مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، سال پانزدهم، شماره سوم (پیاپی ۵۸)، پاییز ۹۷، ص ص ۱۳-۱
شاپا ۷۲۸۶-۲۲۵۱

پیدا کردن یک نقطه درونی نسبی یک چندوجهی با استفاده از برنامه‌ریزی خطی: کاربرد در برنامه‌ریزی هندسی

سید مرتضی میردهقان[1*]، محمود مهدیلو[2]
۱- دانشیار، گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه شیراز، شیراز، ایران
۲- دکتری، گروه ریاضیات و کاربردها، دانشگاه محقق اردبیلی، اردبیل، ایران

رسید مقاله: ۱۸ اردیبهشت ۱۳۹۵
پذیرش مقاله: ۱۶ دی ۱۳۹۶

چکیده
یکی از مفاهیم اساسی در آنالیز محدب و بهینه‌سازی مفهوم درون نسبی یک مجموعه است. این مفهوم وقتی استفاده می‌شود که درون یک مجموعه به علت کامل نبودن بعد آن تهی است. در این مقاله، ابتدا یک مدل برنامه‌ریزی خطی برای پیدا کردن یک نقطه درونی نسبی یک مجموعه چندوجهی پیشنهاد می‌کنیم. سپس، کاربرد این مدل در برنامه‌ریزی هندسی را بحث می‌کنیم. به‌طور مشخص، ما نشان می‌دهیم که فرم خاصی از مدل پیشنهادی ما می‌تواند تباهیدگی یک مساله برنامه‌ریزی هندسی را با تعیین یک نقطه درونی نسبی ناحیه شدنی دوگان آن مشخص کند. در نهایت، دو مثال عددی برای تشریح کاربردهای مدل پیشنهادی ارایه می‌کنیم.

کلمات کلیدی: مجموعه چندوجهی، رویه، درون نسبی، برنامه‌ریزی خطی، برنامه‌ریزی هندسی.

۱ مقدمه
یکی از پرکاربردترین مفاهیم در ریاضیات و به‌خصوص در آنالیز محدب و بهینه‌سازی، مفهوم نقطه درونی است. در یک فضای توپولوژیکی، یک نقطه از یک مجموعه را یک نقطه درونی آن نامند هرگاه، یک همسایگی از آن نقطه موجود باشد به‌طوری‌که زیرمجموعه‌ی آن مجموعه باشد [۱]. مجموعه تمام نقاط درونی یک مجموعه را درون آن مجموعه می‌نامند. اگر یک مجموعه دارای بعد کامل نباشد، آنگاه درون آن تهی خواهد بود. در این حالت، مفهوم درون نسبی به‌عنوان تعمیمی از مفهوم درون معرفی می‌شود. به‌طور دقیق‌تر، اگر یک مجموعه به‌عنوان یک زیرمجموعه از پوسته آفینی‌اش (نه فضایی که در آن قرار دارد) در نظر گرفته شود، آنگاه درون آن به‌عنوان درون نسبی آن مجموعه تعریف می‌شود [۱]. نکته قابل‌توجه این است که اگر یک مجموعه دارای بعد کامل باشد، آنگاه درون نسبی آن همان درون آن مجموعه است.

* عهده‌دار مکاتبات
آدرس الکترونیکی: mirdehghan@shirazu.ac.ir

Archive of SID
www.SID.ir

با استفاده از هر ابرصفحه، فضای اقلیدسی به دو بخش تقسیم می‌شود که نیم‌فضاهای (محدب بسته) تولیدشده توسط این ابرصفحه نامیده می‌شود. یک چندوجهی، مجموعه‌ای است که از اشتراک تعداد متناهی نیم‌فضا به وجود می‌آید. همچنین، مجموعه‌ی نقاطی از یک چندوجهی که در اشتراک یک دسته از ابرصفحه‌های سازای آن قرار دارند، یک رویه آن چندوجهی نامیده می‌شود. هر رویه یک چندوجهی خود یک چندوجهی است. به تمام رویه‌های یک چندوجهی به‌جز خود چندوجهی و مجموعه‌ی تهی، رویه‌های غیر بدیهی می‌گویند. رویه‌های غیر بدیهی یک چندوجهی، مرز آن را می‌سازد. درواقع، مرز چندوجهی از اجتماع تمام رویه‌های غیر بدیهی آن به وجود می‌آید. در برخی از مسایل بهینه‌سازی، ازجمله مسایل برنامه‌ریزی خطی و برنامه‌ریزی چندهدفه خطی، جواب‌های بهینه یا جواب‌های کارا بر روی مرز ناحیه شدنی و درنتیجه روی رویه‌های غیر بدیهی ناحیه شدنی قرار دارند؛ بنابراین، رویه‌های غیر بدیهی نقش بسیار مهمی در بهینه‌سازی دارند.

از آنالیز محدب [۱]، می‌دانیم که درون نسبی هر مجموعه محدب ناتهی و در حالت خاص هر مجموعه چندوجهی ناتهی، یک مجموعه محدب ناتهی است. با توجه به این مطلب، سؤال مهمی که پیش می‌آید این است که چگونه می‌توان یک نقطه درونی نسبی یک چندوجهی یا یک نقطه درون نسبی یک رویه از یک چندوجهی را پیدا کرد. به دلایل زیر، پاسخ این سؤال در بهینه‌سازی از اهمیت بسزایی برخوردار است:

- مشخص کردن یک نقطه درونی نسبی رویه‌ی بهینه یک مساله برنامه‌ریزی خطی برای تحلیل پارامتری مفید است [۲].
- هر جفت از نقاط درونی نسبی رویه‌های بهینه اولیه و دوگان یک مساله برنامه‌ریزی خطی یک جواب مکمل قوی را تولید می‌کند [۲].
- یک نقطه درونی نسبی یک چندوجهی را می‌توان برای تعیین وجود معادلات صریح (قیود نامساوی که سرتاسر ناحیه شدنی به‌صورت تساوی برقرارند) استفاده نمود [۲].
- هر جفت از نقاط درونی نسبی رویه‌های بهینه اولیه و دوگان یک مساله برنامه‌ریزی کسری خطی یک جواب مکمل قوی را تولید می‌کند [۳].
- بررسی وضعیت کارایی یک نقطه درونی نسبی یک رویه از ناحیه شدنی یک مساله برنامه‌ریزی خطی چندهدفه وضعیت دیگر نقاط آن رویه را مشخص می‌کند. به‌طور دقیق‌تر، اگر نقطه درونی نسبی مذکور کارا باشد، آنگاه همه نقاط روی آن رویه کاراست [۴].
- در تحلیل پوششی داده‌ها، مجموعه مرجع سراسری یک واحد تصمیم‌گیرنده ناکارا توسط یک نقطه درونی نسبی تصویری از یک مجموعه چندوجهی (که بنا بر لم تصویر یک چندوجهی است) مشخص می‌شود. همچنین، بازده به مقیاس یک واحد تصمیم‌گیرنده ناکارا توسط یک نقطه درونی نسبی رویه‌ی مینیمال متناظر آن در مجموعه (چندوجهی) امکان تولید تعیین می‌شود [۵].
- در تحلیل پوششی داده‌ها، می‌توان کلاس‌بندی هر واحد تصمیم‌گیرنده را با استفاده از یک نقطه درونی نسبی مجموعه امکان تولید شامل همه واحدهای مغلوب‌کننده آن واحد مشخص نمود [۶].

Archive of SID

www.SID.ir

- عدم تباهیدگی یک مساله برنامه‌ریزی هندسی، امکان پیدا نمودن جواب بهینه مساله اولیه را از طریق حل مساله دوگان آن (با استفاده از روش‌های موجود برای حل مسایل برنامه‌ریزی محدب) فراهم می‌کند. درواقع، اگر ناحیه شدنی دوگان یک مساله برنامه‌ریزی هندسی شامل عضوی با همه مؤلفه‌های مثبت باشد، آنگاه جواب بهینه مساله برنامه‌ریزی هندسی را می‌توان با حل دوگان آن به دست آورد [۷].

تاکنون، روش‌های مختلفی در مقالات برای پیدا کردن یک نقطه درون نسبی یک چندوجهی پیشنهاد شده‌است. جفرسون و اسکات [۷] یک الگوریتم برای پیدا کردن یک نقطه درونی نسبی یک چندوجهی ارایه نمودند. همچنین، یه [۸] یک روش برای پیدا کردن یک نقطه درونی نسبی یک رویه از چندوجهی با استفاده از یک مساله بهینه‌سازی ارایه کرد که تابع هدف آن مینیمم‌سازی فاصله یک نقطه درونی چندوجهی از آن رویه است. به‌علاوه، تو [۹] یک مدل برنامه‌ریزی خطی برای پیدا کردن نقاط درونی نسبی رویه‌های یک چندوجهی ارایه نمود و از آن برای مشخص کردن رویه‌های کارای ماکسیمال یک مساله برنامه‌ریزی چندهدفه خطی استفاده نمود. اخیراً، مهدیلوزاد و همکاران [۲] روشی برای پیدا کردن یک عضو ماکسیمال یک مجموعه محدب نامنفی پیشنهاد نمودند که از آن می‌توان در پیدا نمودن نقطه درونی نسبی یک چندوجهی بهره برد.

هدف اصلی این مقاله ارایه یک روش مبتنی بر برنامه‌ریزی خطی برای یافتن یک نقطه درونی نسبی یک مجموعه چندوجهی (با قیود از نوع تساوی و نامساوی) و بررسی کاربرد آن در برنامه‌ریزی هندسی است. برای این منظور، ابتدا، مجموعه چندوجهی را به‌طور معادل با یک مجموعه چندوجهی در یک بعد بالاتر نمایش می‌دهیم. سپس، ثابت می‌کنیم که هر عضو ماکسیمال (یک عضو با بیش‌ترین تعداد مؤلفه مثبت) مجموعه چندوجهی جدید یک نقطه درونی نسبی چندوجهی داده‌شده را مشخص می‌کند. در ادامه، یک مدل برنامه‌ریزی خطی ارایه می‌کنیم که یک عضو ماکسیمال مجموعه چندوجهی جدید و درنتیجه یک نقطه درونی نسبی چندوجهی اولیه را می‌یابد. درنهایت، به‌عنوان یک نتیجه کاربردی، یک فرم خاص از مدل پیشنهادی را برای تشخیص تباهیدگی یک مساله برنامه‌ریزی هندسی ارایه می‌کنیم.

ساختار این مقاله در ادامه به‌صورت زیر است. در بخش دوم، ابتدا نمادگذاری‌های استفاده‌شده را در این مقاله معرفی می‌کنیم و سپس، مقدماتی را از آنالیز محدب و برنامه‌ریزی هندسی به‌اختصار بیان می‌کنیم. در بخش سوم، روش پیشنهادی را به همراه قضیه‌های مربوطه ارایه می‌کنیم. در بخش چهارم، کاربرد نتایج ارایه‌شده را با استفاده از دو مثال عددی تشریح می‌کنیم. با مثال اول، کاربرد مدل پیشنهادی را برای تعیین نقاط درونی نسبی رویه‌های یک چندوجهی توضیح می‌دهیم. همچنین، با مثال دوم، نحوه استفاده از روش پیشنهادی را برای تشخیص تباهیدگی یک مساله برنامه‌ریزی هندسی توضیح می‌دهیم.

۲ نمادگذاری و مقدمات

در این بخش، ابتدا نمادگذاری‌های استفاده‌شده را در این مقاله معرفی می‌کنیم. سپس، مقدماتی از آنالیز محدب و برنامه‌ریزی هندسی را که در بخش‌های آینده استفاده می‌شوند به‌اختصار بیان می‌کنیم.

Archive of SID
www.SID.ir

۱-۲ نمادگذاری

در این مقاله، از نمادگذاری‌های زیر استفاده می‌کنیم. فرض می‌کنیم که $\mathbb{R}^d$ نشان‌دهنده فضای اقلیدسی d- بعدی است و $\mathbb{R}^d_+$ ($\mathbb{R}^d_{++}$) نشان‌دهنده فضای اقلیدسی نامنفی (مثبت) از همان بعد است. مجموعه‌ها را با حروف بزرگ A، B،...، ماتریس‌ها را با حروف بزرگ برجسته $\mathbf{A}$، $\mathbf{B}$،... ، بردارها را با حروف کوچک برجسته $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$،... و مؤلفه‌های بردارها را با حروف کوچک ایتالیک a_1، a_2،... نمایش می‌دهیم. فرض می‌کنیم که همه بردارها ستونی هستند و برای نمایش ترانهاده یک بردار از بالانویس T استفاده می‌کنیم. به‌علاوه، از نمادهای $\mathbf{0}_d$ و $\mathbf{1}_d$ برای نمایش بردارهایی در $\mathbb{R}^d_+$ استفاده می‌کنیم که همه مؤلفه‌های آن‌ها به ترتیب برابر ۰ و ۱ هستند. برای نمایش مجموعه اندیس‌گذار مؤلفه‌های مثبت بردار $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^d_+$، از نماد $\sigma(\mathbf{x})$ استفاده می‌کنیم و تعداد اعضای آن را به‌صورت $n^+(\mathbf{x})$ نمایش می‌دهیم؛ یعنی $n^+(\mathbf{x})=\mathrm{Card}(\sigma(\mathbf{x}))$.

۲-۲ مقدماتی از آنالیز محدب

در این بخش، تعاریف و مفاهیمی مقدماتی از آنالیز محدب ارایه می‌شود که در ادامه، در بحث‌ها و تئوری‌های پیشنهادی ما، استفاده می‌گردد. تعاریف و مفاهیم بیان‌شده در این بخش برگرفته از [۱، ۲، ۱۰] است.

تعریف ۱ فرض کنید $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_k\in\mathbb{R}^d$. در این صورت، یک ترکیب آفین از این نقاط، نقطه $\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\mathbf{x}_j$ است به‌طوری‌که $\boldsymbol{\lambda}\in\mathbb{R}^k$ و $\mathbf{1}_k^T\boldsymbol{\lambda}=1$.

تعریف ۲ پوسته آفین مجموعه $X\subseteq\mathbb{R}^d$ عبارت است از مجموعه همه ترکیبات آفین زیرمجموعه‌های متناهی آن و با نماد $\mathrm{aff}(X)$ نمایش داده می‌شود.

تعریف ۳ مجموعه $X\subseteq\mathbb{R}^d$ محدب است اگر و تنها اگر، $\lambda\mathbf{x}_1+(1-\lambda)\mathbf{x}_2\in X$ به ازای هر $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2\in X$ و هر $\lambda\in[0,1]$.

تعریف ٤ مجموعه محدب $X\subseteq\mathbb{R}^n$ نامنفی نامیده می‌شود اگر و تنها اگر زیرمجموعه $\mathbb{R}^n_+$ باشد.

تعریف ۵ $\mathbf{x}^{\max}$ یک عضو ماکسیمال مجموعه محدب نامنفی $X\subseteq\mathbb{R}^d_+$ است اگر و تنها اگر $\mathbf{x}^{\max}\in\arg\max_{\mathbf{x}\in X} n^+(\mathbf{x})$.

حال، مفهوم درون نسبی یک مجموعه دلخواه در $\mathbb{R}^d$ را معرفی می‌کنیم. برای این منظور، ابتدا ε- همسایگی یک نقطه $\mathbf{x}_0$ در $\mathbb{R}^d$ را به‌صورت مجموعه $N_\varepsilon(\mathbf{x}_0):=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^d:\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|<\varepsilon\}$ تعریف می‌کنیم به‌طوری‌که $\|\cdot\|$ نشان‌دهنده یک نرم است.

تعریف ٦ اگر مجموعه $X\subseteq\mathbb{R}^d$ به‌عنوان یک زیرمجموعه $\mathrm{aff}(X)$ در نظر گرفته شود، آنگاه درون این مجموعه به‌عنوان درون نسبی آن تعریف و با نماد $\mathrm{ri}(X)$ نمایش داده می‌شود؛ به عبارت دیگر، $\mathbf{x}_0\in\mathrm{ri}(X)$ اگر و تنها اگر $\varepsilon>0$ موجود باشد به‌طوری‌که $N_\varepsilon(\mathbf{x}_0)\cap\mathrm{aff}(X)\subseteq X$.

Archive of SID
www.SID.ir

مجموعه تمام نقاط درونی (نسبی) یک مجموعه را *درون (نسبی)* آن مجموعه می‌نامند. توجه کنید که اگر درون یک مجموعه ناتهی باشد، آنگاه نقاط درونی آن، همان نقاط درونی نسبی آن هستند. به‌علاوه، درون نسبی مجموعه محدب $X \subseteq \mathbb{R}^d$ را می‌توان به فرم معادل زیر بیان کرد:

$$\mathrm{ri}(X) = \{\mathbf{x} \in X :\ \forall \mathbf{y} \in X, \exists \delta > 1 \text{ such that } \delta\mathbf{x} + (1-\delta)\mathbf{y} \in X\}. \qquad (1)$$

تعریف ۷ ابرصفحه $H_{\mathbf{p},\alpha} \subseteq \mathbb{R}^d$ با بردار گرادیان $\mathbf{p} \neq \mathbf{o}_d$ عبارت است از مجموعه متناظر با جفت $(\mathbf{p},\alpha)$ که به‌صورت $H_{\mathbf{p},\alpha} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d :\ \mathbf{p}^T\mathbf{x} = \alpha\}$ تعریف می‌شود.

با استفاده از هر ابرصفحه، فضای $\mathbb{R}^d$ به دو بخش تقسیم می‌شود که نیم‌فضاهای (محدب بسته) تولیدشده توسط این ابرصفحه نامیده می‌شود. دو نیم‌فضای متناظر $H_{\mathbf{p},\alpha}$ به‌صورت زیر هستند:

$$H^+_{\mathbf{p},\alpha} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d :\ \mathbf{p}^T\mathbf{x} \geq \alpha\}, \qquad \mathrm{H}^-_{\mathbf{p},\alpha} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d :\ \mathbf{p}^T\mathbf{x} \leq \alpha\}.$$

چون هر نیم‌فضا یک مجموعه محدب بسته است، اشتراک تعداد متناهی نیم‌فضا تشکیل یک مجموعه محدب بسته می‌دهد. بر این اساس، تعریف زیر را داریم:

تعریف ۸ مجموعه تولیدشده به‌وسیله اشتراک تعداد متناهی از نیم‌فضاها یک چندوجهی نامیده می‌شود؛ به عبارت دیگر، هر مجموعه چندوجهی به فرم $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d :\ \mathbf{p}_i^T\mathbf{x} \leq \alpha_i,\ i = 1,\ldots,m\}$ است به‌طوری‌که $\mathbf{o}_d \neq \mathbf{p}_i \in \mathbb{R}^d$ و $\alpha_i \in \mathbb{R}$ به ازای هر $i=1,\ldots,m$.

۲-۳ مقدماتی از برنامه‌ریزی هندسی

برنامه‌ریزی هندسی یکی از انواع مسایل بهینه‌سازی غیرخطی است که توسط دافین و همکاران [11] در سال ۱۹۶۷ پیشنهاد شد. تابع هدف و قیود این مساله دارای ساختار خاصی هستند. از ویژگی‌های جالب برنامه‌ریزی هندسی می‌توان به (الف) وجود جواب بهینه سراسری و (ب) تبدیل یک مساله برنامه‌ریزی هندسی اولیه با تابع هدف غیرخطی و قیود غیرخطی به یک مساله دوگان با تابع هدف غیرخطی و قیود خطی اشاره کرد [7].

در حالت کلی، مساله برنامه‌ریزی هندسی به فرم زیر است:

$$\begin{aligned} &Min \quad z = \sum_{k\in K_0} c_k \prod_{j=1}^{n} x_j^{a_{kj}} \\ &s.t. \quad \mathbf{x} \in X = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n :\ \sum_{k\in K_i} c_k \prod_{j=1}^{n} x_j^{a_{kj}} \leq 1,\ i = 1,\ldots,m,\ \mathbf{x} > \mathbf{o}_n\right\}, \end{aligned} \qquad (2)$$

به‌طوری‌که $K_0 = \{1,\ldots,p_1\}$، $K_i = \{p_i + 1,\ldots,p_{i+1}\}$ ($i = 1,\ldots,m$) و $p_{m+1} = p$. همان‌طور که می‌بینیم، تابع هدف، قید اول، ...، و قید mام تشکیل‌دهنده X همگی توابع پوزینومیال (توابع چندجمله‌ای با ضرایب مثبت $c_k \in \mathbb{R}_{++}$ و توان‌های حقیقی $a_{kj} \in \mathbb{R}$) از بردار متغیر $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_{++}$ هستند به‌طوری‌که تعداد جملات آن‌ها به ترتیب برابر با p_1، $p_2 - p_1$، ...، و $p - p_m$ است. همچنین، مجموعه‌های K_0، K_1، ...، و K_m یک افراز از مجموعه $\{1,\ldots,p\}$ را تشکیل می‌دهند. ازاین‌رو، مساله (۲) مساله برنامه‌ریزی پوزینومیال نیز نامیده می‌شود.

www.SID.ir

متناظر مساله اولیه (۲)، مساله دوگان به‌صورت زیر فرمول‌بندی می‌شود:

$$\begin{aligned} Max \quad & w=\prod_{k=1}^{p}\left(\frac{c_k}{y_k}\right)^{y_k}\times\prod_{i=1}^{m}\lambda_i^{\lambda_i} \\ s.t. \quad & \mathbf{y}\in Y=\left\{\mathbf{y}\in\mathbb{R}^p:\ \sum_{k=1}^{p}\mathbf{a}_k y_k=\mathbf{o}_n,\ \sum_{k\in K_0} y_k=1,\ \mathbf{y}\ge\mathbf{o}_p\right\}, \end{aligned} \tag{۳}$$

که در آن $\mathbf{a}_k^T=\left(a_{k1},\dots,a_{kn}\right)^T$ و $\lambda_i=\sum_{k\in K_i} y_k$ به ازای هر $i=1,\dots,m$.

به‌وضوح، ناحیه شدنی Y یک مجموعه چندوجهی است. اگر $Y\cap\mathbb{R}_{++}^p=\varnothing$، آنگاه مساله برنامه‌ریزی هندسی تباهیده نامیده می‌شود. این بدین معنی است که تباهیدگی وقتی اتفاق می‌افتد که جوابی شدنی برای مساله دوگان یافت نشود به‌طوری‌که همه مؤلفه‌های آن مثبت باشند.

می‌توان ثابت نمود که تابع هدف مساله (۳) یک تابع محدب است و لذا، مساله (۳) یک مساله برنامه‌ریزی محدب با قیود خطی است [۱۰]. این نشان می‌دهد که حل این مساله به‌مراتب ساده‌تر از حل مساله اولیه است. از طرف دیگر، در صورت عدم وجود تباهیدگی، رابطه زیر بین متغیرهای مسایل اولیه و دوگان نشان می‌دهد که جواب بهینه مساله اولیه را می‌توان از جواب بهینه مساله دوگان متناظر آن به دست آورد [۷]:

$$c_k\prod_{j=1}^{n}x_j^{a_{kj}}=\begin{cases} y_k w, & k\in K_0, \\ \dfrac{y_k}{\lambda_i}, & k\in K_i,\ \lambda_i>0,\ i=1,\dots,m. \end{cases} \tag{۴}$$

به‌طور خلاصه، تشخیص تباهیدگی یک مساله برنامه‌ریزی هندسی حایز اهمیت است؛ زیرا این تشخیص امکان پیدا نمودن جواب بهینه مساله اولیه از طریق حل مساله دوگان متناظر آن، با استفاده از روش‌های حل مسایل برنامه‌ریزی محدب را فراهم می‌کند.

۳ پیدا کردن یک نقطه درونی نسبی یک چندوجهی

فرض کنیم $\mathbf{A}$ و $\mathbf{C}$ دو ماتریس حقیقی به ترتیب از مرتبه‌های $m\times n$ و $p\times n$ هستند. به‌علاوه، $\mathbf{b}\in\mathbb{R}^m$ و $\mathbf{d}\in\mathbb{R}^p$. در این بخش، یک مدل برنامه‌ریزی خطی برای پیدا کردن یک نقطه درونی نسبی یک چندوجهی به فرم زیر ارایه می‌کنیم:

$$P=\left\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n:\ \mathbf{Ax}=\mathbf{b},\ \mathbf{Cx}\le\mathbf{d},\ \mathbf{x}\ge\mathbf{o}_n\right\}. \tag{۵}$$

برای یافتن یک نقطه درونی نسبی مجموعه چندوجهی P، ابتدا ارتباط میان نقاط درونی نسبی این مجموعه و عناصر ماکسیمال مجموعه چندوجهی نامنفی زیر را در قضیه ۱ مشخص می‌کنیم:

$$Q=\left\{\begin{pmatrix}\mathbf{x}\\ \mathbf{s}\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{n+p}:\ \mathbf{Ax}=\mathbf{b},\ \mathbf{Cx}+\mathbf{s}=\mathbf{d},\ \mathbf{x}\ge\mathbf{o}_n,\ \mathbf{s}\ge\mathbf{o}_p\right\}. \tag{۶}$$

Archive of SID

www.SID.ir

قضیه ۱ اگر $\begin{pmatrix}\mathbf{x}^{\max}\\ \mathbf{s}^{\max}\end{pmatrix}$ یک عضو ماکسیمال مجموعه Q باشد، آنگاه $\mathbf{x}^{\max}\in \mathrm{ri}(P)$.

اثبات: به برهان خلف، فرض کنیم $\mathbf{x}^{\max}\notin \mathrm{ri}(P)$. در این صورت، بنا بر (۱)، $\hat{\mathbf{y}}\in P$ موجود است به‌طوری‌که $\delta\mathbf{x}^{\max}+(۱-\delta)\hat{\mathbf{y}}\notin P$ به ازای هر $\delta>۱$ برقرار است. اگر قرار دهیم $\hat{\mathbf{s}}=\mathbf{d}-\mathbf{C}\hat{\mathbf{y}}$، آنگاه به‌راحتی می‌توان بررسی نمود که $\begin{pmatrix}\hat{\mathbf{y}}\\ \hat{\mathbf{s}}\end{pmatrix}\in Q$. از طرف دیگر، پوسته آفینی Q به‌صورت زیر است:

$$\mathrm{aff}\,(Q)=\left\{\begin{pmatrix}\mathbf{x}\\ \mathbf{s}\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{n+p}:\ \mathbf{Ax}=\mathbf{b},\ \mathbf{Cx}+\mathbf{s}=\mathbf{d}\right\}.$$

به ازای هر $\delta>۱$، داریم $\delta\begin{pmatrix}\mathbf{x}^{\max}\\ \mathbf{s}^{\max}\end{pmatrix}+(۱-\delta)\begin{pmatrix}\hat{\mathbf{y}}\\ \hat{\mathbf{s}}\end{pmatrix}\in \mathrm{aff}\,(Q)\setminus Q$. درنتیجه، به ازای هر $\delta>۱$، $\delta\mathbf{x}^{\max}+(۱-\delta)\hat{\mathbf{y}}\ngeq \mathbf{o}_n$ یا $\delta\mathbf{s}^{\max}+(۱-\delta)\hat{\mathbf{s}}\ngeq \mathbf{o}_p$ و یا هر دو برقرارند.

اگر $\delta\mathbf{x}^{\max}+(۱-\delta)\hat{\mathbf{y}}\ngeq \mathbf{o}_n$، آنگاه $k\in\{۱,\dots,n\}$ موجود است، به‌طوری‌که $\hat{y}_k+\left(x_k^{\max}-\hat{y}_k\right)\delta<۰$ به ازای هر $\delta>۱$ برقرار است، درنتیجه $x_k^{\max}<\hat{y}_k$. چون $x_k^{\max}\geq ۰$، داریم $\hat{y}_k>۰$. ادعا می‌کنیم $x_k^{\max}=۰$. در غیر این صورت، واضح است که $۱<\dfrac{\hat{y}_k}{\hat{y}_k-x_k^{\max}}$. پس به ازای هر $۱<\hat{\delta}<\dfrac{\hat{y}_k}{\hat{y}_k-x_k^{\max}}$، خواهیم داشت $\hat{y}_k+\left(x_k^{\max}-\hat{y}_k\right)\hat{\delta}>۰$ که یک تناقض است. این تناقض ادعا را ثابت می‌کند. اگر قرار دهیم $\begin{pmatrix}\mathbf{x}'\\ \mathbf{s}'\end{pmatrix}=\frac{۱}{۲}\begin{pmatrix}\mathbf{x}^{\max}\\ \mathbf{s}^{\max}\end{pmatrix}+\frac{۱}{۲}\begin{pmatrix}\hat{\mathbf{y}}\\ \hat{\mathbf{s}}\end{pmatrix}$، آنگاه تحدب Q ایجاب می‌کند که $\begin{pmatrix}\mathbf{x}'\\ \mathbf{s}'\end{pmatrix}\in Q$؛ ولی ازآنجاکه $x_k'\geq y_k>۰$ و $x_k^{\max}=۰$، نتیجه می‌شود $n^+\begin{pmatrix}\mathbf{x}^{\max}\\ \mathbf{s}^{\max}\end{pmatrix}<n^+\begin{pmatrix}\mathbf{x}'\\ \mathbf{s}'\end{pmatrix}$، که یک تناقض با فرض قضیه است؛ بنابراین، فرض خلف باطل است.

در حالتی که $\delta\mathbf{s}^{\max}+(۱-\delta)\hat{\mathbf{s}}\ngeq \mathbf{o}_p$، می‌توان مشابه حالت اول به تناقض رسید؛ بنابراین، $\mathbf{x}^{\max}\in \mathrm{ri}(P)$ در هر دو حالت ثابت می‌شود. ■

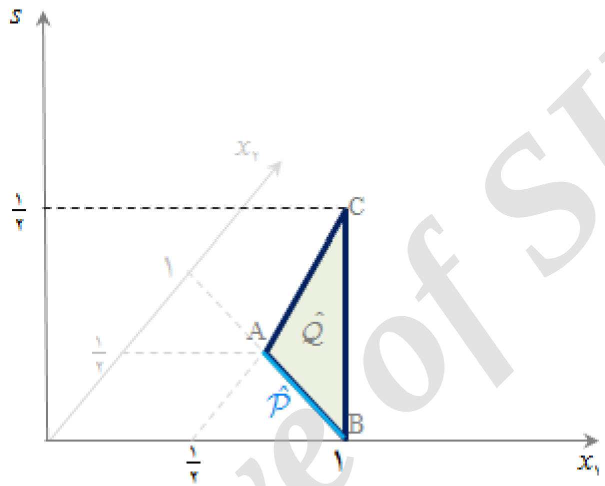
بنا بر قضیه ۱، یک نقطه درونی نسبی P را می‌توان با پیدا کردن یک عضو ماکسیمال مجموعه Q یافت. با توجه به این مطلب، دو سؤال مهم را در اینجا مطرح و پاسخ می‌دهیم. سؤال اول این است که چرا به‌جای یافتن یک عضو ماکسیمال مجموعه P، به دنبال یافتن یک عضو ماکسیمال مجموعه Q هستیم؛ به عبارت دیگر، آیا نمی‌توان یک نقطه درونی نسبی P را با استفاده از یک عضو ماکسیمال آن به دست آورد؟ سؤال دوم این است که آیا هر عضو ماکسیمال Q یک نقطه درونی نسبی آن نیز است؟ در اینجا، با ارایه یک مثال نشان می‌دهیم که پاسخ هر دو سؤال منفی است. برای این منظور، مجموعه $\hat{P}\subseteq\mathbb{R}^۲$ را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\hat{P}=\left\{\begin{pmatrix}x_۱\\ x_۲\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^۲:\ x_۱+x_۲=۱,\ x_۱\geq\frac{۱}{۲},\ x_۱,x_۲\geq ۰\right\}. \tag{۷}$$

Archive of SID

www.SID.ir

همان‌طور که در شکل ۱ می‌بینیم، مجموعه $\hat{P}$ متشکل از همه نقاط روی پاره‌خط بسته $\overline{AB}$ است و همه نقاط روی پاره‌خط باز $\overline{AB}$ (همه نقاط روی پاره‌خط به‌جز نقاط انتهایی A و B) مجموعه نقاط درونی نسبی مجموعه $\hat{P}$ را تشکیل می‌دهند. درحالی‌که، عناصر ماکسیمال مجموعه $\hat{P}$ متشکل از همه نقاط روی این پاره‌خط به‌جز نقطه B است؛ زیرا هر دو مؤلفه این نقاط مثبت هستند؛ بنابراین، اگرچه نقطه A یک عضو ماکسیمال مجموعه $\hat{P}$ است، اما نقطه درونی نسبی آن نیست. این نشان می‌دهد که نقاط درونی نسبی مجموعه چندوجهی $\hat{P}$ با مجموعه عناصر ماکسیمال آن یکسان نیستند. درنتیجه، جواب سؤال اول ما منفی است.



شکل ۱. مجموعه نقاط درونی نسبی و مجموعه عناصر ماکسیمال چندوجهی P

حال، مجموعه $\hat{Q}$ متناظر مجموعه $\hat{P}$ را در نظر می‌گیریم که به‌صورت زیر است:

$$\hat{Q}=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\s\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3:\ x_1+x_2=1,\ x_1-s=\frac{1}{2},\ x_1,x_2,s\geq 0\right\}.$$

در شکل ۱، مجموعه $\hat{Q}$ متشکل از همه نقاط مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ است و همه نقاط داخل این مثلث (به‌جز نقاط مرزی آن) مجموعه نقاط درونی نسبی این مجموعه هستند. از طرف دیگر، همه نقاط روی این مثلث به‌جز نقاط روی پاره‌خط‌های بسته $\overline{AB}$ و $\overline{BC}$ دارای سه مؤلفه مثبت هستند و لذا عناصر ماکسیمال مجموعه $\hat{Q}$ هستند. این نشان می‌دهد که همه عناصر ماکسیمال $\hat{Q}$ نقاط درونی نسبی آن نیستند (نقاط روی پاره‌خط باز $\overline{AC}$). درنتیجه، جواب سؤال دوم ما نیز منفی است. (بااین‌وجود، همان‌طور که در قضیه ۱ ثابت نمودیم، تصویر این عناصر روی صفحه x_1x_2 که پاره‌خط باز $\overline{AB}$ را تشکیل می‌دهند همگی نقاط درونی نسبی مجموعه $\hat{P}$ هستند.)

Archive of SID
www.SID.ir

در ادامه، نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان یک عضو ماکسیمال مجموعه چندوجهی نامنفی Q را با استفاده از یک مساله برنامه‌ریزی خطی به دست آورد. برای این منظور، ابتدا مجموعه Q را به فرم معادل زیر نمایش می‌دهیم:

$$Q=\left\{\frac{1}{\alpha}\begin{pmatrix}\mathbf{x}\\ \mathbf{s}\end{pmatrix}:\ \mathbf{Ax}=\mathbf{b}\alpha,\ \mathbf{Cx}+\mathbf{s}=\mathbf{d}\alpha,\ \mathbf{x}\geq\mathbf{o}_n,\ \mathbf{s}\geq\mathbf{o}_p,\ \alpha\geq 1\right\}. \qquad (۸)$$

در این صورت، قضیه زیر برقرار است.

قضیه ۲ فرض کنید $\left(\mathbf{x}^*,\mathbf{w}^*,\mathbf{s}^*,\mathbf{z}^*,\alpha^*\right)$ جواب بهینه مساله برنامه‌ریزی خطی زیر باشد:

$$\begin{aligned}
&Max\quad \mathbf{1}_n^T\mathbf{w}+\mathbf{1}_p^T\mathbf{z}\\
&s.t.\\
&\mathbf{A}\left(\mathbf{x}+\mathbf{w}\right)\qquad\quad =\alpha\mathbf{b},\\
&\mathbf{C}\left(\mathbf{x}+\mathbf{w}\right)+\mathbf{s}+\mathbf{z}=\alpha\mathbf{d},\\
&\mathbf{x}\geq\mathbf{o}_n,\ \mathbf{o}_n\leq\mathbf{w}\leq\mathbf{1}_n,\ \mathbf{s}\geq\mathbf{o}_p,\ \mathbf{o}_p\leq\mathbf{z}\leq\mathbf{1}_p,\ \alpha\geq 1.
\end{aligned} \qquad (۹)$$

در این صورت، $\begin{pmatrix}\mathbf{x}^{\max}\\ \mathbf{s}^{\max}\end{pmatrix}:=\frac{1}{\alpha^*}\begin{pmatrix}\mathbf{x}^*+\mathbf{w}^*\\ \mathbf{s}^*+\mathbf{z}^*\end{pmatrix}$ یک عضو ماکسیمال مجموعه Q است.

اثبات: بدون کاستن از کلیت برهان، فرض می‌کنیم $\mathbf{x}^{\max}=\left(x_1^{\max},\ldots,x_l^{\max},0,\ldots,0\right)^T$ و $\mathbf{s}^{\max}=\left(s_1^{\max},\ldots,s_k^{\max},0,\ldots,0\right)^T$. همچنین، به برهان خلف، فرض می‌کنیم $\frac{1}{\bar{\alpha}}\begin{pmatrix}\bar{\mathbf{x}}\\ \bar{\mathbf{s}}\end{pmatrix}$ عضوی از Q است به‌طوری‌که $n^+\begin{pmatrix}\bar{\mathbf{x}}\\ \bar{\mathbf{s}}\end{pmatrix}>n^+\begin{pmatrix}\mathbf{x}^{\max}\\ \mathbf{s}^{\max}\end{pmatrix}$. در این صورت، یکی از حالت‌های زیر و یا هر دو اتفاق می‌افتد:

حالت اول: $t\in\left\{l+1,\ldots,n\right\}$ موجود است به‌طوری‌که $\bar{x}_t>0$ و $x_t^{\max}=0$.

حالت دوم: $u\in\left\{k+1,\ldots,p\right\}$ موجود است به‌طوری‌که $\bar{s}_u>0$ و $s_u^{\max}=0$.

به‌راحتی، می‌توان بررسی کرد که $\frac{1}{\alpha^*+\bar{\alpha}}\begin{pmatrix}\mathbf{x}^*+\bar{\mathbf{x}}+\mathbf{w}^*\\ \mathbf{s}^*+\bar{\mathbf{s}}+\mathbf{z}^*\end{pmatrix}\in Q$. بدون کاستن از کلیت برهان، می‌توان فرض نمود که همه مؤلفه‌های مثبت $\begin{pmatrix}\mathbf{x}^*+\bar{\mathbf{x}}+\mathbf{w}^*\\ \mathbf{s}^*+\bar{\mathbf{s}}+\mathbf{z}^*\end{pmatrix}$ بزرگ‌تر از ۱ هستند. بر مبنای این فرض، تعریف می‌کنیم:

Archive of SID

www.SID.ir

$$\hat{x}_j := \begin{cases} x_j^* + w_j^* + \bar{x}_j - 1, & x_j^* + w_j^* + \bar{x}_j > 0, \\ 0, & x_j^* + w_j^* + \bar{x}_j = 0, \end{cases} \qquad j = 1, \ldots, n,$$

$$\hat{w}_j := \begin{cases} 1, & x_j^* + w_j^* + \bar{x}_j > 0, \\ 0, & x_j^* + w_j^* + \bar{x}_j = 0, \end{cases} \qquad j = 1, \ldots, n,$$

$$\hat{s}_r := \begin{cases} s_r^* + z_r^* + \bar{s}_r - 1, & s_r^* + z_r^* + \bar{s}_r > 0, \\ 0, & s_r^* + z_r^* + \bar{s}_r = 0, \end{cases} \qquad r = 1, \ldots, p,$$

$$\hat{z}_r := \begin{cases} 1, & s_r^* + z_r^* + \bar{s}_r > 0, \\ 0, & s_r^* + z_r^* + \bar{s}_r = 0, \end{cases} \qquad r = 1, \ldots, p,$$

$$\hat{\alpha} := \alpha^* + \bar{\alpha}.$$

در این صورت، $\left(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{w}}, \hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{z}}, \hat{\alpha}\right)$ یک جواب شدنی مساله (۹) است. درنتیجه، متناظر حالت‌های اول و دوم مذکور به ترتیب داریم: $\mathbf{1}_n^T \hat{\mathbf{w}} > \mathbf{1}_n^T \mathbf{w}^*$ و $\mathbf{1}_p^T \hat{\mathbf{z}} > \mathbf{1}_p^T \mathbf{z}^*$. بنابراین، اگر هر یک از حالت‌های اول و دوم و یا هر دو اتفاق بیافتند، خواهیم داشت: $\mathbf{1}_n^T \hat{\mathbf{w}} + \mathbf{1}_p^T \hat{\mathbf{z}} > \mathbf{1}_n^T \mathbf{w}^* + \mathbf{1}_p^T \mathbf{z}^*$، که تناقض با فرض بهینگی $\left(\mathbf{x}^*, \mathbf{w}^*, \mathbf{s}^*, \mathbf{z}^*, \alpha^*\right)$ است. درنتیجه، فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود. ■

حال، با استفاده از قضایای ۱ و ۲، نتایج زیر حاصل می‌شوند.

نتیجه ۱ فرض کنید $\left(\mathbf{x}^*, \mathbf{w}^*, \mathbf{s}^*, \mathbf{z}^*, \alpha^*\right)$ جواب بهینه مساله (۹) باشد. در این صورت، $\frac{1}{\alpha^*}\left(\mathbf{x}^* + \mathbf{w}^*\right)$ یک نقطه درونی نسبی P است.

نتیجه ۲ فرض کنید $\left(\mathbf{y}^*, \mathbf{w}^*\right)$ جواب بهینه مساله برنامه‌ریزی خطی زیر باشد:

$$\begin{aligned} & Max \quad \mathbf{1}_p^T \mathbf{w} \\ & s.t. \\ & \sum_{k=1}^{p} \left(y_k + w_k\right) \begin{pmatrix} \mathbf{a}_k \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \mathbf{0}_n \\ 1 \end{pmatrix}, \\ & \mathbf{y} \geq \mathbf{0}_p, \ \mathbf{0}_p \leq \mathbf{w} \leq \mathbf{1}_p, \ \alpha \geq 1. \end{aligned} \tag{۱۰}$$

در این صورت، $\frac{1}{\alpha^*}\left(\mathbf{y}^* + \mathbf{w}^*\right)$ یک نقطه درونی نسبی Y است. همچنین، مساله برنامه‌ریزی هندسی (۳) تباهیده است اگر و تنها اگر $\mathbf{w}^* \notin \mathbb{R}_{++}^p$.

٤ مثال‌های عددی

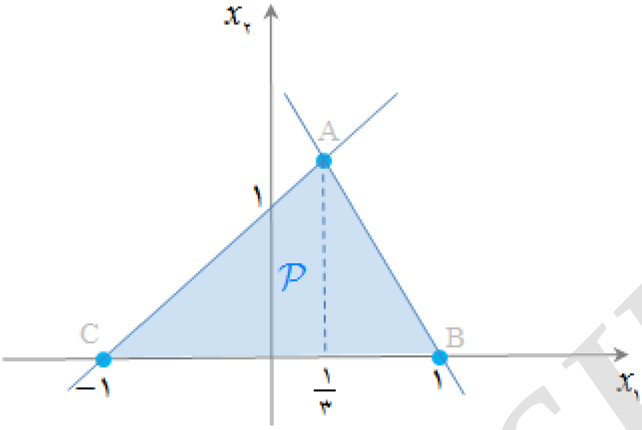
در این بخش، کاربردهای مدل پیشنهادی را با استفاده از دو مثال عددی تشریح می‌کنیم.

Archive of SID

www.SID.ir

مثال ۱ مجموعه چندوجهی $P\subseteq\mathbb{R}^{۲}$ زیر را در نظر می‌گیریم که در شکل ۲ نمایش داده شده است:

$$P=\left\{\begin{pmatrix}x_{۱}\\ x_{۲}\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{۲}:\ ۲x_{۱}+x_{۲}\le ۲,\ \ -x_{۱}+x_{۲}\le ۱,\ x_{۲}\ge ۰\right\}.$$



شکل ۲. نمایش چندوجهی P در مثال ۱

همان‌طور که می‌بینیم، چندوجهی P دارای شش رویه غیر بدیهی است: سه رویه با بعد صفر (نقاط رأسی A، B و C) و سه رویه با بعد یک (یال‌های $\overline{\mathrm{AB}}$، $\overline{\mathrm{AC}}$ و $\overline{\mathrm{BC}}$). خود چندوجهی P نیز یک رویه بدیهی چندوجهی است. واضح است که نقاط درونی نسبی هر یک از نقاط رأسی، خود آن نقاط هستند. برای پیدا کردن نقاط درونی نسبی رویه‌های دیگر، از مدل (۹) استفاده کرده‌ایم که نتایج حاصل در جدول ۱ آمده است.

جدول ۱. نقاط درونی نسبی چندوجهی P و رویه‌های یک‌بعدی آن

رویه	P	$\overline{\mathrm{AB}}$	$\overline{\mathrm{AC}}$	$\overline{\mathrm{BC}}$
نقطه درونی نسبی	$(۰,۰/۵)^{T}$	$(۰/۶,۰/۸)^{T}$	$(۰,۱)^{T}$	$(۰/۵,۰)^{T}$

مثال ۲ مساله اولیه برنامه‌ریزی هندسی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned}&Min\quad ۲x_{۱}^{۲}x_{۲}^{-۱}x_{۳}^{-۴}+x_{۱}^{۳}x_{۲}^{۴}x_{۳}x_{۴}^{-۷}\\ &s.t.\\ &۴x_{۱}^{-۱}x_{۳}x_{۴}+۲x_{۲}^{-۱}+x_{۲}^{۳}\le ۱,\\ &x_{۱}x_{۴}^{-۲}+x_{۲}^{-۲}+۵x_{۱}x_{۳}^{-۱}+۳x_{۲}\le ۱,\\ &x_{j}>۰,\ j=۱,\dots,۴.\end{aligned}$$

دوگان مساله فوق به‌صورت زیر است:

Archive of SID
www.SID.ir

$$\begin{aligned}
Max\quad & \left(\frac{2}{y_1}\right)^{y_1}\left(\frac{1}{y_2}\right)^{y_2}\left(\frac{4}{y_3}\right)^{y_3}\left(\frac{2}{y_4}\right)^{y_4}\left(\frac{1}{y_5}\right)^{y_5}\left(\frac{1}{y_6}\right)^{y_6}\left(\frac{1}{y_7}\right)^{y_7}\left(\frac{5}{y_8}\right)^{y_8}\left(\frac{3}{y_9}\right)^{y_9}\\
& \times\left(y_3+y_4+y_5\right)^{y_3+y_4+y_5}\left(y_6+y_7+y_8+y_9\right)^{y_6+y_7+y_8+y_9}\\
s.t.\quad & \\
& y_1+y_2=1,\\
& 2y_1+3y_2-y_3+y_6+y_8=0,\\
& -y_1+4y_2-y_4+3y_5-2y_7+y_9=0,\\
& -4y_1+y_2+y_3-y_8=0,\\
& -7y_2+y_3-2y_6=0,\\
& y_k\geq 0,\ k=1,\dots,9.
\end{aligned}$$

همان‌طور که می‌بینیم، ناحیه شدنی مساله دوگان فوق یک مجموعه چندوجهی است. برای تشخیص تباهیدگی مساله فوق، مدل (۱۰) را برای تعیین یک نقطه درونی نسبی این چندوجهی حل می‌کنیم که جواب بهینه آن به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
& y_1^*=1.5,\ y_2^*=0,\ y_3^*=8,\ y_4^*=0,\ y_5^*=0,\ y_6^*=0,\ y_7^*=1.25,\ y_8^*=0,\ y_9^*=0,\\
& w_1^*=w_2^*=w_3^*=w_4^*=w_5^*=w_6^*=w_7^*=w_9^*=1,\ w_8^*=0,\ \alpha^*=3.5.
\end{aligned}$$

درنتیجه، نقطه درونی نسبی ناحیه شدنی مساله دوگان به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
& \bar{y}_1=0.7143,\ \bar{y}_2=0.2857,\ \bar{y}_3=2.7514,\ \bar{y}_4=0.2857,\\
& \bar{y}_5=0.2857,\ \bar{y}_6=0.2857,\ \bar{y}_7=0.6429,\ \bar{y}_8=0,\ \bar{y}_9=0.2857.
\end{aligned}$$

حال، چون $\mathbf{w}^*\not\in\mathbb{R}^9_{++}$، نتیجه ۲ دلالت بر تباهیدگی مساله داده‌شده دارد؛ بنابراین، جواب بهینه مساله اولیه را نمی‌توان با حل مساله دوگان و استفاده از رابطه (۴) به دست آورد.

درنهایت، توجه می‌کنیم که گرادیان و مشتقات جزئی مرتبه دوم تابع هدف در هیچ‌کدام از جواب‌های مساله دوگان موجود نیست و لذا حل مدل دوگان با روش‌های مرسوم که غالباً مبتنی بر مشتقات جزئی مرتبه اول و دوم تابع هدف هستند، امکان‌پذیر نیست.

منابع

[1] Rockafellar, R. T. (1997). Convex Analysis. Princeton: Princeton University Press.

[2] Mehdiloozad, M., Tone, K., Askarpour, R., Ahmadi, M. B. (2018). Finding a maximal element of a non-negative convex set through its characteristic cone: An application to finding a strictly complementary solution. Computational and Applied Mathematics, 37(1), 53–80.

[3] Mehdiloozad, M., Tone, K., Ahmadi, M. B. (2016). The strict complementary slackness condition in linear fractional programming. arXiv e-print (arXiv:1603.00660).

[4] Ehrgott, M. (2005). Multicriteria Optimization. New York: Springer.

[5] Mehdiloozad, M., Mirdehghan, S. M., Sahoo, B. K., Roshdi, I. (2015). On the identification of the global reference set in data envelopment analysis. European Journal of Operational Research, 245(3), 779–788.

[6] Mehdiloozad, M., Ahmadi, M. B., Sahoo, B. K. (2017). On classifying decision making units in DEA: A unified dominance-based model. Annals of Operations Research, 250(1), 167–184.

Archive of SID

www.SID.ir

[7] Jefferson, T. R., Scott, C. H. (1978). On finding a point in the relative interior of a polyhedral set and degeneracy in geometric programming. Journal of Australian Mathematical Society, 20(4), 487–494.
[8] Ye, Y. (1992). On the finite convergence of interior-point algorithms for linear programming. Mathematical Programming, 57(1–3), 325–335.
[9] Tu, T. V. (2015). The maximal descriptor index set for a face of a convex polyhedral set and some applications. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 429(1), 395–414.
[10] Bazaraa, M. S., Sherali, H. D., Shetty, C. M. (2006). Nonlinear Programming. New Jersey: John Wiley and Sons.
[11] Duffin, R. J., Peterson, E. L., Zener, C. (1967). Geometric Programming: Theory and Application. New York: John Wiley and Sons.

Archive of SID

www.SID.ir