

## یافتن جواب کارای مساله برنامه‌ریزی کسری خطی چندهدفه با ضرایب قیود و بردار منابع فازی

حسن رستم زاده<sup>۱\*</sup>، سید مرتضی میردهقان<sup>۲</sup>

۱- کارشناسی ارشد، گروه ریاضی، دانشگاه شیراز، شیراز، ایران

۲- دانشیار، گروه ریاضی، دانشگاه شیراز، شیراز، ایران

رسید مقاله: ۴ خرداد ۱۳۹۵

پذیرش مقاله: ۱۲ آذر ۱۳۹۹

### چکیده

مساله برنامه‌ریزی کسری خطی چندهدفه از مسایل مهم چندهدفه می‌باشد. در این نوع مسایل توابع هدف به صورت کسری خطی و قیود آن به صورت خطی می‌باشد. فرض کنید در مساله برنامه‌ریزی کسری خطی چندهدفه، ضرایب قیود و بردار منابع، مقادیر نادقیق فازی باشند. در این صورت مساله برنامه‌ریزی کسری خطی چندهدفه به یک مساله برنامه‌ریزی کسری خطی چندهدفه فازی تبدیل خواهد شد. در این مقاله ما مساله برنامه‌ریزی کسری خطی چندهدفه فازی را به یک مدل پیشنهادی تبدیل کرده و سپس با استفاده از جواب بهینه آن و روشی که در آن از مساله برنامه‌ریزی خطی استفاده شده، یک یا چند جواب کارا برای مساله برنامه‌ریزی کسری خطی چندهدفه فازی به دست می‌آوریم.

**کلمات کلیدی:** مساله برنامه‌ریزی کسری خطی چند هدفه فازی، جواب کارای ضعیف، جواب کارا.

### ۱ مقدمه

بهینه‌سازی چندهدفه یکی از شاخه‌های مهم تحقیق در عملیات است که مسایل آن شامل چندین تابع هدف می‌باشند. یکی از این مسایل، مساله برنامه‌ریزی کسری خطی چندهدفه (MOLFP) است که توابع هدف آن به صورت کسری می‌باشند. صورت و مخرج این کسرها آفین می‌باشد و ناحیه شدنی آن یک چندوجهی است. هر یک از توابع هدف در مسایل برنامه‌ریزی کسری خطی چند هدفه شبه محدب و شبه مقعر هستند، بنابراین دارای خواصی از جمله مطلق بودن جواب‌های بهینه موضعی و وجود جواب بهینه راسی هستند. روش‌های متعددی برای حل مساله برنامه‌ریزی کسری خطی تک هدفه از جمله روش چارنر و کوپر [۱] و گیلمار و گومری [۲] وجود دارد. از طرف دیگر برخی از محققان به دنبال پیدا کردن روش‌هایی برای پیدا کردن جواب کارای مسایل برنامه‌ریزی کسری خطی چندهدفه بوده‌اند. به عنوان مثال، کورن بلاف و استور [۳] روشی برای پیدا کردن جواب کارای

\* عهده‌دار مکاتبات

آدرس الکترونیکی: hassan\_rostamzade@yahoo.com

ضعیف دسته‌ای از مسایل برنامه‌ریزی کسری خطی چندهدفه ارائه دادند. متو و جوئر گویوا [۴] با استفاده از مساله برنامه‌ریزی غیرخطی، دسته‌ای از جواب‌های کارای ضعیف و کابلرو و هرناندز [۵] جواب‌های تقریبی از این جواب‌ها را پیدا کردند. محققان دیگری از جمله دینکل بچ [۶]، آلموگی و لوین [۷]، فالک و پالکسی [۸] و کاستا [۹] در این زمینه مقالاتی داشته‌اند. حال اگر ضرایب قیود و بردار منابع مساله برنامه‌ریزی کسری خطی چند هدفه، مقادیر نادقیق فازی باشند، مساله MOLFP، به یک مساله برنامه‌ریزی کسری خطی چندهدفه فازی تبدیل خواهد شد. نظریه اعداد فازی اولین بار توسط پروفیسور لطفی عسگر زاده [۱۰] در سال (۱۹۶۵) ارائه شد. به تدریج این نظریه در مسایل بهینه‌سازی به کار برده شد. ناصری [۱۱] و ناصری و همکارانش [۱۲] در زمینه حل مسایل برنامه‌ریزی خطی و غیرخطی با مدل فازی مقالاتی به چاپ رسانده‌اند. محققانی از جمله صفایی [۱۳]، خرم و همکارانش [۱۴]، استانوویچ و همکارش [۱۵] و ایسکاندر [۱۶] مقالاتی در خصوص حل مسایل برنامه‌ریزی کسری خطی چندهدفه فازی ارائه داده‌اند. ما در این مقاله مساله برنامه‌ریزی کسری خطی چندهدفه با ضرایب قیود و بردار منابع فازی را به یک مدل پیشنهادی تبدیل کرده و با استفاده از یک الگوریتم تکراری جواب‌های بهینه این مدل پیشنهادی را به دست می‌آوریم. سپس با ارائه یک روش که در آن از مساله برنامه‌ریزی خطی استفاده شده، علاوه بر این که تشخیص داده می‌شود که جواب بهینه به دست آمده کارا است یا خیر، جواب کارای دیگری برای مساله برنامه‌ریزی کسری خطی چندهدفه فازی به دست خواهیم آورد.

این مقاله از پنج بخش تشکیل شده است. در بخش دوم تعاریف و مفاهیم اساسی در خصوص مساله برنامه‌ریزی کسری خطی چند هدفه، تعریف جواب‌های کارا و مجموعه‌ی فازی به همراه تابع عضویت ذوزنقه‌ای بیان می‌شود. در بخش سوم در ابتدا مساله برنامه‌ریزی کسری خطی چند هدفه با ضرایب قیود و بردار منابع فازی تعریف و سپس با استفاده از روش‌های ذکر شده از حالت فازی خارج و با استفاده از یک روش تکراری جوابی برای مساله پیدا می‌شود که با یک مدل پیشنهادی دیگر تشخیص داده می‌شود که جواب به دست آمده کارا است یا خیر. در ادامه با استفاده از جواب کارای حاصل شده با ارائه یک مدل پیشنهادی دیگر می‌توان جواب‌های کارای متفاوتی برای مساله به دست آورد. در بخش چهارم مقاله با ارائه یک مثال تمام مطالب گفته شده در بخش‌های قبل قابل مشاهده خواهد بود. در نهایت در بخش پنجم نتیجه‌گیری بیان می‌شود.

## ۲ تعاریف و مفاهیم اساسی

مساله بهینه‌سازی برنامه‌ریزی کسری خطی چند هدفه، به صورت زیر مدل می‌شود:

$$\begin{aligned} \max f(x) &= [f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x)] \\ \text{s.t. } x \in X &= \{x \in R^n : Ax \leq b, x \geq 0\}, \end{aligned} \quad (1)$$

که در آن  $f_k(x) = \frac{c_k x + \alpha_k}{d_k x + \beta_k}$ ،  $c_k, d_k \in R^n$  و  $\alpha_k, \beta_k \in R$  برای  $k = 1, 2, \dots, p$  و همچنین ناحیه  $X$

کراندار می‌باشد. در مساله (۱) بدون از دست دادن کلیت مساله فرض می‌کنیم که برای

(LFP) خطی  $d_k x + \beta_k > 0, k = 1, 2, \dots, p$  برای  $k=1$ ، مساله (۱) به مساله برنامه‌ریزی کسری خطی (LFP) تبدیل خواهد شد. چارنر و کوپر [۱]، با تبدیل مساله برنامه‌ریزی کسری خطی تک هدفه (LFP) به مساله برنامه‌ریزی خطی زیر آن را حل کردند.

$$\begin{aligned} \max f(x) &= ct + \alpha t \\ \text{s.t. } dy + \beta t &= 1, \\ y, t &\geq 0, \end{aligned} \tag{۲}$$

که در آن  $t = \frac{1}{dx + \beta}$  و  $y = xt$ .

**قضیه ۱-۲** فرض کنید  $(y^*, t^*)$  جواب بهینه مساله (۲) باشد. در این صورت  $x^* = \frac{y^*}{t^*}$  جواب بهینه مساله LFP می‌باشد.

اثبات. به مرجع [۳] رجوع شود.

**تعریف ۲-۲**  $\bar{x} \in X$  یک جواب کارا از مساله (۱) است، اگر  $x \in X$  وجود نداشته باشد به طوری که  $f_k(\bar{x}) \leq f_k(x), k = 1, 2, \dots, p, f(x) \neq f(\bar{x})$ .

**تعریف ۳-۲**  $\bar{x} \in X$  یک جواب کارای ضعیف مساله (۱) است، هرگاه  $x$  در ناحیه شدنی  $X$  وجود نداشته باشد که  $f_k(\bar{x}) < f_k(x), k = 1, 2, \dots, p$ .

**تعریف ۴-۲**  $\bar{x} \in X$  یک جواب کارای اکید مساله (۱) است، هرگاه  $x$  در ناحیه شدنی  $X$  وجود نداشته باشد که  $f_k(\bar{x}) \leq f_k(x), k = 1, 2, \dots, p$ .

**ملاحظه ۵-۲** از تعاریف فوق می‌توان نتیجه گرفت که هر جواب کارا یک جواب کارا ضعیف و هر جواب کارای اکید یک جواب کارا می‌باشد. اما برعکس آن در حالت کلی برقرار نیست.

**تعریف ۶-۲** [۱۰] فرض کنید  $x$  عنصری از مجموعه مرجع  $X$  باشد. در این صورت مجموعه فازی  $\tilde{A}$  در  $X$  به صورت  $\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) : x \in X\}$  تعریف می‌شود که در آن تابع عضویت  $\mu_{\tilde{A}}(x) : X \rightarrow [0, 1]$  تابعی است که به هر عنصر از مجموعه  $X$ ، یک عدد را از بازه  $[0, 1]$  به عنوان درجه عضویت آن عنصر در مجموعه فازی  $\tilde{A}$  نسبت می‌دهد.

**تعریف ۷-۲** [۱۰] تابع  $L : X \rightarrow [0, 1]$  با دو پارامتر  $\alpha$  و  $\beta$  را تابع عضویت دوزنقه‌ای گویند، هرگاه

$$L(x; \alpha, \beta) = \begin{cases} 1 & x < \alpha, \\ \frac{\alpha + \beta - x}{\beta} & \alpha \leq x < \alpha + \beta, \\ 0 & x \geq \alpha + \beta, \end{cases}$$

که در آن  $x \in X$ .

**۳ مساله برنامه ریزی کسری خطی چندهدفه با ضرایب قیود و بردار منابع فازی**

فرض کنید در مساله (۱)، ضرایب قیود و بردار منابع به صورت فازی باشند. در این صورت مدلی به صورت زیر خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \max f(x) &= [f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x)] \\ \text{s.t. } x \in X &= \{x \in R^n : \tilde{A}x \leq \tilde{b}, x \geq 0\}, \end{aligned} \tag{۳}$$

که در آن برای  $k = 1, 2, \dots, p$ ،  $f_k(x) = \frac{c_k x + \alpha_k}{d_k x + \beta_k}$ ،  $j = 1, \dots, n$  و  $i = 1, \dots, m$  برای

$\tilde{b} = [\tilde{b}_i]_{m \times 1}$  و  $\tilde{A} = [\tilde{a}_{ij}]_{m \times n}$ . همچنین ناحیه  $X$  کراندار و برای هر  $x \in X$ ،  $d_k x + \beta_k > 0$ .

$\tilde{b}$  و  $\tilde{A}$  ماتریسی از مقادیر نادقیق فازی هستند. در اینجا  $\tilde{a}_{ij}$  و  $\tilde{b}_i$  به ترتیب به وسیله تابع های عضویت  $\mu_{\tilde{a}_{ij}}(x) : R \rightarrow [0, 1]$  و  $\mu_{\tilde{b}_i}(x) : R \rightarrow [0, 1]$  به صورت زیر تعریف می شود:

$$\mu_{\tilde{a}_{ij}}(x) = \begin{cases} 1 & x \leq a_{ij}, \\ \frac{a_{ij} + d_{ij} - x}{d_{ij}} & a_{ij} \leq x \leq a_{ij} + d_{ij}, \\ 0 & x \geq a_{ij} + d_{ij}, \end{cases}$$

که در آن  $x \in R$  و برای  $i = 1, \dots, m$  و  $j = 1, \dots, n$ ،  $d_{ij} > 0$  فاصله نوسانات مجاز  $a_{ij}$  است.

$$\mu_{\tilde{b}_i}(x) = \begin{cases} 1 & x \leq b_i, \\ \frac{b_i + p_i - x}{p_i} & b_i \leq x \leq b_i + p_i, \\ 0 & x \geq b_i + p_i, \end{cases}$$

که در آن  $x \in R$  و برای  $i = 1, \dots, m$ ،  $p_i > 0$  فاصله نوسانات مجاز  $b_i$  است. برای این که مساله از شکل فازی بودن خود خارج شود نیاز است کران بالا ( $Z_k^u$ ) و کران پایین ( $Z_k^l$ ) مقدار بهینه های هر یک از توابع هدف را به دست آورد و این با حل مسایل برنامه ریزی کسری زیر به دست می آید:

$$\begin{aligned} Z_k^l &= \max \frac{c_k x + \alpha_k}{d_k x + \beta_k}, \quad k = 1, \dots, p, \\ \text{s.t. } \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\leq b_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_k^u &= \max \frac{c_k x + \alpha_k}{d_k x + \beta_k}, \quad k = 1, \dots, p, \\ \text{s.t. } \sum_{j=1}^n (a_{ij} + d_{ij}) x_j &\leq b_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

$$Z_k^r = \max \frac{c_k x + \alpha_k}{d_k x + \beta_k}, \quad k = 1, \dots, p,$$

$$s.t. \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq (b_i + p_i), \quad i = 1, \dots, m,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$Z_k^f = \max \frac{c_k x + \alpha_k}{d_k x + \beta_k}, \quad k = 1, \dots, p,$$

$$s.t. \sum_{j=1}^n (a_{ij} + d_{ij}) x_j \leq (b_i + p_i), \quad i = 1, \dots, m,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

بعد از حل مسایل بالا به روش چارنز و کوپر [۳]، کران بالا و کران پایین هر یک از توابع هدف برابر است

با

$$Z_k^u = \max \{Z_k^l, Z_k^r, Z_k^f\}, \quad Z_k^l = \min \{Z_k^l, Z_k^r, Z_k^f\}.$$

در ادامه اهداف و قیود به وسیله تابع عضویت تعریف می شوند. تابع عضویت اهداف و قیود در دامنه دارای مقادیر پیوسته افزایشی یا کاهششی است و به وسیله کران های قابل پذیرش بالا و پایین اهداف و قیود تعریف می شوند. تابع عضویت  $\mu_{f_k}(x): R^n \rightarrow [0, 1]$  برای تابع هدف  $k$  ام به صورت زیر تعریف می شود.

$$\mu_{f_k}(x) = \begin{cases} 0 & f_k(x) \leq Z_k^l \\ \frac{f_k(x) - Z_k^l}{Z_k^u - Z_k^l} & Z_k^l \leq f_k(x) \leq Z_k^u \\ 1 & f_k(x) \geq Z_k^u. \end{cases}$$

قید فازی  $i$  ام یک زیرمجموعه فازی از  $R^n$  است به گونه ای که تابع عضویت آن یعنی

$$\mu_{c_i}(x): R^n \rightarrow [0, 1] \text{ به صورت زیر تعریف می شود:}$$

$$\mu_{c_i}(x) = \begin{cases} 0 & b_i \leq \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j, \\ \frac{b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j}{\sum_{j=1}^n d_{ij} x_j + p_i} & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \leq \sum_{j=1}^n (a_{ij} + d_{ij}) x_j + p_i, \\ 1 & b_i \geq \sum_{j=1}^n (a_{ij} + d_{ij}) x_j + p_i. \end{cases}$$

جواب فازی شدنی، زیر مجموعه اهداف و قیود فازی می باشد که به تعیین فصل مشترک آنها منجر می شود.

تابع عضویت جواب فازی از رابطه زیر به دست می آید:

$$\mu_D(x)_{x \geq 0} = \mu_f(x)_{x \geq 0} \cap \mu_c(x)_{x \geq 0} = \min [\mu_f(x)_{x \geq 0}, \mu_c(x)_{x \geq 0}],$$

که در آن  $\mu_f(x)$ ،  $\mu_c(x)$  و  $\mu_D(x)$  به ترتیب تابع عضویت اهداف، قیود و جواب ها هستند. تابع عضویت جواب های فازی را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\mu_D(x)_{x \geq 0} = \left( \bigcap_{k=1}^p \mu_{f_k}(x)_{x \geq 0} \right) \cap \left( \bigcap_{k=1}^p \mu_{c_i}(x)_{x \geq 0} \right) = \min \left[ \min_{k=1, \dots, p, x \geq 0} \mu_{f_k}(x), \min_{i=1, \dots, m, x \geq 0} \mu_{c_i}(x) \right].$$

با توجه به این که جواب بهینه، جوابی است که دارای بالاترین مقدار عضویت است، بنابراین:

$$\mu_D(x^*) = \max \underbrace{\min \left[ \min_{k=1, \dots, p, x \geq 0} \mu_{f_k}(x), \min_{i=1, \dots, m, x \geq 0} \mu_{c_i}(x) \right]}_{\lambda}. \quad (4)$$

واضح است که  $0 \leq \lambda \leq 1$ . می توان مساله (4) را به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \max \quad & \lambda \\ \text{s.t.} \quad & \mu_{f_k}(x) \geq \lambda, \quad k = 1, \dots, p, \\ & \mu_{c_i}(x) \geq \lambda, \quad i = 1, \dots, m, \\ & x \geq 0, \quad 0 \leq \lambda \leq 1. \end{aligned}$$

سپس مساله فوق به صورت زیر بازنویسی خواهد شد.

$$\begin{aligned} \max \quad & \lambda \\ \text{s.t.} \quad & \lambda(Z_k^u - Z_k^l) - f_k(x) + Z_k^l \leq 0, \quad k = 1, \dots, p, \\ & \sum_{j=1}^n (a_{ij} + \lambda d_{ij}) x_j + \lambda p_i - b_i \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ & x_j \geq 0, \quad 0 \leq \lambda \leq 1. \end{aligned} \quad (5)$$

**قضیه ۳-۱** فرض کنید  $(\tilde{x}, \tilde{\lambda})$  جواب بهینه مساله (5) باشد. در این صورت جواب بهینه مساله زیر یک جواب کارا ضعیف برای مساله فازی (3) خواهد بود.

$$\begin{aligned} \max \quad & f_j(x) \quad j \in \{1, 2, \dots, p\} \\ \text{s.t.} \quad & f_k(x) \geq \tilde{\lambda}(Z_k^u - Z_k^l) + Z_k^l, \quad k = 1, \dots, p, \quad k \neq j, \\ & \sum_{j=1}^n (a_{ij} + \tilde{\lambda} d_{ij}) x_j + \tilde{\lambda} p_i - b_i \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ & x_j \geq 0. \end{aligned} \quad (6)$$

اثبات. فرض کنید  $\hat{x}$  جواب بهینه مساله (6) باشد و  $\hat{x}$  جواب کارا ضعیف مساله (3) نباشد. در این صورت  $\bar{x}$

$$\text{وجود دارد که برای } k = 1, \dots, p, \quad \tilde{\lambda}(Z_k^u - Z_k^l) + Z_k^l \leq f_k(\hat{x}) < f_k(\bar{x}), \quad k \neq j$$

و  $\tilde{\lambda}(Z_k^u - Z_k^l) + Z_k^l < f_k(\bar{x})$ ، بنابراین  $\bar{x}$  یک جواب شدنی است و  $f_j(\hat{x}) < f_j(\bar{x})$  که این تناقض

□

است با بهینگی  $\hat{x}$ .

**قضیه ۳-۲** فرض کنید  $(\tilde{x}, \tilde{\lambda})$  جواب بهینه مساله (5) و مساله (6) دارای جواب بهینه منحصر به فرد باشد. در این صورت جواب بهینه مساله (6)، یک جواب کارای اکید و در نتیجه جواب کارا برای مساله فازی (3) خواهد بود.

اثبات. فرض کنید  $\hat{x}$  جواب بهینه مساله (۶) باشد و  $\bar{x}$  جواب کارا اکید مساله (۳) نباشد. در این صورت  $\bar{x}$  وجود دارد که برای  $k=1, \dots, p$ ،  $f_k(\hat{x}) \leq f_k(\bar{x})$ ، برای  $k \neq j$ ،  $\tilde{\lambda}(Z_k^u - Z_k^l) + Z_k^l < f_k(\bar{x})$ ، بنابراین  $\bar{x}$  یک جواب شدنی است. حال اگر  $f_j(\hat{x}) < f_j(\bar{x})$ ، آنگاه تناقض است با بهینگی  $\hat{x}$  و اگر  $f_j(\hat{x}) = f_j(\bar{x})$ ، آنگاه با منحصر به فرد بودن  $\hat{x}$  در تناقض است. بنابراین  $\hat{x}$  یک جواب کارای اکید و در نتیجه یک جواب کارا مساله (۳) خواهد بود.  $\square$

حال با توجه به اینکه در مساله (۵) و (۶)،  $f_k(x)$ ‌هایی که در قیود قرار دارند از نوع کسری هستند؛ بنابراین حل این دو مساله با قیود غیرخطی کاری مشکل است. بنابراین ما در اینجا با روشی که در ادامه بیان می‌کنیم، مدل (۵) را به مدلی دیگر تبدیل کرده و سپس با استفاده از یک الگوریتم تکراری آن را حل می‌کنیم. همچنین مدل (۶) را به یک مدل خطی تبدیل کرده و آن را حل می‌کنیم.

برای  $f_k(x) = \frac{c_k x + \alpha_k}{d_k x + \beta_k}$  که در آن  $d_k x + \beta_k > 0$ ، مساله (۵) به صورت زیر تبدیل خواهد شد:

$$\begin{aligned} \max \quad & \lambda \\ \text{s.t.} \quad & \lambda(Z_k^u - Z_k^l) \left( \sum_{j=1}^n d_{kj} x_j + \beta_k \right) - \sum_{j=1}^n c_{kj} x_j + \alpha_k + Z_k^l \left( \sum_{j=1}^n d_{kj} x_j + \beta_k \right) \leq 0, \quad k=1, 2, \dots, p, \\ & \sum_{j=1}^n (a_{ij} + \lambda d_{ij}) x_j + \lambda p_i - b_i \leq 0, \quad i=1, \dots, m, \end{aligned} \quad (7)$$

$$x_j \geq 0, \quad 0 \leq \lambda \leq 1.$$

همان‌طور که در قیود مساله (۷) مشاهده می‌شود متغیرهایی به صورت  $\lambda x_j$  وجود دارد و این ناحیه شدنی را ناممکن کرده است و با استفاده از روش‌هایی که در حل مسایل برنامه‌ریزی خطی استفاده می‌شد نمی‌توان این مساله را حل کرد. لذا با استفاده از الگوریتم تکراری زیر این مساله را حل می‌کنیم.

### ۳-۱ الگوریتم تکراری برای پیدا کردن $\lambda_{max}$

مرحله یک. فرض می‌کنیم  $\lambda=1$ . اگر ناحیه شدنی مساله (۷) ناتهی بود (از فاز یک سیمپلکس استفاده کنید)، آنگاه  $\lambda_{max}=1$  و جواب شدنی پیدا شده  $x$ ، جواب بهینه مساله (۷) خواهد بود. در غیر این صورت قرار دهید:  $\lambda^L=0$  و  $\lambda^R=1$ . به مرحله دو بروید.

مرحله دو. برای مقدار  $\lambda_{new} = \frac{\lambda^L + \lambda^R}{2}$ ، مقدار  $\lambda^L$  و  $\lambda^R$  را به صورت زیر به‌روز رسانی کنید.

۱. اگر به ازای  $\lambda_{new}$ ، ناحیه شدنی ناتهی بود، آنگاه  $\lambda^L = \lambda_{new}$ .

۲. اگر به ازای  $\lambda_{new}$ ، ناحیه شدنی تهی بود، آنگاه  $\lambda^R = \lambda_{new}$ .

مرحله دو را تکرار کرده و برای هر  $\lambda_{new}$ ، فاز یک سیمپلکس را به کار برده تا به  $\lambda_{max}$  و جواب شدنی دست پیدا کنیم.

**قضیه ۳-۳** فرض کنید  $(\tilde{x}, \tilde{\lambda})$  جواب بهینه مساله (۷) باشد. در این صورت  $\tilde{x}$  جواب کارا مساله (۳) است، هرگاه مقدار بهینه مدل زیر برابر صفر باشد.

$$\begin{aligned} \max v &= \sum_{k=1}^p \rho_k \\ \text{s.t.} \quad & c_k x + \alpha_k - \rho_k = \lambda^* \left( (Z_k^u - Z_k^l) + Z_k^l \right) (d_k x + \beta_k), \quad k = 1, \dots, p, \\ & \sum_{j=1}^n (a_{ij} + \lambda^* d_{ij}) x_j + \lambda^* p_i - b_i \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ & x_j \geq 0, \quad 0 \leq \rho_k. \end{aligned} \quad (8)$$

اثبات. فرض کنید  $(\tilde{x}, \tilde{\lambda})$  جواب بهینه مساله (۷) و  $\rho^*$  جواب بهینه مدل (۸) باشد. با توجه به فرض قضیه، برای  $k = 1, \dots, p$ ،  $\rho_k^* = 0$ . بنابراین برای  $k = 1, \dots, p$ ،  $\frac{c_k \tilde{x} + \alpha_k}{d_k \tilde{x} + \beta_k} = \lambda^* \left( (Z_k^u - Z_k^l) + Z_k^l \right)$  فرض کنید  $\tilde{x}$  جواب کارا مساله (۳) نباشد. در این صورت  $\bar{x}$  وجود دارد که برای  $k = 1, \dots, p$ ،  $f_k(\tilde{x}) > f_k(\bar{x})$  و برای حداقل یک  $k$  یعنی  $j$  این نامساوی اکید باشد. بنابراین

$$\begin{aligned} f_j(\tilde{x}) > f_j(\bar{x}) &\Rightarrow \tilde{\lambda} \left( (Z_k^u - Z_k^l) + Z_k^l \right) < \frac{c_j \bar{x} + \alpha_k}{d_j \bar{x} + \beta_k} \Rightarrow \\ &c_j \bar{x} + \alpha_k > \tilde{\lambda} \left( (Z_k^u - Z_k^l) + Z_k^l \right) d_j \bar{x} + \beta_k. \end{aligned}$$

در نتیجه  $\bar{\rho}_j > 0$  وجود دارد که  $\tilde{\lambda} \left( (Z_k^u - Z_k^l) + Z_k^l \right) d_j \bar{x} + \beta_k < c_j \bar{x} + \alpha_k - \bar{\rho}_j$  و  $\sum_{k=1}^p \bar{\rho}_k > 0$  این با بهینه بودن  $\rho^*$ ، در تناقض است. □

در ادامه برای  $f_k(x) = \frac{c_k x + \alpha_k}{d_k x + \beta_k}$  که در آن  $d_k x + \beta_k > 0$ ، مساله (۶) به صورت زیر تبدیل خواهد شد:

$$\begin{aligned} \max & \frac{c_j x + \alpha_j}{d_j x + \beta_j} \\ \text{s.t.} \quad & c_k x + \alpha_k \geq \tilde{\lambda} \left( (Z_k^u - Z_k^l) + Z_k^l \right) (d_k x + \beta_k), \quad k = 1, \dots, p, \quad k \neq j, \\ & \sum_{j=1}^n (a_{ij} + \tilde{\lambda} d_{ij}) x_j + \lambda p_i - b_i \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ & x_j \geq 0. \end{aligned} \quad (9)$$

حال اگر  $\tilde{x}$  جواب بهینه مساله (۷) باشد، آنگاه دسته قیود اول مساله (۷) برای  $k = 1, \dots, p$ ، به صورت

$$f_k(\tilde{x}) = \tilde{\lambda} \left( (Z_k^u - Z_k^l) + Z_k^l \right) + Z_k^l$$

طبق تبدیل چارنز و کوپر (  $t = \frac{1}{d_j x + \beta_j}$  و  $y = xt$  )، مساله

(۹) به صورت زیر بازنویسی خواهد شد.



$$\begin{aligned} & \max \quad c_j y + \alpha_j t \\ & \text{s.t.} \quad c_k y + \alpha_k t \geq f_k(\tilde{x})(d_k y + \beta_k t), \quad k = 1, \dots, p, \quad k \neq j, \\ & \quad c_k y + \alpha_k t \geq f_k(\tilde{x})(d_k y + \beta_k t), \quad k = 1, \dots, p, \quad k \neq j, \\ & \quad \sum_{j=1}^n \left( a_{ij} + \frac{f_k(\tilde{x}) - Z_k^l}{Z_k^u - Z_k^l} d_{ij} \right) y_j + \frac{f_k(\tilde{x}) - Z_k^l}{Z_k^u - Z_k^l} p_i t - b_i t \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ & \quad d_j y + \beta_j t = 1, \\ & \quad y \geq 0, \quad 0 < t. \end{aligned} \tag{10}$$

**قضیه ۳-۴** فرض کنید  $(y^*, t^*)$  جواب بهینه مساله (۱۰) باشد. در این صورت  $x^* = \frac{y^*}{t^*}$  جواب بهینه مساله (۹) خواهد بود.

اثبات. در ابتدا ادعا می‌کنیم که  $t > 0$ . فرض خلف می‌کنیم که  $(y, t) = (\bar{y}, 0)$  جواب شدنی مدل (۱۰) باشد. در این صورت  $\sum_{j=1}^n \left( a_{ij} + \frac{f_k(\tilde{x}) - Z_k^l}{Z_k^u - Z_k^l} d_{ij} \right) \bar{y}_j \leq 0$  و  $\bar{y} \geq 0$ . از این می‌توان نتیجه گرفت که  $\bar{y}$  یک جهت دورشونده برای ناحیه کراندار  $X$  است که این تناقض است با فرض ابتدایی مساله فازی. بنابراین اگر  $(y^*, t^*)$  جواب بهینه مساله (۱۰) باشد، آنگاه  $t^* > 0$ . حال ثابت می‌کنیم  $x^* = \frac{y^*}{t^*}$  جواب بهینه مساله (۹) است.

$$\sum_{j=1}^n (a_{ij} + \lambda d_{ij}) x_j^* t + \tilde{\lambda} p_i t - b_i t = \sum_{j=1}^n \left( a_{ij} + \frac{f_k(\tilde{x}) - Z_k^l}{Z_k^u - Z_k^l} d_{ij} \right) y_j^* + \frac{f_k(\tilde{x}) - Z_k^l}{Z_k^u - Z_k^l} p_i t - b_i t \leq 0.$$

به علاوه

$$c_k x^* t + \alpha_k t = c_k y + \alpha_k t \geq f_k(\tilde{x})(d_k y + \beta_k t) = f_k(\tilde{x})(d_k x^* t + \beta_k t).$$

برای  $k = 1, \dots, p$  و  $k \neq j$ ، می‌توان نتیجه گرفت که  $\frac{c_k x^* + \alpha_k}{d_k x^* + \beta_k} \geq f_k(\tilde{x})$ . بنابراین  $x^*$  یک جواب شدنی مساله (۹) می‌باشد. حال نشان می‌دهیم که  $x^*$  یک جواب بهینه مساله (۹) است. فرض خلف می‌کنیم که  $x^*$  جواب بهینه نباشد. بنابراین یک جواب شدنی  $\bar{x}$  از مساله (۹) وجود دارد، به طوری که

$$\frac{c_j \bar{x} + \alpha_j}{d_j \bar{x} + \beta_j} \leq \frac{c_j x^* + \alpha_j}{d_j x^* + \beta_j} \tag{11}$$

فرض کنید  $\bar{t} = \frac{1}{d_j \bar{x} + \beta_j}$  و  $\bar{y} = \bar{x} \bar{t}$ . به آسانی می‌توان نشان داد که  $(\bar{y}, \bar{t})$  یک جواب شدنی از مساله (۱۰) می‌باشد. به علاوه از رابطه (۱۱) داریم:

$$c_j \bar{y} + \alpha_j \bar{t} \leq c_j y^* + \alpha_j t^*$$

□ و این تناقض است با بهینگی  $(y^*, t^*)$ . بنابراین  $x^* = \frac{y^*}{t^*}$  جواب بهینه مساله (۹) خواهد بود.

مساله (۱۰) یک مساله برنامه‌ریزی خطی می‌باشد و طبق قضیه‌های ۳-۱ و ۳-۲ جواب بهینه مساله (۱۰)، جواب کارای ضعیف و جواب بهینه منحصر به فرد آن، جواب کارای مساله فازی (۳) می‌باشد.

۴ مثال عددی

مساله MOLFP فازی زیر را در نظر بگیرید.

$$\max \left\{ Z_1 = \frac{x_r + 3}{2x_1 + 2}, Z_2 = \frac{x_r + 3}{2x_1 + 2} \mid \tilde{x}_1 \leq \tilde{4}, \tilde{x}_r \leq \tilde{4}, x \geq 0 \right\}. \quad (12)$$

که در آن  $d_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$  فاصله نوسانات مجاز  $a_{ij}$  و  $p_i = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$  فاصله نوسانات مجاز  $b_i$  می باشد. برای

$k=1,2$  کران بالا  $(Z_k^u)$  و کران پایین  $(Z_k^l)$  مساله (۱۲) برابر است با:

$$Z_1^l = \frac{5}{2}, \quad Z_1^u = \frac{9}{2}, \quad Z_2^l = 2, \quad Z_2^u = 11.$$

مدل (۷) برای مساله (۱۲)، به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \max \quad & \lambda \\ \text{s.t.} \quad & (4\lambda + 5)x_1 - x_r + 4\lambda + 2 \leq 0, \\ & -x_1 - x_r + 9\lambda + 2 \leq 0, \\ & (1 + \lambda)x_1 + \lambda x_r + \lambda - 4 \leq 0, \\ & 2\lambda x_1 + (1 + 2\lambda)x_r + 2\lambda - 4 \leq 0, \\ & x_1 \geq 0, x_r \geq 0, 0 \leq \lambda \leq 1. \end{aligned} \quad (13)$$

با استفاده از الگوریتم ۳-۳ مساله (۱۳) را حل کرده و پس از ۶۰ تکرار جواب بهینه زیر به دست می آید:

$$\lambda_{max} = 0/1218, \quad x_1 = 0/0939, \quad x_r = 3/0023.$$

نقطه  $(0/0939, 3/0023)$  جواب کارای برای مساله (۱۲) می باشد زیرا مقدار بهینه مدل زیر برابر صفر می باشد.

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{k=1}^2 \rho_k \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_r - \rho_1 = 3/0962 \\ & -5/4871x_1 + x_r - \rho_2 = 2/4871 \\ & 1/1218x_1 + 1/1218x_r \leq 3/8782, \\ & 0/2436x_1 + 1/2436x_r \leq 3/7564, \\ & x_1 \geq 0, x_r \geq 0. \end{aligned}$$

با استفاده از نقطه  $(0/0939, 3/0023)$  مساله های زیر را طبق مدل (۶) نوشته و با حل آنها جواب کارای

دیگری برای مساله (۱۲) پیدا می کنیم:

$$\begin{aligned} \max \quad & y_r + 3t \\ \text{s.t.} \quad & y_1 + y_r \geq 3/0962 \\ & 1/1218y_1 + 1/1218y_r - 3/8782t \leq 0, \\ & 0/2436y_1 + 1/2436y_r - 3/7564t \leq 0, \\ & 2y_1 + 2t = 1, \\ & y_1 \geq 0, y_r \geq 0, t \geq 0. \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned}
 \max \quad & y_1 + y_2 \\
 \text{s.t.} \quad & 5/4871y_1 - y_2 \leq -2/4871 \\
 & 1/1218y_1 + 1/1218y_2 \leq 3/8782, \\
 & 0/2436y_1 + 1/2436y_2 \leq 3/7564, \\
 & y_1 \geq 0, y_2 \geq 0.
 \end{aligned} \tag{15}$$

جواب بهینه منحصر به فرد مدل (۱۴) برابر  $y^* = (0/0000, 3/3733)$  و  $t^* = 1/2134$  است. بنابراین جواب کارای دیگر برای مساله (۱۲) برابر است با

$$x^* = \frac{y^*}{t^*} = (0/0000, 2/78)$$

و جواب بهینه منحصر به فرد مدل (۱۵) برابر  $y^* = (0/0939, 3/0023)$  و  $t^* = 1$  است. بنابراین

$$x^* = \frac{y^*}{t^*} = (0/0939, 3/0023)$$

که همان مقدار بهینه مساله (۱۳) است، جواب کارای مساله (۱۲) می باشد.

## ۵ نتیجه گیری

در این مقاله ما مساله برنامه ریزی کسری خطی چندهدفه با ضرایب قیود و بردار منابع فازی را به یک مدل پیشنهادی تبدیل کرده و با استفاده از یک الگوریتم تکراری جواب های بهینه این مدل پیشنهادی را به دست می آوریم، سپس با ارایه یک روش که در آن از مساله برنامه ریزی خطی استفاده می شود، علاوه بر اینکه تشخیص داده می شود که این جواب بهینه کارا است یا خیر، جواب کارای دیگری برای مساله برنامه ریزی کسری خطی چندهدفه فازی به دست می آوریم.

## منابع

- [1] Charnes, A. and Cooper. W.W. (1962). Programming with linear fractional functions, Naval Research Logistics, 9, 181-186.
- [2] Gilmore, P.C. and Gomory, R.E. (1963). A linear programming approach to the cutting stock problem. Part II, Operations Research, 11, 863-888.
- [3] Kornbluth. J.S.H. and Steuer, R.E. (1981). Multiple objective linear fractional programming, Management Sciences, 27, 1024-1039.
- [4] Metev, B. And Gueorguieva, D. (2000). A simple method for obtaining weakly efficient points in multiobjective linear fractional programming problems, European Journal of Operational Research, 126, 386-390.
- [5] Caballero, R. and Hernandez, M. (2004). The controlled estimation method in the multiobjective linear fractional problem, Computers and Operations Research, 31, 1821-1832.
- [6] Dinkelbach, W. (1967). On nonlinear fractional programming, Management Sciences, 13 (7), 492-498
- [7] Almogy, Y. and Levin, O. (1971). A class of fractional programming problems, Operations Research, 19, 57-67.

- [8] Falk, J.E. and Palocsay, S.W. (1994). Image space analysis of generalized fractional programs, *Journal of Global Optimization*, 4, 63-88.
- [9] Costa, J.P. (2007). Computing non-dominated solutions in MOLFP, *European Journal of Operational Research*, 181, 1464-1475.
- [10] Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets, *Information and Control*, 8, 338-353.
- [11] Naseri, S. H. (2007). Fuzzy simplex methods for solving fuzzy linear programming problems, *Journal of Operational Research in Its Applications*, 4(13), 67-76.
- [12] Naseri, S. H. and Talshian, F. (1391). Quadratic programming problem with fuzzy coefficients: A solution method based on the principle of expansion, *Journal of Operational Research in Its Applications*, 9(4), 9-25.
- [13] Safaei, N. (2014). A new method for solving fully fuzzy linear fractional programming with a triangular fuzzy numbers, *App. Math. and Comp. Intel*, 3, 273-281.
- [14] Khorram, E. and Ezzati, R. and Valizadeh, Z. (2014). Linear fractional multiobjective optimization problems subject to fuzzy relational equations with a continuous Archimedean triangular norm, 267, 225-239.
- [15] Stanojevic, B. and Stanojevic, M. (2014). Comment on fuzzy mathematical programming for multi objective linear fractional programming problem, *Fuzzy Sets and Systems*, 246, 156-159.
- [16] Iskander, M. G. (2004). A Possibility Programming Approach for Stochastic Fuzzy Multiobjective Linear Fractional Programs, *Computers and Mathematics with Applications*, 48, 1603-1609.