبدأ-مقصد

## منابع

- [1] Wardrop, J., (1952). Some theoretical aspects of road traffic research. In: Proceedings of the institution of civil engineers, Part II, 1, 325-378.
- [2] Van Zuylen, H., Willumsen, L. G., (1980). The most likely trip matrix estimated from traffic counts. Transportation Research, Part B, 14(3), 281-293.
- [3] Willumsen, L. G., (1981). Simplified transport models based on traffic counts. Transportation, 10(3), 257-278.
- [4] Carey, M., Hendrickson, C., Siddharthan, K., (1981). A method for direct estimation of origin-destination trip matrices. Transportation Science, 15(1), 32-49.
- [5] Cascetta, E., (1984). Estimation of Trip Matrices from Traffic Counts and Survey Data: A Generalized Least Squares Estimator. Transportation Research, Part B, 18(4-5), 289-299.
- [6] McNeil, S., Hendrickson, C., (1985). A regression formulation of the matrix estimation problem. Transportation Science, 19(3)58, 278-292.
- [7] Nguyen, S., (1977). Estimating an O-D matrix from network data: A network equilibrium approach. University of Montreal Publication No. 60.
- [8] Jornsten, K., Nguyen, S., (1979). On the estimation of a trip matrix from network data. Technical report. LiTH-MAT-R-79-36. Department of Mathematics. University of Linköping, Sweden.
- [9] Fisk, C. S., Boyce, D. E., (1983). A Note on Trip Matrix Estimation from Link Traffic Count Data. Transportation Research, Part B, 17(3), 245-250.
- [10] Fisk, C. S., (1988). On combining maximum entropy trip matrix estimation with user optimal assignment. Transportation Research, part B, 22(1), 69-73.
- [11] Sherali, H. D., Sivanandan, R., Hobeika, A. G., (1994). A Linear Programming Approach for Synthesizing Origin-Destination Trip Tables from Link Traffic Volumes. Transportation Research, Part B, 28(3), 213-233.
- [12] Bell, M. G. H., Shield, C. M., (1995). A log-linear model for path flow estimation. Proc., 4 th Int. Conf. on the Applications of Advanced Technologies in Transportation Engineering, ASCE, Carpi, Italy, 695-699.
- [13] Chen, A., Chootinan, P., Recker, W., (2005). Examining the quality of synthetic origin-destination trip table estimated by path flow estimator. Journal of Transportation Engineering, 131(7), 506-513.
- [14] Chen, A., Chootinan, P., Recker, W., (2009). Norm approximation method for handling traffic count inconsistencies in path flow estimator. Transportation Research, Part B, 43(8-9), 852-872.
- [15] Chen, A., Ryu, S., Chootinan, P., (2010). L $\infty$ -norm path flow estimator for handling traffic count inconsistencies: Formulation and solution algorithm. Journal of Transportation Engineering, 136(6), 565-575.

- [16] Bell, M. G. H., Shield, C. M., Busch, F., Kruse, G., (1997). A stochastic user equilibrium path flow estimator. *Transportation Research, Part C*, 5(3-4), 197-210.
- [17] Abareshi, M., Zaferanieh, M., Keramati, B., (2017). Path Flow Estimator in an Entropy Model Using a Nonlinear L-Shaped Algorithm. *Networks and Spatial Economics*, 17(1), 293-315.
- [18] Dempe, S., (2002). *Foundations of bi-level programming*. Springer US.
- [19] Yang, H., (1995). Heuristic Algorithms for the Bi-level Origin-Destination Matrix Estimation Problem. *Transportation Research, Part B*, 29(4), 231-242.
- [20] Maher, M., Zhang, X., (1999). Algorithms for the solution of the congested trip matrix estimation problem. *Proceedings of the 14 th International Symposium on Transportation and Traffic Theory*, 445-469.
- [21] Maher, M., (1983). Inferences on trip matrices from observations on link volumes: A Bayesian statistical approach. *Transportation Research, Part B*, 17(6), 435-447.
- [22] Spiess, H., (1987). A maximum-likelihood model for estimating origin-destination matrices. *Transportation Research, Part B*, 21(5), 395-412.
- [23] Hazelton, M. L., (2010). Statistical Inference for Transit System Origin-Destination Matrices. *Technometrics*, 52(2), 221-230.
- [24] Parry, K., Hazelton, M. L., (2013). Bayesian inference for day-to-day dynamic traffic models. *Transportation Research, Part B*, 50, 104-115.
- [25] Batta, R., Palekar, U. S., (1988). Mixed planar-network facility location problems. *Computers and Operations Research*, 15(1), 61-67.
- [26] Eppstein, D., (1999). Finding the K-shortest paths. *SIAM Journal of Computing*, 28(2), 652-673.
- [27] Nie, Y., Zhang, H. M., Recker, W.W., (2005). Inferring origin-destination trip matrices with a decoupled GLS path flow estimator. *Transportation Research, Part B*, 39(6), 497-518.