

## مدل میانگین انحراف مطلق با عدم قطعیت روی بازده‌ها برای بهینه‌سازی سبد سهام

مهتاب شاهمرادی<sup>۱</sup>، مازیار صلاحی<sup>۲</sup>، سمیه لطفی<sup>۳</sup>

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد، گروه ریاضی کاربردی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه گیلان، رشت، ایران

۲- استاد، گروه ریاضی کاربردی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه گیلان، رشت، ایران

۳- دانشجوی دکتری، دانشکده حسابداری و مالی، دانشگاه قبرس، قبرس

رسید مقاله: ۲۸ اسفند ۱۳۹۵

پذیرش مقاله: ۲۰ مهر ۱۳۹۶

### چکیده

در این مقاله مدل میانگین انحراف مطلق برای انتخاب سبد سهام بهینه مورد مطالعه قرار می‌گیرد. نظر به عدم قطعیت بازده‌های مشاهده شده در بازارهای مالی، یک نسخه بهبودیافته استوار آن بر مبنای استوارسازی برتسیماس و سیم ارایه می‌شود. سپس مدل استوار مساله تحت مجموعه عدم قطعیت همبسته مطالعه و مدل معادل آن ارایه می‌شود. در پایان نیز عملکرد مدل‌های استوار بهبود یافته و همبسته در مقایسه با مدل قطعی روی داده‌های واقعی از بازارهای مالی مقایسه می‌شوند.

**کلمات کلیدی:** مدل میانگین انحراف مطلق، سبد سهام، برنامه‌ریزی خطی، بهینه‌سازی استوار، ریسک، چندوجهی همبسته.

### ۱ مقدمه

بهینه‌سازی سبد سهام، فرآیند تجزیه و تحلیل یک سبد سهام و مدیریت دارایی‌های درون آن است. مساله بهینه‌سازی سبد سهام که توسط مارکوویتز [۱] بنا نهاده شد، فرض می‌کند که سرمایه‌گذار دو هدف دارد: بازده بالای مورد انتظار و حداقل سطح ریسک؛ اما مدل بهینه‌سازی سبد سهام مارکوویتز یک مساله برنامه‌ریزی درجه دوم است که در مقایسه با مدل‌های خطی هزینه محاسباتی بالایی دارد. همچنین برای بازارهای واقعی اندازه ماتریس کوواریانس بازده‌ها برای حل مدل انتخاب سبد سهام بسیار بزرگ و برای تخمین دشوار است. این قبیل مشکلات، مدل مارکوویتز را در بازار واقعی کم‌کاربردتر می‌کند؛ لذا برای غلبه بر این مشکلات، پیشنهادی متعددی ارایه گردیده است. کونو و یامازاکی [۲] از انحراف مطلق به عنوان مقیاس ریسک استفاده و مدل میانگین

\* عهده‌دار مکاتبات

آدرس الکترونیکی: salahi.maziar@gmail.com

انحراف مطلق را به عنوان یک مدل برنامه‌ریزی خطی جایگزین پیشنهاد کردند. ایده‌های مشابه روی مقیاس ریسک برای فرمول‌بندی برنامه‌ریزی خطی منجر به توسعه مدل‌هایی همچون مدل‌های کلر و همکاران [۳] و مانسینی و همکاران [۴] و چiodی و همکاران [۵] و پاپاریستودولو و دوتراور [۶] شده است. علاوه بر این، برای کاهش دشواری محاسباتی، مانسینی و اسپرانزا [۷]، کلر و همکاران [۳]، چانگ و همکاران [۸] و کیم [۹] الگوریتم‌های ابتکاری را توسعه دادند. با توجه به غیر قطعی بودن داده‌ها در دنیای واقعی، تحقیقات گسترده‌ای در دو دهه اخیر در خصوص در نظر گرفتن این فرض در مدل صورت گرفته است [۳ و ۱۰-۱۳]. از جمله رویکردهای بسیار موثر و مورد استفاده در این خصوص، بهینه‌سازی استوار بوده است. ایده در بهینه‌سازی استوار در نظر گرفتن بدترین سناریو مستقل از توزیع احتمالی خاصی روی داده‌ها است. این رویکرد ابتدا توسط سویستر [۱۴] در سال ۱۹۷۱ ارائه گردید که بسیار محافظه کارانه بود. سپس بن-تال و نمیروفسکی [۱۰] برای کاهش محافظه کاری آن با تعریف مجموعه عدم قطعیت بیضوی مدلی ارائه کردند که به صورت یک مساله برنامه‌ریزی مخروطی بود. این مشکلات منجر به معرفی مدلی با سطح محافظه کاری قابل کنترل و در عین حال حفظ خطی بودن مدل‌های استوار توسط برتسیماس و سیم شد که در سال‌های اخیر در کاربردهای متعددی مورد استفاده قرار گرفته است [۱۱]. به عنوان مثال، مون و یائو [۱۳] مدل استوار میانگین انحراف مطلق را با استفاده از رویکرد برتسیماس و سیم مورد مطالعه قرار دادند. در ادامه برخی از تحقیقات مرتبط با عدم قطعیت در داده‌های مساله بهینه‌سازی سبد سهام را ارائه می‌دهیم. ليو [۱۲] روشی را برای مساله انتخاب سبد سرمایه غیر قطعی معرفی کرد که بازده‌های غیر قطعی به وسیله‌ی بازده‌ها بیان می‌شوند و یک جفت مدل برنامه‌ریزی دو سطحی می‌سازد و براساس آن کران‌های بالا و پایین بازده‌ها را به دست می‌آورد. ال قانویی و همکاران [۱۵] یک مدل استوار سبد سهام تحت ماتریس کوواریانس عدم قطعیت پیشنهاد کردند که به وسیله برنامه‌ریزی نیمه معین توسعه داده شده است و بدترین حالت مقدار ریسک را در نظر می‌گیرد. آن‌ها نشان دادند که مدل استوار به طور قابل توجهی بهتر از مدل اسمی است. گلدفارب و اینگر [۱۶] با استفاده از داده‌های واقعی و شبیه‌سازی شده، مدل کلاسیک مارکویتز را با مدل استوارشان که با استفاده از برنامه‌ریزی مخروطی درجه دو به دست آمده است، مقایسه نمودند و به این نتیجه رسیدند که با داده واقعی همواره مدل استوار بهتر از مدل کلاسیک نیست. توتونچو و کونینگ [۱۷] با توسعه مدل استوار بهینه‌سازی سبد سهام در قالب برنامه‌ریزی درجه دو و با استفاده از داده‌های واقعی به این نتیجه رسیدند که در بدترین حالت بازده، مدل استوار در مقایسه با مدل اسمی در مصرف هزینه بازده پیشرفت قابل توجهی دارد. همچنین رضایی و همکاران [۱۸] از افت سرمایه در معرض خطر مشروط به عنوان مقیاس ریسک استفاده و با استفاده از استوارسازی برتسیماس و سیم، عدم قطعیت داده‌ها را رفع نمودند. آن‌ها به مدلی رسیدند که بهترین سبد سهام را در بدترین حالت نوسان داده‌ها ارائه می‌دهد و در صورت افزایش سطح محافظه کاری، مقدار تابع هدف نیز افزایش می‌یابد.

در این مقاله از رویکرد استوارسازی برتسیماس و سیم برای توسعه مدل انتخاب سبد سهام کونو و یامازاکی استفاده می‌شود و یک مدل استوار ساده‌تر در مقایسه با مدل استوار مون و یائو [۱۳] ارائه خواهد شد. همچنین مدل استوار دیگری با مجموعه عدم قطعیت چندوجهی همبسته که توسط جلیوندنژاد و همکاران [۱۹] معرفی

شده است و با استفاده از رویکرد استوارسازی برتسیماس و سیم برای مدل کونو و یامازاکی ارایه خواهد شد. ادامه مقاله به صورت زیر سازماندهی شده است: ابتدا در بخش بعدی نسخه استوار مدل میانگین انحراف مطلق کونو و یامازاکی را بر مبنای رویکرد برتسیماس و سیم که در [۱۳] ارایه شده است معرفی می‌کنیم. سپس با توجه به ساختار مساله، یک نسخه بهبودیافته آن که در مقایسه با مدل ارایه شده در [۱۳] محدودیت‌ها و متغیرهای کمتری دارد ارایه می‌شود. در بخش ۳ مدل استوار مساله را تحت مجموعه عدم قطعیت همبسته که در [۱۹] معرفی شده است بررسی و معادل آن را ارایه می‌دهیم. در پایان نیز روی داده‌های واقعی بازار سهام، مدل‌های استوار و مدل قطعی با یکدیگر مقایسه می‌شوند.

## ۲ فرمول‌بندی استوار بهبود یافته مدل میانگین انحراف مطلق

مدل میانگین انحراف مطلق کونو و یامازاکی به صورت زیر است:

$$\min \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left| \sum_{j=1}^n (r_{jt} - r_j) x_j \right|$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^n r_j x_j \geq \rho C,$$

$$\sum_{j=1}^n x_j = C,$$

$$0 \leq x_j \leq u_j, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

که در آن:

$x_j$	میزان دارایی $j$ ام در سبد سهام
$y_t$	انحراف تحت مقدار میانگین بازده در طول زمان $t$
$T$	طول بازه زمانی
$t$	هر دوره از بازه زمانی، $t = 1, 2, \dots, T$
$\rho$	حداقل بازده مورد انتظار سرمایه‌گذار
$R_j$	متغیر تصادفی نشان‌دهنده‌ی مقدار بازده دارایی
$r_j$	بازده مورد انتظار ( $E[R_j]$ ) مربوط به دارایی $j$ ام
$r_{jt}$	بازده مشاهده شده‌ی دارایی $j$ ام در طول دوره $t$
$u_j$	ماکزیمم مقدار دارایی $j$ ام
$C$	کل دارایی در دسترس
$n$	تعداد کل سهام

به راحتی می‌توان مساله قبل را با استفاده از متغیرهای کمکی  $y_t$  به صورت خطی زیر بیان کرد:

$$\begin{aligned}
 & \min \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T y_t \\
 & s.t. \\
 & y_t + \sum_{j=1}^n (r_{jt} - r_j) x_j \geq 0, \quad t = 1, 2, \dots, T, \\
 & y_t - \sum_{j=1}^n (r_{jt} - r_j) x_j \geq 0, \quad t = 1, 2, \dots, T, \\
 & \sum_{j=1}^n r_j x_j \geq \rho C, \\
 & \sum_{j=1}^n x_j = C, \\
 & 0 \leq x_j \leq u_j, \quad j = 1, 2, \dots, n.
 \end{aligned} \tag{1}$$

مدل (۱) براساس مدل میانگین واریانس مارکویتز بنا نهاده شده است و فواید این مدل در مقایسه با مدل مارکویتز عبارتند از (۱) این مدل از ماتریس کوواریانس استفاده نمی‌کند؛ لذا نیاز به محاسبه آن نیست، (۲) حل این مدل خطی بسیار آسان‌تر از حل مدل درجه دو است، (۳) سبد سهام بهینه صرف نظر از سایز  $n$  حداکثر شامل  $2T + 2$  دارایی است اگر  $j = 1, 2, \dots, n$ ،  $u_j = \infty$  در حالی که مدل مارکویتز ممکن است شامل  $n$  دارایی باشد، (۴)  $T$  می‌تواند به عنوان متغیر کنترل برای محدود کردن تعداد دارایی‌ها در سبد بهینه استفاده شود [۲۰].

در مدل (۱)، بازده مورد انتظار  $r_j$ ، از دارایی  $j$  توسط  $E[R_j]$  تقریب زده می‌شود؛ یعنی بازده واقعی نمی‌تواند دقیق به دست آید و دارای عدم قطعیت است. برای بیان عدم قطعیت این پارامتر، فرض کنید در بردار بازده واقعی  $\tilde{r}$  هر عنصر  $\tilde{r}_j$ ،  $j \in J_0 \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ ، مقادیری در  $[r_j - \hat{r}_j, r_j + \hat{r}_j]$  اختیار می‌کند، که  $\hat{r}_j$  انحراف از ضریب میانگین اسمی تخمین زده شده  $r_j$  را نشان می‌دهد و  $J_0$  نشان دهنده مجموعه اندیس پارامترهای غیر قطعی است.

مدل استوار مساله میانگین انحراف مطلق با در نظر گرفتن عدم قطعیت روی بازده با استفاده از رویکرد برتسیماس و سیم [۱۱] به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
 & \min \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T y_t \\
 & s.t. \\
 & -y_t - \sum_{j=1}^n r_{jt} x_j + \sum_{j=1}^n r_j x_j + \max_{\{S_0 \cup \{v\} | S_0 \subseteq J_0, |S_0| = \lfloor \Gamma_0 \rfloor, v \in J_0 \setminus S_0\}} \left\{ \sum_{j \in S_0} \hat{r}_j |x_j| + (\Gamma_0 - \lfloor \Gamma_0 \rfloor) \hat{r}_v |x_v| \right\} \leq 0, \tag{2} \\
 & t = 1, 2, \dots, T,
 \end{aligned}$$

$$-y_t + \sum_{j=1}^n r_{jt} x_j - \sum_{j=1}^n r_j x_j + \max_{\{S_0 \cup \{v\} | S_0 \subseteq J_0, |S_0| = \lfloor \Gamma_0 \rfloor, v \in J_0 \setminus S_0\}} \left\{ \sum_{j \in S_0} \hat{r}_j |x_j| + (\Gamma_0 - \lfloor \Gamma_0 \rfloor) \hat{r}_v |x_v| \right\} \leq 0,$$

$$t = 1, 2, \dots, T,$$

$$-\sum_{j=1}^n r_j x_j + \max_{\{S_0 \cup \{v\} | S_0 \subseteq J_0, |S_0| = \lfloor \Gamma_0 \rfloor, v \in J_0 \setminus S_0\}} \left\{ \sum_{j \in S_0} \hat{r}_j |x_j| + (\Gamma_0 - \lfloor \Gamma_0 \rfloor) \hat{r}_v |x_v| \right\} \leq -\rho C,$$

$$\sum_{j=1}^n x_j = C,$$

$$0 \leq x_j \leq u_j, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

در [۱۳] با استفاده از رویکرد ارایه شده در [۱۱]، مدل زیر به عنوان مدل معادل با (۲) ارایه شده است:

$$\min \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T y_t$$

s.t.

$$-y_t - \sum_{j=1}^n r_{jt} x_j + \sum_{j=1}^n r_j x_j + \sum_{j \in J_1} p_j + \Gamma_1 z_1 \leq 0, \quad t = 1, 2, \dots, T,$$

$$-y_t + \sum_{j=1}^n r_{jt} x_j - \sum_{j=1}^n r_j x_j + \sum_{j \in J_0} p_j + \Gamma_0 z_0 \leq 0, \quad t = 1, 2, \dots, T,$$

$$-\sum_{j=1}^n r_j x_j + \sum_{j \in J_0} p_j + \Gamma_0 z_0 + \rho C \leq 0,$$

$$z_1 + p_j \geq \hat{r}_j w_j, \quad (3)$$

$$\sum_{j=1}^n x_j = C,$$

$$p_j \geq 0, \quad \forall j \in J_1,$$

$$z_1 \geq 0,$$

$$-w_j \leq x_j \leq w_j, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$w_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$0 \leq x_j \leq u_j, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

در مدل (۲) بدون در نظر گرفتن نامنفی بودن متغیرها، صرفاً مدل استوار با استفاده از قالب کلی مدل

برتسیماس و سیم نوشته شده است که منجر به معرفی  $n$  متغیر

$$w_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

و  $2n$  قید

$$-w_j \leq x_j \leq w_j, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

در مساله (۳) شده است. در ادامه با در نظر گرفتن نامنفی بودن متغیرها، این قیود و متغیرهای  $w_j, j = 1, 2, \dots, n$  از مساله حذف می‌شود.

اولین محدودیت در فرمول‌بندی (۱) را در نظر می‌گیریم.  $J$  را مجموعه ضرایب  $r_j$  در نظر بگیرید که دارای عدم قطعیت هستند. فرض کنید هر عنصر  $\tilde{r}_j, j \in J \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ ، مقادیری در  $[r_j - \hat{r}_j, r_j + \hat{r}_j]$  بگیرد، که  $\hat{r}_j$  انحراف از ضریب میانگین اسمی تخمین زده شده،  $r_j$  را نشان می‌دهد. برای کنترل سطح استواری در محدودیت‌ها، پارامتر  $\Gamma \in \mathbb{R}^+$  را تعریف می‌کنیم که مقداری در  $[0, |J|]$  است. برای  $\Gamma$  انتخابی، زیرمجموعه‌ی  $S$  را در نظر بگیرید که در شرایط  $S_0 \subseteq J$  و  $|S_0| = \lfloor \Gamma \rfloor$  صدق می‌کند. هدف ما حفاظت تحت هر شرایطی است به طوری که یک ضریب حداکثر به اندازه  $\hat{r}_v (\Gamma - \lfloor \Gamma \rfloor)$  و  $\lfloor \Gamma \rfloor$  از ضرایب قابل تغییر باشند.

همچنین، چون شدنی بودن جواب‌ها باید تضمین شود، شرط زیر باید برقرار باشد:

$$-y_t - \sum_{j=1}^n r_{jt} x_j + \sum_{j=1}^n r_j x_j + \left( \sum_{j \in S_0} \hat{r}_j x_j + (\Gamma - \lfloor \Gamma \rfloor) \hat{r}_v x_v \right) \leq 0.$$

علاوه بر این، مجموعه جواب باید در مقابل تمام سناریوهای متفاوت  $S_0$  و  $\hat{r}_v$  برای  $\Gamma$  داده شده استوار باشند؛ لذا همتای استوار به صورت زیر خواهد بود:

$$-y_t - \sum_{j=1}^n r_{jt} x_j + \sum_{j=1}^n r_j x_j + \max_{\{S_0 \cup \{v\} \mid S_0 \subseteq J_0, |S_0| = \lfloor \Gamma \rfloor, v \in J_0 \setminus S_0\}} \left\{ \sum_{j \in S_0} \hat{r}_j |x_j| + (\Gamma - \lfloor \Gamma \rfloor) \hat{r}_v |x_v| \right\} \leq 0.$$

با عمل به طور مشابه برای سایر قیدهای دارای پارامتر بازده غیر قطعی، مدل استوار (۲) به صورت زیر است:

$$\min \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T y_t$$

s.t.

$$-y_t - \sum_{j=1}^n r_{jt} x_j + \sum_{j=1}^n r_j x_j + \max_{\{S_0 \cup \{v\} \mid S_0 \subseteq J_0, |S_0| = \lfloor \Gamma \rfloor, v \in J_0 \setminus S_0\}} \left\{ \sum_{j \in S_0} \hat{r}_j x_j + (\Gamma - \lfloor \Gamma \rfloor) \hat{r}_v x_v \right\} \leq 0, \quad t = 1, 2, \dots, T,$$

$$-y_t + \sum_{j=1}^n r_{jt} x_j - \sum_{j=1}^n r_j x_j + \max_{\{S_0 \cup \{v\} \mid S_0 \subseteq J_0, |S_0| = \lfloor \Gamma \rfloor, v \in J_0 \setminus S_0\}} \left\{ \sum_{j \in S_0} \hat{r}_j x_j + (\Gamma - \lfloor \Gamma \rfloor) \hat{r}_v x_v \right\} \leq 0, \quad (4) \quad t = 1, 2, \dots, T,$$

$$-\sum_{j=1}^n r_j x_j + \max_{\{S_0 \cup \{v\} \mid S_0 \subseteq J_0, |S_0| = \lfloor \Gamma \rfloor, v \in J_0 \setminus S_0\}} \left\{ \sum_{j \in S_0} \hat{r}_j x_j + (\Gamma - \lfloor \Gamma \rfloor) \hat{r}_v x_v \right\} \leq -\rho C,$$

$$\sum_{j=1}^n x_j = C,$$

$$0 \leq x_j \leq u_j, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

مدل (۴) همچنان دارای عبارات غیرخطی است. برای خطی سازی این فرمول بندی از لم زیر استفاده می کنیم [۱۱].  
 لم ۱: فرض کنید  $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  جواب بهینه مساله (۴) باشد، تابع محافظ

$$\beta(x^*, \Gamma_0) = \max_{\{S_0 \cup \{v\} | S_0 \subseteq J_0, |S_0| = \lfloor \Gamma_0 \rfloor, v \in J_0 \setminus S_0\}} \left\{ \sum_{j \in S_0} \hat{r}_j x_j^* + (\Gamma_0 - \lfloor \Gamma_0 \rfloor) \hat{r}_v x_v^* \right\}$$

معادل مساله بهینه سازی خطی زیر است:

$$\begin{aligned} & \max \sum_{j \in J_0} \hat{r}_j x_j^* z_j \\ & s.t. \\ & \sum_{j \in J_0} z_j \leq \Gamma_0, \\ & 0 \leq z_j \leq 1, \quad \forall j \in J_0. \end{aligned} \quad (5)$$

اثبات: واضح است جواب بهینه ی مساله (۵) شامل  $\lfloor \Gamma_0 \rfloor$  متغیر با مقدار ۱ و یک متغیر با مقدار  $\Gamma_0 - \lfloor \Gamma_0 \rfloor$  است، که با انتخاب زیرمجموعه ی  $\{S_0 \cup \{v\} | S_0 \subseteq J_0, |S_0| = \lfloor \Gamma_0 \rfloor, v \in J_0 \setminus S_0\}$  با تابع هزینه ی نظیر  $\sum_{j \in S_0} \hat{r}_j x_j^* + (\Gamma_0 - \lfloor \Gamma_0 \rfloor) \hat{r}_v x_v^*$  معادل است.  $\blacksquare$   
 حال دوگان مساله (۵) را در نظر می گیریم:

$$\begin{aligned} & \min \sum_{j \in J_0} p_j + \Gamma_0 z_0 \\ & s.t. \\ & z_0 + p_j \geq \hat{r}_j x_j^*, \quad \forall j \in J_0, \\ & p_j \geq 0, \quad \forall j \in J_0, \\ & z_0 \geq 0. \end{aligned} \quad (6)$$

چون (۵) و (۶) خطی و شدنی هستند؛ لذا قضیه دوگانی قوی تضمین می کند که مقادیر توابع هدف بهینه مساله دوگان (۶) و مساله (۵) که همان  $\beta(x^*, \Gamma_0)$  می باشد، برابر هستند؛ بنابراین مساله (۴) با مساله زیر معادل خواهد بود:

$$\begin{aligned}
 & \min \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T y_t \\
 & s.t. \\
 & -y_t - \sum_{j=1}^n r_{jt} x_j + \sum_{j=1}^n r_j x_j + \sum_{j \in J_0} p_j + \Gamma_0 z_0 \leq 0, \quad t = 1, 2, \dots, T, \\
 & -y_t + \sum_{j=1}^n r_{jt} x_j - \sum_{j=1}^n r_j x_j + \sum_{j \in J_0} p_j + \Gamma_0 z_0 \leq 0, \\
 & t = 1, 2, \dots, T, \\
 & -\sum_{j=1}^n r_j x_j + \sum_{j \in J_0} p_j + \Gamma_0 z_0 + \rho C \leq 0, \\
 & z_0 + p_j \geq \hat{r}_j x_j, \quad \forall j \in J_0, \\
 & \sum_{j=1}^n x_j = C, \\
 & p_j \geq 0, \quad \forall j \in J_0, \\
 & z_0 \geq 0, \\
 & 0 \leq x_j \leq u_j, \quad j = 1, 2, \dots, n.
 \end{aligned} \tag{V}$$

همان طور که ملاحظه می‌شود مدل (V) در مقایسه با مدل (3)  $2n$  قید و  $n$  متغیر کم تر دارد.

### 3 مدل استوار تحت مجموعه عدم قطعیت چندوجهی‌های همبسته

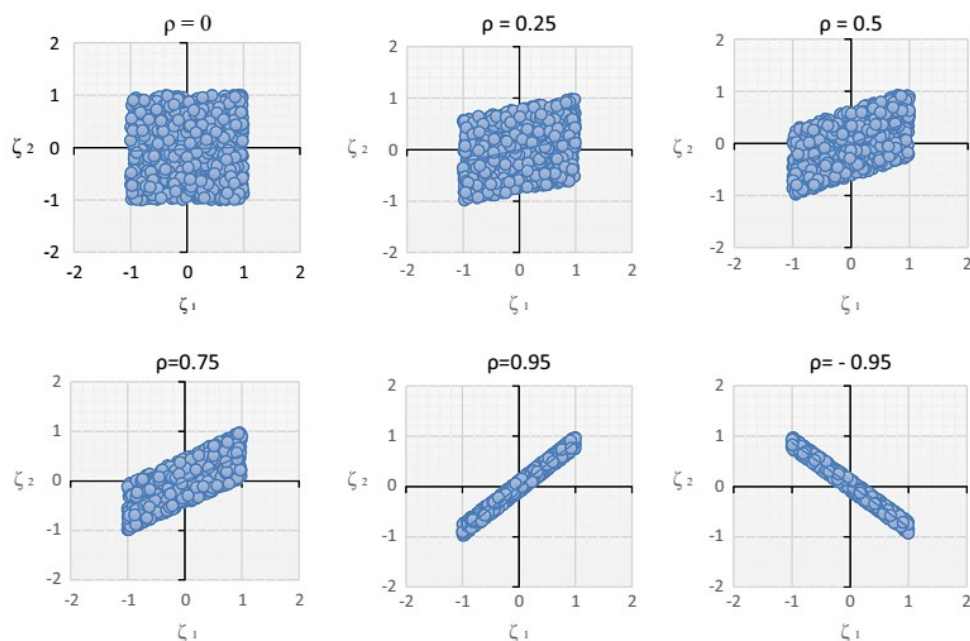
در دنیای واقعی بازدهها مستعد عدم قطعیت هستند و این عدم قطعیت ممکن است ناشی از عوامل کلان اقتصادی (سیاست‌های دولت، عوامل فرهنگی، وضعیت صنعت و ...)، عوامل خرد اقتصادی (میزان تقاضا، وضعیت مالی شرکت و ...) و عوامل غیراقتصادی (تمایل به ریسک، نرخ بازده مطلوب و ...) باشد [21]. برخی از این منابع عدم قطعیت برای برخی یا همه‌ی بازده‌های غیرقطعی عمومی‌اند؛ لذا بین بازده‌ها همبستگی وجود دارد. معمولاً شناسایی همه‌ی منابع عدم قطعیت غیرعملی است، اما وقتی ماتریس همبستگی تخمین زده شده‌ی ضرایب موجود باشد، یک مدل استوار جایگزین تحت یک مجموعه عدم قطعیت جدید پدید می‌آید. در این بخش ابتدا این مجموعه عدم قطعیت را که در [19] ارائه شده است به اختصار معرفی می‌کنیم و سپس مدل استوار مساله (1) را تحت این مجموعه عدم قطعیت ارائه می‌دهیم.

مساله بهینه‌سازی (1) را با دو ضریب غیرقطعی  $\tilde{r}_j$  ( $j = 1, 2$ ) در نظر بگیرید، به طوری که  $\tilde{r}_j$  در  $[r_j - \hat{r}_j, r_j + \hat{r}_j]$  تغییر می‌کند و  $r_j$  مقدار اسمی  $\tilde{r}_j$  و  $\hat{r}_j$  انحراف از ضریب میانگین اسمی تخمین زده شده،  $r_j$  است.  $\tilde{r}_j$  را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$\tilde{r}_j = r_j + \zeta_j \hat{r}_j, \quad -1 \leq \zeta_j \leq 1.$$

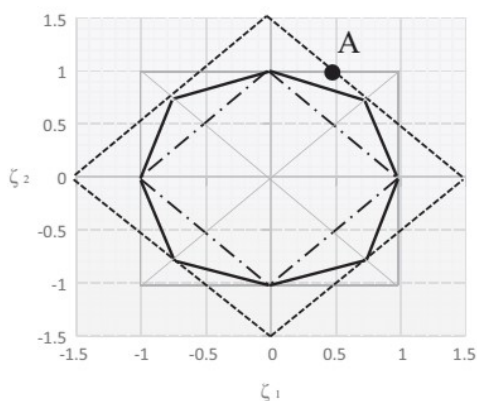


لذا  $r_j$  تابعی از متغیر تصادفی  $\zeta_j$  است. برای دستیابی به طرح‌های تغییرات در یک فضای غیرقطعی، تعدادی جفت متغیر تصادفی  $(\zeta_1, \zeta_2)$  را تولید می‌کنیم. شکل (۱) نتایج تولید ۱۰۰۰ جفت متغیر تصادفی  $(\zeta_1, \zeta_2)$  را با توجه به مقادیر مختلف همبستگی نشان می‌دهد. در این شکل هر نقطه یک جفت  $(\zeta_1, \zeta_2)$  را نشان می‌دهد. همان‌طور که در شکل (۱) نشان داده شده است، وقتی هیچ همبستگی بین متغیرهای تصادفی نیست، نقاط کاملاً یک مربع را پر می‌کنند و وقتی همبستگی‌ها به طور مثبت افزایش و یا به طور منفی کاهش می‌یابد، نقاط به ترتیب اطراف خط  $y = x$  یا  $y = -x$  متمرکز هستند [۱۹].



شکل ۱. نقاط پراکنده اختلالات با توجه به مقادیر مختلف همبستگی [۱۹]

افزایش همبستگی بین ضرایب غیرقطعی، باعث ظهور تعدادی نواحی خالی درون مجموعه عدم قطعیت می‌شود. با توجه به وجود همبستگی بین ضرایب، نقاط تصادفی حول یک قطر جمع شده‌اند؛ لذا مرزهای چندوجهی را خم می‌کنیم به طوری که نواحی اطراف قطرها بهتر از نقاط دور از آن پوشش داده شوند، همانند شکل (۲). به علاوه، میزان خم شدن مرزها برای ساخت مجموعه عدم قطعیت جدید تابعی از همبستگی بین ضرایب است و همبستگی بیش تر منجر به تمرکز بیش تر اطراف قطرها و لذا خمیده‌تر شدن مرزها می‌شود.



- · - · - Polyhedral Uncertainty Set ( $\Gamma=1$ )  
 - - - - - Polyhedral Uncertainty Set ( $\Gamma=1.5$ )  
 ——— Correlated Polyhedral Uncertainty Set ( $\Gamma=1$ )

شکل ۲. مجموعه عدم قطعیت چندوجهی‌های همبسته در مقایسه با مجموعه عدم قطعیت چندوجهی [۱۹]

در نتیجه فرمول‌بندی مجموعه عدم قطعیت چندوجهی‌های همبسته برای حالتی که دو ضریب غیرقطعی داریم، به صورت زیر خواهد شد:

$$U^A = \left\{ \tilde{r}_j = r_j + \zeta_j \hat{r}_j \ (j = 1, 2) \left| \begin{array}{l} (1 - (2 - \Gamma)|\rho|)|\zeta_1| + |\zeta_2| \leq \Gamma, \\ |\zeta_1| + (1 - (2 - \Gamma)|\rho|)|\zeta_2| \leq \Gamma \end{array} \right. \right\}. \quad (8)$$

توجه کنید وقتی  $\rho = 0$ ، مجموعه عدم قطعیت (۸) همان مجموعه چندوجهی زیر است:

$$U^A = \left\{ \tilde{r}_j = r_j + \zeta_j \hat{r}_j \ (j = 1, 2) \mid |\zeta_1| + |\zeta_2| \leq \Gamma \right\}. \quad (9)$$

وقتی مساله دارای  $2I + 2$  محدودیت و هر محدودیت شامل  $|J|$  ضریب مستعد عدم قطعیت باشد، مجموعه عدم قطعیت چندوجهی‌های همبسته برای در نظر گرفتن همبستگی در ساختار فرمول‌بندی استوار به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$U^A = \left\{ \tilde{r}_j = r_j + \zeta_j \hat{r}_j, \forall j \in J_0 \left| \begin{array}{l} |\zeta_j| + \sum_{\substack{k \in J_0 \\ k \neq j}} \left[ \left( 1 - \left( \frac{|J_0| - \Gamma}{|J_0| - 1} \right) |\rho_{jk}| \right) |\zeta_k| \right] \leq \Gamma \end{array} \right. \right\}, \quad (10)$$

که  $j \in J_0 \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$  اندیس ضرایب غیرقطعی  $\tilde{r}_j$  را نشان می‌دهد. همچنین  $\rho_{jk}$  همبستگی بین ضرایب  $r_j$  و  $r_k$  را نشان می‌دهد که مقادیری در  $[-1, 1]$  می‌گیرد. بدیهی است هرگاه  $\rho_{jk} = 0$  (برای همه  $j$  و  $k \neq j$ )، مجموعه عدم قطعیت چندوجهی‌های همبسته (۱۰) معادل مجموعه عدم قطعیت چندوجهی

$$U^A = \left\{ \tilde{r}_j = r_j + \zeta_j \hat{r}_j, \forall j \in J_0 \mid \sum_{j \in J_0} |\zeta_j| \leq \Gamma \right\}$$

است. همچنین در حالت همبستگی کامل،  $|\rho_{jk}| = 1$ ، مجموعه عدم قطعیت (۱۰) همه‌ی قطرهای فضای عدم قطعیت را می‌پوشاند.

حال همتای استوار مساله (۱) تحت مجموعه عدم قطعیت چندوجهی‌های همبسته معرفی شده را توسعه می‌دهیم. همان‌طور که قبلاً گفته شد، در مساله بهینه‌سازی غیرقطعی (۱)،  $\tilde{r}_j$  ضرایب غیرقطعی به فرم  $\tilde{r}_j = r_j + \zeta_j \hat{r}_j$  است. چنین فرمی شامل دو مقدار است: مقدار اسمی و اختلال؛ یعنی (به ترتیب)  $r_j$  و  $\hat{r}_j$ . در نتیجه، اولین محدودیت مساله (۱) هم شامل مقادیر اسمی ضرایب و اختلالات شان است. هدف مدل بهینه‌سازی استوار، ماکزیمم کردن مقدار تابع هدف با توجه به بدترین حالت تغییرات تحت مجموعه عدم قطعیت انتخابی است. لذا دومین عبارت از اولین محدودیت مساله (۱) باید جواب را در مقابل بدترین شرایط اختلالات تحت مجموعه (۱۰) حفظ کند. در نتیجه همتای استوار مساله (۱) تحت مجموعه عدم قطعیت چندوجهی‌های همبسته به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} & \min \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T y_t \\ & s.t. \\ & -y_t - \sum_{j=1}^n r_{jt} x_j + \sum_{j=1}^n r_j x_j + \max_{\left\{ \zeta_j \mid \zeta_j + \sum_{k \in J_0, k \neq j} \left[ \left( 1 - \left( \frac{|\rho_{jk}| - \Gamma}{|\rho_{jk}| - 1} \right) \right) |\zeta_k| \right] \leq \Gamma \right\}} \left\{ \sum_{j \in J_0} |\zeta_j| \hat{r}_j x_j \right\} \leq 0, \quad t = 1, 2, \dots, T, \\ & -y_t + \sum_{j=1}^n r_{jt} x_j - \sum_{j=1}^n r_j x_j + \max_{\left\{ \zeta_j \mid \zeta_j + \sum_{k \in J_0, k \neq j} \left[ \left( 1 - \left( \frac{|\rho_{jk}| - \Gamma}{|\rho_{jk}| - 1} \right) \right) |\zeta_k| \right] \leq \Gamma \right\}} \left\{ \sum_{j \in J_0} |\zeta_j| \hat{r}_j x_j \right\} \leq 0, \quad t = 1, 2, \dots, T, \\ & -\sum_{j=1}^n r_j x_j + \max_{\left\{ \zeta_j \mid \zeta_j + \sum_{k \in J_0, k \neq j} \left[ \left( 1 - \left( \frac{|\rho_{jk}| - \Gamma}{|\rho_{jk}| - 1} \right) \right) |\zeta_k| \right] \leq \Gamma \right\}} \left\{ \sum_{j \in J_0} |\zeta_j| \hat{r}_j x_j \right\} \leq -\rho C, \\ & \sum_{j=1}^n x_j = C, \\ & 0 \leq x_j \leq u_j, \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \tag{11}$$

واضح است که (۱۱) در شکل فعلی یک مساله غیرخطی است؛ لذا در ادامه معادل خطی آن را بیان می‌کنیم. فرض کنیم بردار  $x^*$  جواب بهینه‌ی مساله (۱۱) باشد، تابع محافظ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\beta(x^*, \Gamma) = \max_{\left\{ \zeta_j \mid \zeta_j + \sum_{\substack{k \in J_0 \\ k \neq j}} \left[ \left( 1 - \left( \frac{|J_0| - \Gamma}{|J_0| - 1} \right) |\rho_{jk}| \right) |\zeta_k| \right] \leq \Gamma \right\}} \sum_{j \in J_0} |\zeta_j| \hat{r}_j x_j^* \quad (12)$$

این تابع را می‌توان بصورت مساله برنامه‌ریزی خطی زیر فرمول‌بندی کرد:

$$\begin{aligned} \beta(x^*, \Gamma) &= \max \sum_{j \in J_0} |\zeta_j| \hat{r}_j x_j^* \\ \text{s.t.} \\ |\zeta_j| + \sum_{\substack{k \in J_0 \\ k \neq j}} \left[ \left( 1 - \left( \frac{|J_0| - \Gamma}{|J_0| - 1} \right) |\rho_{jk}| \right) |\zeta_k| \right] &\leq \Gamma, & \forall j \in J_0, \\ 0 \leq |\zeta_j| &\leq 1, & \forall j \in J_0. \end{aligned} \quad (13)$$

حال مساله دوگان نظیر آن را در نظر می‌گیریم. متغیرهای دوگان  $z_j$  و  $p_j$  را به ترتیب برای محدودیت‌های اول و دوم مساله (13) در نظر می‌گیریم؛ بنابراین مساله دوگان به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \min \sum_{j \in J_0} \Gamma z_j + \sum_{j \in J_0} p_j \\ \text{s.t.} \\ z_j + \sum_{\substack{k \in J_0 \\ k \neq j}} \left( 1 - \left( \frac{|J_0| - \Gamma}{|J_0| - 1} \right) |\rho_{jk}| \right) z_k + p_j &\geq \hat{r}_j x_j^*, & \forall j \in J_0, \\ z_j &\geq 0, & \forall j \in J_0, \\ p_j &\geq 0. & \forall j \in J_0. \end{aligned} \quad (14)$$

لم ۲: مساله (13) شدنی و کراندار است.

اثبات: بردار  $(1, 1, \dots, 1)^T$  یک جواب شدنی برای مساله (13) است چون

$$\begin{aligned} \forall j \in J_0, |\zeta_j| + \sum_{\substack{k \in J_0 \\ k \neq j}} \left[ \left( 1 - \left( \frac{|J_0| - \Gamma}{|J_0| - 1} \right) |\rho_{jk}| \right) |\zeta_k| \right] &= |J_0| - \left( \frac{|J_0| - \Gamma}{|J_0| - 1} \right) \left( \sum_{\substack{k \in J_0 \\ k \neq j}} |\rho_{jk}| \right) \\ &\leq |J_0| - \left( \frac{|J_0| - \Gamma}{|J_0| - 1} \right) (|J_0| - 1) = \Gamma. \end{aligned}$$

از طرفی با توجه به اینکه برای هر  $j \in J_0$  ،  $|\zeta_j| \leq 1$ ؛ لذا داریم:

$$\sum_{j \in J_0} |\zeta_j| \hat{r}_j x_j^* \leq \sum_{j \in J_0} \hat{r}_j x_j^*. \blacksquare$$

در نتیجه طبق قضیه دوگانگی قوی، توابع هدف بهینه مسایل (۱۳) و (۱۴) برابر هستند. پس  $\beta(x^*, \Gamma)$  در فرمول بندی (۱۱) می تواند با تابع هدف مساله (۱۴) عوض شود؛ لذا همتای استوار خطی مساله (۱) تحت مجموعه عدم قطعیت چندوجهی های همبسته به صورت زیر بیان می شود:

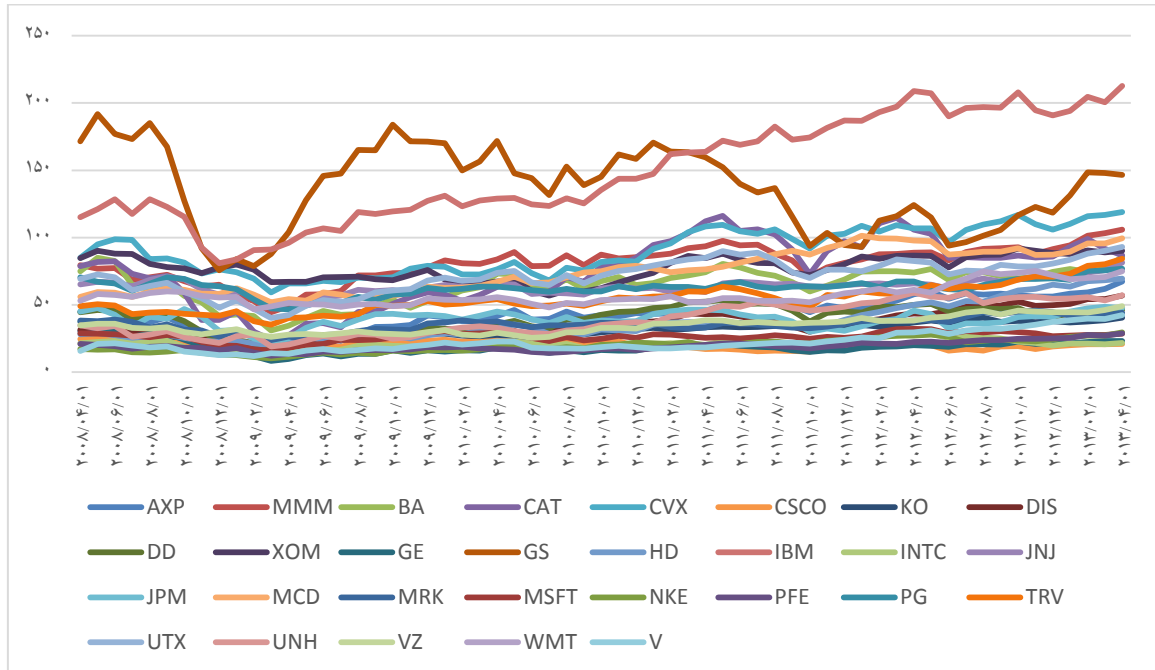
$$\begin{aligned} & \min \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T y_t \\ & s.t. \\ & -y_t - \sum_{j=1}^n r_{jt} x_j + \sum_{j=1}^n r_j x_j + \sum_{j \in J_0} \Gamma z_j + \sum_{j \in J_0} p_j \leq 0, \quad t = 1, 2, \dots, T, \\ & -y_t + \sum_{j=1}^n r_{jt} x_j - \sum_{j=1}^n r_j x_j + \sum_{j \in J_0} \Gamma z_j + \sum_{j \in J_0} p_j \leq 0, \quad t = 1, 2, \dots, T, \\ & -\sum_{j=1}^n r_j x_j + \sum_{j \in J_0} \Gamma z_j + \sum_{j \in J_0} p_j + \rho C \leq 0, \quad (15) \\ & z_j + \sum_{\substack{k \in J_0 \\ k \neq j}} \left( 1 - \left( \frac{|J_0| - \Gamma}{|J_0| - 1} \right) |\rho_{jk}| \right) z_k + p_j \geq \hat{r}_j x_j, \quad \forall j \in J_0, \\ & \sum_{j=1}^n x_j = C, \\ & z_j \geq 0, \quad \forall j \in J_0, \\ & p_j \geq 0, \quad \forall j \in J_0, \\ & 0 \leq x_j \leq u_j, \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

همان طور که ملاحظه می شود مدل میانگین انحراف مطلق همبسته به وسیله چارچوب برنامه ریزی خطی ارائه شده است که میزان پیچیدگی محاسباتی را کاهش می دهد در حالی که در این زمان پارامترهای غیر قطعی همبسته را نیز در نظر می گیرد. این همتای استوار دارای  $|J_0| - 1$  متغیر بیشتر از همتای استوار بهبود یافته است و در شرایطی که همبستگی بین ضرایب غیر قطعی صفر باشد،  $\rho_{jk} = 0$ ، با تعریف متغیر جدید  $z = \sum_{j \in J_0} z_j$  در همتای استوار همبسته، دو همتای استوار بهبود یافته و همبسته کاملاً یکسان خواهند بود.

#### ۴ نتایج تجربی

در این بخش رفتار مدل های قطعی و استوار ارائه شده روی داده های واقعی از بازار سهام با هم مقایسه می شوند. بدین منظور، سهام های مربوط به ۲۹ شرکت آمریکایی به طور تصادفی انتخاب شده است. این مجموعه داده ها شامل قیمت های اوراق بهادار از آوریل ۲۰۰۸ تا آوریل ۲۰۱۲ می باشد که شاخص این ۲۹ شرکت در شکل (۳)

آمده است.



شکل ۳. شاخص داده تاریخی

هدف دستیابی به حداقل ریسک برای رسیدن به ماکزیمم بازده مطلوب است. جهت ارزیابی عملکرد همتهای استوار بهبودیافته و همتهای استوار همبسته، مدل (۱) را برای ۴ بازه زمانی مختلف در نظر می‌گیریم. جزئیات در جدول ۱ آمده است.

جدول ۱. اندازه مسایل نمونه

شماره مساله	۱	۲	۳	۴
سال‌های مربوط	تا ۲۰۰۸/۴/۱	تا ۲۰۰۸/۱۱/۱	تا ۲۰۰۹/۱۱/۱	تا ۲۰۱۱/۴/۱
تعداد متغیرها و معادلات مدل بهبودیافته	۶۷ و ۱۳۲	۷۲ و ۱۴۲	۷۷ و ۱۵۲	۸۴ و ۱۶۶
تعداد متغیرها و معادلات مدل همبسته	۶۷ و ۱۶۰	۷۲ و ۱۷۰	۷۷ و ۱۸۰	۸۴ و ۱۹۴

میزان دارایی اولیه برای شروع سرمایه‌گذاری در این ۲۹ شرکت را ۱۰۰۰ دلار و حداقل بازده مورد انتظار،  $r$ ، را برابر ماکزیمم بازده‌های مشاهده شده در نظر می‌گیریم. همچنین فرض می‌شود انحراف بازده‌های مشاهده شده از بازده‌های اسمی ۱۰ درصد و سطح حفاظت نیز بین ۰ تا ۲۹ تغییر می‌کند.

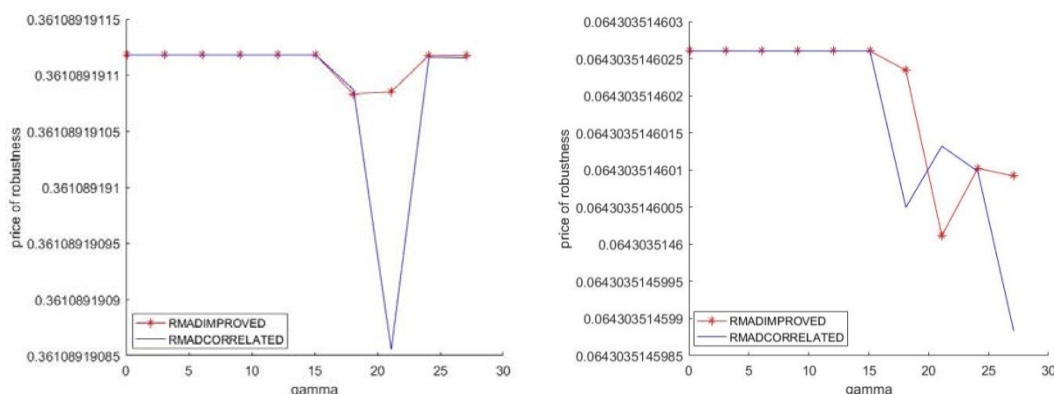
هدف آزمایش‌های آتی، مقایسه‌ی عملکرد همتهای استوار بهبودیافته و همبسته به ازای سطوح مختلف حفاظت است. برسیماس و سیم رابطه‌ی بین سطح حفاظت در مقابل عدم قطعیت و مقدار تابع هدف را با عنوان بهای استواری پیشنهاد نمودند [۱۱]. آن‌ها اذعان داشتند که بهای تغییر در سطح حفاظت،  $\Gamma$ ، از تخمین میزان تغییر

تابع هدف به علت همین تغییر  $\Gamma$  به دست می آید.  $F_D$  و  $F_R$  را به ترتیب مقادیر هدف مدل استوار و مدل اسمی در نظر بگیرید. در این صورت بهای استواری به صورت زیر تعریف می شود:

$$\text{بهای استواری} = \frac{F_D - F_R}{F_D}.$$

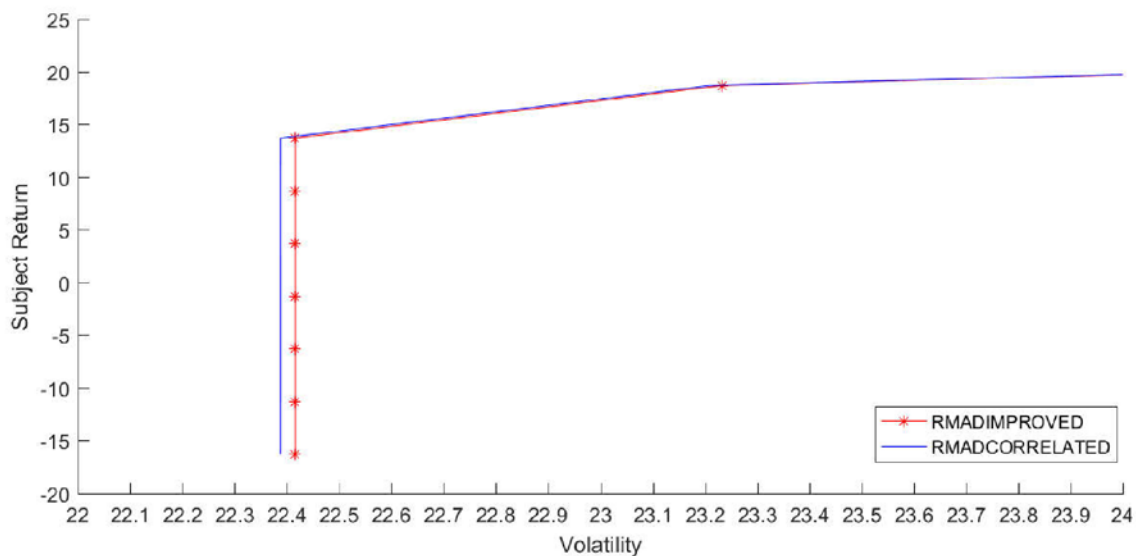
لذا از بهای استواری به عنوان مقیاس ارزیابی عملکرد مدل استوار بهبودیافته و مدل استوار همبسته استفاده می کنیم. به این معنا که هر چه بهای استواری کم تر باشد، مدل مطلوب تر است و برای یک سطح حفاظت خاص به مقدار هدف بهتری رسیده ایم.

مقیاس بهای استواری را برای مسایل نمونه به ازای همبستگی ضعیف، متوسط و قوی استفاده می کنیم. در اکثر موارد مدل همبسته بهتر از مدل بهبودیافته عمل می کند، و هرچه همبستگی بیش تر شود عملکرد مدل همبسته بهتر است. در شکل (۴) بهای استواری وابسته به جواب های به دست آمده از مدل بهبودیافته و مدل همبسته در سطوح مختلف حفاظت نشان داده شده است. در حالت همبستگی ضعیف و متوسط عملکرد دو مدل مشابه است؛ اما در حالت همبستگی قوی، مدل همبسته هزینه استواری کم تری از مدل بهبودیافته دارد. همچنین در حالت سطح بالای حفاظت، دو مدل بهبودیافته و همبسته دارای نتایج مشابه هستند.



شکل ۴. بهای استواری مدل های استوار بهبودیافته و همبسته در حالت همبستگی ضعیف (نمودار سمت راست) و همبستگی قوی (نمودار سمت چپ)

شکل (۵) نیز مرز کارای دو مدل بهبود یافته و همبسته را نشان می دهد. همان طور که مشاهده می شود با توجه به نمودار مرز کارا تنها راه رسیدن به بازده مورد انتظار بالاتر، ریسک پذیری بیش تر است.



شکل ۵. مرز کارای مدل میانگین انحراف مطلق بهبود یافته و همبسته

## ۵ بحث و نتیجه گیری

در این مقاله، ابتدا یک مدل استوار بهبود یافته برای مدل میانگین انحراف مطلق ارائه شد. سپس با معرفی مجموعه عدم قطعیت همبسته، همتای استوار مدل میانگین انحراف مطلق تحت این مجموعه عدم قطعیت ارائه گردید. سپس عملکرد دو مدل میانگین انحراف مطلق بهبود یافته و همبسته مورد مطالعه قرار گرفت. نتایج استفاده از دو مدل بهبود یافته و همبسته نشان داد که وقتی بین ضرایب غیرقطعی همبستگی قابل توجهی وجود داشته باشد، مدل استوار همبسته در مقایسه با مدل استوار بهبود یافته جواب‌های بهتری خواهد داشت. علاوه بر این نتایج نشان داد که وقتی میزان همبستگی بین ضرایب افزایش یابد، مدل استوار همبسته عملکرد بهتری دارد. به طور کلی تحت شرایطی که داده‌های غیرقطعی همبسته‌اند، مدل استوار همبسته یک مدل تاثیر گذار است.

## ۶ قدردانی

نویسندگان از داور محترم بدلیل ارائه نظرات سازنده و دانشگاه گیلان به دلیل حمایت مالی قدردانی می‌کنند.

## منابع

- [۱۸] رضایی، م.ح.، قهطرانی، ع.، نجفی، ا.ع.، (۱۳۹۶). به کارگیری بهینه‌سازی استوار در مساله انتخاب سبد سهام با افت سرمایه در معرض خطر مشروط. مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، ۵۳(۲)، ۸۱-۹۳.
- [۲۱] ایزری، م.، صمدی، س.، تیموری، ه.، (۱۳۸۶). بررسی عوامل موثر بر ریسک و بازده سرمایه‌گذاری در محصولات مالی. مجله روند، ۵۵و۵۴، ۱۲۳-۱۵۲.

- [1] Markowitz, H., (1952). Portfolio selection. The Journal of Finance, 7(1), 77-91.
- [2] Konno, H., Yamazaki, H., (1991). Mean-Absolute deviation portfolio optimization model and its applications to Tokyo stock market. Management Science, 37(5), 519-531.
- [3] Keller, H., Mansini, R., Speranza, M. G., (2000). Selecting with fixed costs and minimum transaction lots. Annals of Operations Research, 99, 287-304.



- [4] Mansini, R., Ogryczak, W., Grazia Speranza, M., (2003). LP solvable models for portfolio optimization: A classification and computational comparison, *IMA Journal of Management Mathematics*, 14(3), 187-220.
- [5] Chiodi, L., Mansini, R., Speranza, M. G., (2003). Semi-absolute deviation rule for mutual funds portfolio selection, *Annals of Operations Research*, 124(1-4), 245-265.
- [6] Papahristodoulou, C., Dotzauer, E., (2004). Optimal portfolios using linear programming models, *Journal of the Operational Research Society*, 55(11), 1169-1177.
- [7] Mansini, R., Speranza, M. G., (1999). Heuristic algorithms for the portfolio selection problem with minimum transaction lots, *European Journal of Operational Research*, 114(2), 219-233.
- [8] Chang, T. J., Meade, N., Beasley, J. E., Sharaiha, Y. M., (2000). Heuristics for cardinality constrained portfolio optimization, *Computers and Operations Research*, 27(13), 1271-1302.
- [9] Kim, J. S., (2005). An algorithm for portfolio optimization problem, *Informatica*, 16(1), 93-106.
- [10] Ben-Tal, A., Nemirovski, A., (1998). Robust convex optimization, *Mathematics of Operations Research*, 23(4), 769-805.
- [11] Bertsimas, D., Sim, M., (2004). The price of robustness, *Operations Research*, 52(1), 35-53.
- [12] Liu, SH-T., (2011). The mean-absolute deviation portfolio selection problem with interval-valued returns, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 235(14), 4149-4157.
- [13] Moon, Y., Yao, T., (2011). A robust mean-absolute deviation model for portfolio optimization, *Computers and Operations Research*, 38(9), 1251-1258.
- [14] Soyster, A.L., (1973). Convex programming with set-inclusive constraints and applications to inexact linear programming, *Operations Research*, 21(4), 1154-1157.
- [15] El Ghaoui, L., Oks, M., Oustry, F., (2003). Worst-case value-at-risk and robust portfolio optimization: A conic programming approach, *Operations Research*, 51(4), 543-556.
- [16] Goldfarb, D., Iyengar, G., (2003). Robust portfolio selection problems, *Mathematics of Operations Research*, 28(1), 1-38.
- [17] Tutuncu, R., Koenig, M., (2004). Robust asset allocation, *Annals of Operations Research*, 132(1), 157-187.
- [19] Jalilvand-Nejad, A., Shafaei, R., Shahriari, H., (2016). Robust optimization under correlated polyhedral uncertainty Set, *Computers and Industrial Engineering*, 92, 82-94.
- [20] Byrne, P., Lee, S., (2004). Different risk measures: Different portfolio compositions?, *Journal of Property Investment and Finance*, 22(6), 501-511.