

یک رویکرد برنامه‌ریزی ریاضی فازی برای مساله حمل و نقل با قيود فازی انعطاف‌پذیر

گوهر شکوری^{۱*}، سید هادی ناصری^۲، محمد مهدی پایدار^۳

^۱ دانشجوی دکتری، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه مازندران، مازندران، بابلسر، ایران.

^۲ دانشیار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه مازندران، مازندران، بابلسر، ایران.

^۳ دانشیار، گروه مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل، مازندران، ایران

رسید مقاله: ۳ مرداد ۱۴۰۰

پذیرش مقاله: ۲۶ دی ۱۴۰۰

چکیده

هزینه‌های حمل و نقل امروزه به عنوان یکی از مهم‌ترین هزینه‌های موثر در قیمت تمام‌شده کالا و قیمت نهایی مصرف‌کننده برای مشتری به ویژه در مدیریت زنجیره تامین محسوب می‌گردد. از این رو تمرکز بر هزینه‌های حمل و نقل به سبب کاهش قیمت تمام‌شده، و به تبع آن بالا بردن رضایت مشتری و افزایش جایگاه صنعت مورد نظر در میان رقبا امری ضروری است. با توجه به این که منابع در دسترس (ظرفیت مراکز عرضه) عموماً به شکل حداقل ظرفیت موجود در مدل در نظر گرفته می‌شود، برای حل چنین مدل‌هایی، ابتدا محدودیت عرضه فازی را به صورت قطعی تبدیل کرده و سپس با به کارگیری روش‌های حل موجود، مساله قطعی حل شود که متأسفانه سازگاری مناسبی با ماهیت عدم قطعیت در تصمیم‌گیری ندارد. بنابراین در این مقاله جهت سازگاری با شرایط واقعی، محدودیت عرضه در مدل حمل و نقل به صورت فازی انعطاف‌پذیر مورد مطالعه قرار می‌گیرد. برای این منظور، یک رویکرد برنامه‌ریزی ریاضی فازی برای مساله حمل و نقل با قيود فازی انعطاف‌پذیر ارائه می‌شود تا جواب با بیشترین رضایت‌مندی را به دست آورد. در نهایت، یک مثال عددی برای مدل پیشنهادی و روش حل ارائه‌شده مورد بررسی قرار می‌گیرد.

کلمات کلیدی: برنامه‌ریزی خطی انعطاف‌پذیر، برنامه‌ریزی خطی فازی، تابع عضویت، مدل حمل و نقل فازی.

۱ مقدمه

حمل و نقل یکی از بخش‌های زیربنایی اقتصاد هر کشور است که نقش بسیار مهمی در خدمات لجستیکی خرد و کلان اقتصاد ملی کشورها دارد و به طور کلی شامل انتقال یک یا چند کالا از چندین مبدا یا تولیدکننده به چندین مقصد یا مصرف‌کننده می‌باشد. به دلیل تمایل به جهانی‌سازی کسب و کار و مدیریت بهینه و یکپارچه، کلیه عملیات به ویژه در بستر مجازی، توجه و اهمیت آن ملموس‌تر است. در این امر، کسب سهم بیشتر بازار و در

* عهده‌دار مکاتبات

آدرس الکترونیکی: gshakouri2@gmail.com

نهایت ایجاد پویایی در زنجیره تامین در جهت غلبه بر سایر رقبا، بسیار مهم می‌باشد و نیز در تلاش است که سطح رضایت‌مندی مشتریان و سود را افزایش داده و کل هزینه جابجایی را کاهش دهد که با حل کارای مساله حمل و نقل در شبکه توزیع می‌توان این اهداف را به دست آورد. از سوی دیگر دنیای تجارت امروزه دنیای عدم قطعیت است، عدم قطعیت در سیستم‌های حمل و نقل یکی از مهم‌ترین مسایل کاربردی در تحقیق در عملیات می‌باشد. عدم قطعیت در متغیرهای مربوط به تقاضا، عرضه، هزینه‌ها و سایر متغیرها وجود دارد که بررسی این مسایل در شرایط غیرقطعی و فازی از اهمیت بالایی برای محققین برخوردار است. در دهه‌های نخستین معرفی فازی، رابطه‌ی بین برنامه‌ریزی پارامتری و برنامه‌ریزی خطی فازی به وسیله توابع عضویت خطی مورد استفاده گسترده قرار گرفته و تحقیقات زیادی در مساله حمل و نقل کلاسیک با محیط فازی انجام شده است. یک روش دو مرحله‌ای برای مساله حمل و نقل با اعداد فازی دوزنقه‌ای توسط گانی و رازاک معرفی شد. در مرحله اول مقداری محصول برای برآورده شدن حداقل شرایط مقصد فرستاده می‌شود و مقادیر مازاد منابع را در صورت وجود، با توجه به هزینه حمل و نقل، ارسال می‌شود که هدف به حداقل رساندن مجموع هزینه‌های حمل و نقل می‌باشد [۱]. الگوریتم روش نقطه صفر فازی برای مساله حمل و نقل با ضرایب هدف و عرضه و تقاضای فازی مثلثی بازه‌ای را پندیان و همکاران ارائه دادند [۲]. کاور و کومار الگوریتمی براساس روش رتبه‌بندی برای مدل حمل و نقل با اعداد دوزنقه‌ای تعمیم‌یافته معرفی کردند [۳]. دهباری و همکاران مساله مسیریابی و مسایل نقلیه را در نظر گرفته و مدل ریاضی چندهدفه آن را ارائه دادند. سپس از الگوریتم فراابتکاری حمل و نقل چندهدفه استفاده نموده و جواب پارتو را محاسبه نمودند [۴]. گابریل و همکاران در [۵]، از بهینه‌سازی استوار دو مرحله‌ای برای مدل حمل و نقل استفاده نمودند که نسبت به رویکرد تک مرحله‌ای، انعطاف‌پذیری بیشتری به تصمیم‌گیرنده می‌دهد. گایو و همکاران [۶]، مساله حمل و نقل با منابع تصادفی و تقاضا و هزینه نامشخص را در نظر گرفت. مدل را با در نظر گرفتن مقدار مورد انتظار برای تابع هدف و سطوح اطمینان در توابع محدودیت، به یک مدل ریاضی دقیق تبدیل نموده و جواب را با استفاده از نظریه عدم قطعیت و نظریه احتمال به دست آورد. آکیل‌باشا و همکاران در [۷]، از روش mid-width برای مساله حمل و نقل بازه‌ای، دانتزیگ [۸]، الگوریتم سیمپلکس برای بررسی مساله حمل و نقل فازی استفاده نمودند. ناصری و خبیری [۹] مساله حمل و نقل را با ضرایب تابع هدف خاکستری و مقادیر حمل و نقل فازی در نظر گرفته و مدل را با سفیدسازی اعداد خاکستری و غیرفازی‌سازی اعداد فازی به صورت قطعی نوشته و جواب بهینه را یافتند. خلیفه و همکاران [۱۰]، مساله حمل و نقل کلاسیک را با هزینه و عرضه و تقاضا با اعداد فازی شش ضلعی را پیشنهاد داده‌اند. ابتدا با استفاده از رویکرد رتبه‌بندی، عرضه و تقاضا را به صورت اعداد دقیق نوشته و سپس با استفاده از آلفا برش، مساله را به صورت مساله خطی بازه‌ای تبدیل نموده و به طریق مساله چند هدفه به حل آن پرداختند. پورتنقی و همکاران مساله حمل و نقل را با اعداد خاکستری ارائه داده و سپس بدون نیاز به سفیدسازی پارامترهای خاکستری و با استفاده از روش مقایسه جواب مساله را به صورت اعداد خاکستری تعیین نمودند [۱۱]. در این مقاله یک مدل حمل و نقل با قيود انعطاف‌پذیر مطالعه می‌شود. برای یافتن جواب بهینه ایده‌آل از رویکرد پارامتری پیشنهادی توسط عطاری و ناصری [۱۲] استفاده می‌شود. اخیراً نیز چند مدل برنامه‌ریزی خطی با رویکرد انعطاف‌پذیر توسط ناصری و

همکاران بر پایه رویکردهای وردگای و همکاران [۱۹، ۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۸] ارایه شد. به ویژه، رویکرد پیشنهادی در برخی مدل‌های کاربردی همچون جیره‌بندی غذایی، زنجیره‌تأمین [۲۰] ... به کار گرفته شده است. اما متأسفانه علی‌رغم کاربردی بودن مدل‌های حمل و نقل کار خاصی در این زمینه ملاحظه نشد. از این رو برای پر کردن خلأ مطالعاتی رویکرد انعطاف‌پذیر در حوزه یاد شده، در حقیقت، از یک رویکرد چندپارامتری با توجه به تابع عضویت تعریف شده برای حل مدل حمل و نقل با محدودیت عرضه انعطاف‌پذیر استفاده می‌شود. برای راه حل پیشنهاد شده نیز یک الگوریتم ارایه می‌شود که با توجه به ماهیت انعطاف‌پذیر بودن روابط فازی قیود از رویکرد پارامتری برای محاسبه جواب‌های شدنی مساله استفاده نموده و در هدف بعدی بیشینه کردن سطوح رضایت‌مندی جواب‌های شدنی مد نظر قرار می‌گیرد. این مقاله در پنج بخش تهیه شده است. در بخش ۲، مدل پیشنهادی و ابزارهای تبدیل مدل ارایه شده به شکل پارامتری می‌پردازیم. در بخش ۳، مراحل حل مدل و الگوریتم آن را پیشنهاد می‌کنیم. برای توصیف فرآیند حل، در بخش ۴ یک مثال عددی ارایه می‌شود و در نهایت بخش ۵ به نتیجه‌گیری از مطالعه انجام شده اختصاص دارد.

۲ مساله حمل و نقل با شرایط انعطاف‌پذیر

یکی از انواع مدل‌های حمل و نقل، مساله حمل و نقل با قیود فازی است که با شرایط واقعی مطابقت بیشتری دارد، و هدف آن، حداقل نمودن هزینه حمل و نقل در شرایط عدم قطعیت است. اساساً در مدل حمل و نقل کلاسیک، کالای مورد نظر از m تأمین‌کننده $i = 1, 2, \dots, m$ که دارای میزان عرضه حداکثر به مقدار s_i به n مشتری $j = 1, 2, \dots, n$ که مشتریان دارای تقاضا حداقل به مقدار d_j می‌باشند، انتقال داده می‌شود. در حالی که c_{ij} هزینه ارسال هر واحد کالا ارسالی از تأمین‌کننده i به مشتری j است و x_{ij} متغیر تصمیم می‌باشد. مدل ریاضی مرتبط با مساله یاد شده به صورت زیر است [۲۱، ۲۲]:

مساله (۱):

$$\text{Min} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \quad (1)$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq s_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \geq d_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (3)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (4)$$

که در آن

i : شاخص تولیدکننده؛

j : شاخص مشتری؛

m : تعداد تولیدکننده؛

n : تعداد مشتری؛

s_i : میزان عرضه تولیدکننده i ؛

d_j : میزان تقاضای مشتری j ؛

c_{ij} : هزینه انتقال هر واحد کالا از مبدأ i به مقصد j ؛

x_{ij} : میزان واحد کالای ارسالی از مبدأ i به مقصد j می‌باشد.

محدودیت‌های نوع اول داده شده در (۲) نشان‌دهنده آن است که مجموع کالای ارسالی از مبدأ i بایستی کوچک‌تر یا مساوی با ظرفیت آن باشد.

محدودیت‌های نوع دوم داده شده در (۳) نشان‌دهنده آن است که مجموع کالاهای دریافتی هر مشتری نباید کمتر از میزان تقاضایش باشد.

در دنیای واقعی، به دلایل زیادی، با اطلاعات مبهم و نا دقیق سروکار داریم که برای توصیف چنین شرایطی می‌توانیم از پارامترهای فازی استفاده کنیم.

۲-۱ مدل ریاضی مساله

این بخش به معرفی مدل ریاضی مساله حمل و نقل با قيود انعطاف‌پذیر اختصاص دارد.

برای شرایطی که با توجه به قیمت بازار و افزایش نیروی کار بتوان عرضه را افزایش داد، می‌توان مدل ریاضی مناسبی که بیانگر شرایط واقعی مساله باشد طراحی کرد. یکی از مدل‌های ریاضی که امکان مدل‌سازی ریاضی مساله با رویکرد یادشده را در شرایط نادقیق فراهم می‌آورد مدل حمل و نقل با قيود انعطاف‌پذیر است. در این مدل، قيود مربوط به عرضه به صورت فازی انعطاف‌پذیر مدل‌سازی شده است. نماد \lesssim به معنی "تقریباً کوچکتر از یا مساوی با" است که برای داده‌های نادقیق از جنس قيود عرضه در مدل حمل و نقل به کار می‌رود.

مساله (۲):

$$\text{Min} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \quad (5)$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \lesssim s_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (6)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \geq d_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (7)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (8)$$

که در آن قيد فازی $\sum_{j=1}^n x_{ij} \lesssim s_i$ با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود [۱۵، ۱۷]:

$$\mu_i(x) = \begin{cases} 1, & x - s_i \leq 0 \\ 1 - \frac{x - s_i}{p_i}, & 0 \leq x - s_i \leq p_i \\ 0, & x - s_i \geq p_i \end{cases} \quad (9)$$

نظر به این که قیود (۶) خوش تعریف نیست (فضای جواب مشخص برای این دسته از قیود ایجاد نمی شود)، برای حل این مدل از رویکرد پارامتری، بر پایه مطالعات [۱۵] استفاده می شود.

لم ۱-۲-۱: قید انعطاف پذیر $\sum_{j=1}^n x_{ij} \lesssim s_i$ با قید پارامتری $\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq s_i + \theta p_i$ که در آن $\theta \in [0, 1]$ معادل است.

اثبات: هر جواب x که در قید انعطاف پذیر $\sum_{j=1}^n x_{ij} \lesssim s_i$ صدق می کند عملاً یک مجموعه فازی با تابع عضویت به صورت زیر است:

$$\mu_i(x) = \begin{cases} 1, & x - s_i \leq 0 \\ 1 - \frac{x - s_i}{p_i}, & 0 \leq x - s_i \leq p_i \\ 0, & x - s_i \geq p_i \end{cases}$$

براین اساس سه حالت زیر را در نظر می گیریم:

- اگر $\sum_{j=1}^n x_{ij} - s_i \leq 0$ ، یعنی i امین قید برقرار باشد، آنگاه مقدار تابع عضویت آن یک است و میزان رضایت مندی بیشترین مقدار ممکن است.

- اگر $0 \leq \sum_{j=1}^n x_{ij} - s_i \leq p_i$ ، آنگاه تابع عضویت به صورت یکنوا غیر نزولی بوده که به علت کمبود امکانات، خدمات رسانی را دچار مشکل کرده است و میزان رضایت مندی مشتری کاهش می یابد.

- اگر $\sum_{j=1}^n x_{ij} - s_i \geq p_i$ ، یعنی تلورانس بیش از حد مجازی است که تصمیم گیرنده مشخص کرده است. پس قید i به طور کامل نقض شده است و تابع عضویت آن صفر است. یعنی شرایط و نوع خدمات رسانی مورد پذیرش مشتریان قرار نگرفته است.

از این رو، با توجه به پیوسته بودن تابع عضویت یاد شده، مقادیر سمت راست قیود انعطاف پذیر از مقدار s_i تا $s_i + p_i$ بر اساس مقادیر پیوسته θ به ترتیب از $\theta = 0$ تا $\theta = 1$ ایجاد می شود. در نتیجه می توان رابطه فازی انعطاف پذیر را به صورت پارامتری معادل $s_i(\theta) = s_i + \theta p_i$ که در آن $\theta \in [0, 1]$ نمایش داد. ■

در مدل اخیر، فرض می شود برای قید انعطاف پذیر عرضه مقدار تلورانس از پیش تعیین شده داده شده است. تلورانس قید i ام عرضه، مقدار p_i (یک عدد حقیقی نامنفی) است. اکنون با توجه انعطاف پذیر بودن قیود عرضه،

قید i ام، یعنی $\sum_{j=1}^n x_{ij} \lesssim s_i$ ، $i = 1, 2, \dots, m$ با قید پارامتری زیر معادل خواهد بود.

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq s_i + \theta p_i \quad (10)$$

که در آن $\theta \in [0, 1]$ است.

لم زیر بیانگر معادل بودن دو قید (۶) و (۱۰) می‌باشد.

لم ۲-۱-۲: مساله (۲) با مساله زیر معادل است:

مساله (۳):

$$\text{Min} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \quad (11)$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq s_i + \theta p_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (12)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \geq d_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (13)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (14)$$

اثبات: براساس لم ۱-۱-۲ واضح است.

نتیجه ۱-۱-۲: با توجه به لم ۱-۱-۲، خوش تعریفی مساله (۳) نتیجه می‌شود.

لم ۳-۱-۲: با توجه به تعریف تابع عضویت (۹) که توابع پیوسته و یکنوا هستند، آنگاه مسایلی با قیدهایی به

صورت $\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq \tilde{s}_i$ و $\sum_{j=1}^n x_{ij} \lesssim s_i$ ، مسایل معادلی خواهند بود. بنابراین مساله اصلی با مساله زیر معادل خواهد

بود:

مساله (۴):

$$\text{Min} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \quad (15)$$

s.t.

$$X \in X_\alpha \quad (16)$$

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m), \alpha_i \in [0, 1], \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (17)$$

که در آن X_α فضای جواب‌های شدنی مساله اصلی است و به صورت زیر تعریف می‌شود.

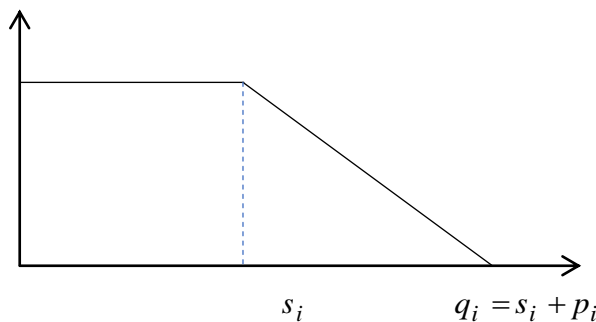
تعریف ۱-۱-۲: فرض کنید $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in [0, 1]^m$ و

$$X_\alpha = \left\{ x_{ij} \in \mathbb{R} \left| \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq s_i + (1 - \alpha_i) p_i, \sum_{i=1}^m x_{ij} \geq d_j, \\ x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{array} \right. \right\} \quad (18)$$

به طوری که برای $X = (x_{ij}) \in X_\alpha, x_{ij} \in \mathbb{R}$ یک جواب α -شدنی مساله (۴) را تعریف می‌کند [۱۷، ۱۵].

۲-۲ مدل پارامتری مساله

در این بخش، مدل حمل و نقل پیشنهادی را با استفاده از تابع عضویت تعریف شده در (۹) از حالت فازی انعطاف پذیر به حالت پارامتری دقیق تبدیل می کنیم تا بتوانیم فرایند حل را به دست آوریم. از آنجا که در عمل داده ها در سایه ای از ابهام و عدم دقت ارایه می شوند، اطلاعات را فازی انعطاف پذیر با پارامترهایی در بازه $[s_i, s_i + p_i]$ تفسیر می کنیم. چون حل مساله به صورت فازی غیرممکن است، با استفاده از تابع عضویت تعریف شده (۹) شکل پارامتری دقیق آن را می سازیم. نمایش بازه فازی انعطاف پذیر در شکل زیر نشان داده شده است.



شکل ۱. عدد فازی انعطاف پذیر

با توجه به تعریف بالا داریم:

$$p_i = q_i - s_i = (s_i + p_i) - s_i$$

به طوری که $p_i \geq 0$.

با توجه به تابع عضویت (۹) و رفع خوش تعریف نبودن قیود انعطاف پذیر، می توان مدل را به صورت زیر تعریف کرد.

مساله (۵):

$$\text{Min} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \quad (19)$$

s.t.

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \geq d_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (20)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq s_i + (1 - \alpha_i) p_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (21)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (22)$$

$$0 \leq \alpha_i \leq 1 \quad (23)$$

که در آن p_i براساس تابع عضویت داده شده در (۹) تعریف شده اند. توجه داریم که مطالب یاد شده بالا با دیدگاه رفع مشکل ناخوش تعریفی قیود انعطاف پذیر طرح شده اند.

بنابراین مساله حمل و نقل فازی داده شده به شکل مساله (۲)، با جایگذاری توابع عضویت (۹) با مساله پارامتری قطعی بالا معادل باشد. (در اینجا α_i توسط تصمیم گیرنده مشخص می شود).

در بخش بعدی با استفاده از تعاریف بیان‌شده و تبدیلات معادل مساله به فرایند حل و ارایه الگوریتم آن می‌پردازیم.

۳ پیشنهاد فرایند حل مدل

در بخش‌های قبل تاکید شد که به دلیل خوش تعریف نبودن مدل وقتی که فرض انعطاف‌پذیری قيود در آن وجود دارد فضای جواب شدنی مساله به طور مشخص قابل تعریف نیست و حل مساله با شکل اولیه خود ماهیت واقعی سیستم تصمیم‌گیری را انعکاس نمی‌دهد. از این‌رو، برای حل، ابتدا مساله را از حالت فازی انعطاف‌پذیر به حالت پارامتری تبدیل و سپس برای به دست آوردن جواب بهینه از بیشینه کردن سطوح رضایت‌مندی استفاده می‌کنیم. در این راستا برخی تعاریف و مفاهیم اساسی مورد نیاز است که در زیر آورده می‌شود.

تعریف ۳-۱: فرض کنید رابطه \lesssim یک نمایش فازی از رابطه نابرابری \leq در مساله (۲) باشد. بردار $x \in \mathbb{R}$ یک جواب $-\alpha$ کارا با تابع هدف کمینه‌سازی است، اگر هیچ $x' \in X_\alpha$ نباشد که $z'(x) > z(x)$. همچنین هر جواب $-\alpha$ کارا برای مساله (۵) یک جواب $-\alpha$ شدنی برای آن نیز است [۱۷].

گزاره ۳-۱: فرض کنید $\alpha' = (\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_m)$ و $\alpha'' = (\alpha''_1, \alpha''_2, \dots, \alpha''_m)$ که در آن $\alpha'_i \leq \alpha''_i$ برای همه i ها باشد. آن‌گاه هر جواب α'' شدنی، یک جواب α' شدنی می‌باشد.

قضیه ۳-۱: فرض کنید $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in [0, 1]^m$ و $x^* \in X_\alpha$ و $x_{ij}^* \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$ یک جواب $-\alpha$ شدنی مساله (۵) باشد. آنگاه بردار $x^* \in \mathbb{R}^m$ یک جواب $-\alpha$ کارای مساله (۵) با تابع هدف کمینه‌سازی می‌باشد اگر و تنها اگر x^* یک جواب بهینه مساله (۵) باشد.

اثبات: فرض کنید $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in [0, 1]^m$ و $x_{ij}^* \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$ یک جواب $-\alpha$ کارا مساله (۵) با تابع هدف کمینه‌سازی باشد. با توجه به مساله (۲) و تابع عضویت تعریف‌شده برای $i = 1, 2, \dots, m$ داریم: $\left\{ \sum_{j=1}^n x_{ij} \lesssim s_i \right\} \geq \alpha_i$ یا $\mu_i \left\{ \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq s_i + (1 - \alpha_i) p_i \right\}$. بنابراین x^* یک جواب شدنی برای مساله (۵) است. همچنین با توجه به تعریف ۳-۱ هیچ $x' \in X_\alpha$ وجود ندارد که $z'(x^*) > z(x^*)$. این بدین معناست که x^* یک جواب بهینه مساله (۵) است. از سوی دیگر، اگر x^* جواب بهینه مساله (۵) باشد به وضوح x^* یک جواب $-\alpha$ شدنی مساله (۵) است و بنابراین با توجه به تعریف بهینگی x^* ، بر $-\alpha$ کارا بودن x^* اشاره دارد.

اکنون با حل مساله برنامه‌ریزی خطی فازی مساله (۴) و با تعیین α_i توسط تصمیم‌گیرنده و جایگزین کردن آن در محدودیت متناظرش در مساله (۵) و سپس با حل مساله به دست آمده از این جایگزینی، جواب $-\alpha$ کارا مساله (۴) محاسبه می‌شود.

جواب $-\alpha$ کارا مساله (۵) دو ویژگی اساسی دارد:

الف) جواب دارای درجه رضایت‌مندی متناسب با هر محدودیت است.

(ب) جواب به دست آمده بهینه است.

این جواب تصمیم گیرنده را قادر می سازد تا با تعیین اولویت مطلوب و با توجه به شرایط محیطی یک جواب با درجه شدنی و کارایی مطلوب تر به دست آورد.

بدین منظور ابتدا مساله (۵) را حل می کنیم. فرض کنید (x^*, α^*) جواب بهینه و z^* مقدار بهینه تابع هدف مرحله اول با درجه کارایی α^* باشد. سپس یک جریمه p را برای هزینه حمل و نقل پرداخت می کنیم و تابع هدف مساله مرحله اول را به صورت قید با جریمه p در مرحله دوم می نویسیم. در ادامه با انتخاب جواب بهینه مطلوب توسط تصمیم گیرنده، برای یافتن جواب بهتر که دارای رضایت مندی بیشتر می باشد، مساله (۶) را حل می کنیم.

مساله (۶):

$$\text{Max } \sum_{j=1}^n \alpha_j \quad (24)$$

s.t.

$$z \leq z_1^* + (1 - \alpha) p. \quad (25)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \geq d_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (26)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq s_i + (1 - \alpha_i) p_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (27)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (28)$$

$$0 \leq \alpha_i \leq 1, \quad \alpha_i^* \leq \alpha_i \leq 1 \quad (29)$$

بدیهی است این مدل یک مساله برنامه ریزی خطی چند پارامتری است و با حل آن می توان جواب بهینه $(x_R^{**}, \alpha_R^{**})$ و مقدار بهینه تابع هدف z_R^{**} با درجه رضایت مندی α_R^{**} را به دست آورد.

با توجه به این که با کوچک شدن ناحیه جواب، جواب بهینه بهتر نخواهد شد، تصمیم گیرنده می خواهد مقدار بهینه تابع هدف را فقط حداکثر به اندازه $(1 - \alpha)P$ با رعایت حداقل رضایت مندی مورد پذیرش قیود، در جواب بهینه افزایش دهد. به وضوح مدل بالا، یک مساله برنامه ریزی خطی می باشد که با حل آن، دستیابی به یک جواب بهینه با رضایت مندی بیشتر حاصل شده و با این شرایط از حل مساله (۵) جواب بهینه مساله اصلی به دست می آید. قضیه زیر برای پوشش نظری بحث در این خصوص آورده شده است.

قضیه ۳-۲: جواب بهینه x^{**} مساله (۵) یک جواب $-\alpha$ کارای مساله (۲) است.

اثبات: با رویکرد فرض خلف قصد داریم اثبات را ارائه کنیم. از این رو، فرض کنیم x^{**} جواب بهینه کارا مساله (۲) نباشد، آنگاه \bar{x} وجود دارد به طوری که $\mu_i(x^{**}) \leq \mu_i(\bar{x}), \forall i = 1, 2, \dots, m$ و برای بعضی از k ها $\mu_k(x^{**}) \leq \mu_k(\bar{x})$. حال از آنجا که (x^{**}, α^{**}) جواب بهینه است و ضرایب در تابع هدف مرحله دوم

مثبت هستند، داریم:

$$\mu_i(x^{**}) = \alpha_i^{**}, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

حال با انتخاب $\mu_i(\bar{x}) = \bar{\alpha}_i, i = 1, 2, \dots, m$ ، جواب $(\bar{x}, \bar{\alpha})$ برای مساله مرحله دوم شدنی است. از این رو

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i^{**} = \sum_{i=1}^m \mu_i(x^{**}) < \sum_{i=1}^m \mu_i(\bar{x}) = \sum_{i=1}^m \mu_i(x) + \alpha_k$$

بنابراین نتیجه می‌شود (x^{**}, α^{**}) یک جواب بهینه مرحله دوم نیست که به وضوح یک تناقض است.

لم ۳-۱: مساله (۶) همواره شدنی است. زیرا، برای $\alpha_i = 0$ یک جواب بهینه (z^*, x^*) وجود دارد.

اثبات: به وضوح مساله (۶) برای $\alpha_i = 0$ یک جواب بهینه (z^*, x^*) وجود دارد.

لم ۳-۲: مساله (۶) هیچ گاه بی کران نیست.

اثبات: از آنجا که حداکثر مقدار هر α_i ، یک می‌باشد و در نتیجه حداکثر مقدار مجموع α_i ها برابر m است.

قضیه ۳-۳: جواب به دست آمده از مساله (۶) بهتر از جواب معادله (۵) نخواهد بود.

اثبات: فرض کنید x^* جواب بهینه مساله (۵) با سطح رضایت مندی α باشد. در مساله (۶) با افزایش سطح α

ناحیه شدنی را کوچک‌تر کرده و واضح است که با کوچک شدن ناحیه شدنی جواب به دست آمده از حل

مساله (۶) (با توجه به مساله مینیمم سازی) بهتر نمی‌شود. (یعنی یا برابر مساله (۵) بوده یا بدتر از آن می‌باشد).

بعد از معرفی مدل ارایه شده و مراحل حل آن و بیان قضایای لازم، حال یک الگوریتم حل برای مدل ارایه

می‌دهیم.

الگوریتم حل

یک مساله حمل و نقل را با قید فازی انعطاف‌پذیر بازه‌ای را در نظر بگیرید که شامل s_i, d_j, p_i باشد. الگوریتم حل را به صورت زیر بیان می‌کنیم.

گام اول: مساله (۲) را در بازه $[s_i, s_i + p_i]$ در نظر بگیرید.

گام دوم: با توجه به تابع عضویت تعریف شده (۹)، مساله (۵) را بسازید.

گام سوم: مساله (۵) را براساس α_i های مختلف حل کنید تا جواب بهینه (x^*, α^*) با مقدار بهینه تابع هدف z^*

برای مساله به دست آید..

گام چهارم: مساله (۵) را با تغییر تابع هدف در قالب مساله (۶) برای α_i^* های انتخاب شده (توسط تصمیم

گیرنده / کارشناس خبره) از مرحله اول، برحسب حداقل سطح رضایت مندی شان حل کنید تا جواب بهینه

(x^{**}, α^{**}) با مقدار بهینه تابع هدف z^{**} را به دست آورید.

در بخش بعدی یک مثال کاربردی ارایه شده است که در آن فرایند حل به صورت کامل بیان شده و از برنامه

لینگو برای یافتن جواب مساله استفاده کرده‌ایم.

۴ مثال عددی

برای تولید فولاد، سنگ آهن باید از دو معدن استخراج شده و به سه کارخانه ذوب آهن حمل شود. که با توجه به

فاصله مکانی بین معادن و کارخانه ها می‌خواهیم هزینه نهایی مربوط به حمل و نقل کالاها را کمینه کنیم، با توجه

به اینکه هزینه حمل هر واحد کالا به ازای هر کیلومتر ۱۰۰ تومان است. در جدول زیر میزان موجودی انبارها و تقاضای فروشگاهها نیز ثبت شده است. و درضمن تصمیم گیرنده حداکثر خطای تقاضا برای قید اول را ۵ و برای قید دوم ۱۲ و برای قید سوم ۹ در نظر گرفته است.

جدول ۱. مقادیر عرضه و تقاضا و هزینه حمل و نقل

ظرفیت عرضه	کارخانه ۳	کارخانه ۲	کارخانه ۱	
۱۰۳	۲۸	۱۶	۹	معدن ۱
۱۹۷	۱۹	۲۹	۱۴	معدن ۲
	۹۶	۱۳۳	۷۱	تقاضا

با توجه به مجموع عرضه و تقاضا ملاحظه می کنیم که جدول حمل و نقل متوازن است و مساله را به صورت زیر فرموله می کنیم.

هدف کمینه کردن کل هزینه حمل و نقل برای برآورده کردن تقاضای فروشگاهها با توجه به موجودی انبارها می باشد.

- معادن: $i = 1, 2$

- کارخانه ها: $j = 1, 2, 3$

- متغیرهای تصمیم: x_{ij} تعداد واحد کالایی که باید از معدن i به کارخانجات j ارسال شود.

$$\text{Min} 9x_{11} + 16x_{12} + 28x_{13} + 14x_{21} + 29x_{22} + 19x_{23}$$

s.t.

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \lesssim 103$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \lesssim 197$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} \geq 71$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} \geq 133$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} \geq 96$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2, 3.$$

معادله را به صورت زیر به حالت پارامتری دقیق می نویسیم.

$$\text{Min} 9x_{11} + 16x_{12} + 28x_{13} + 14x_{21} + 29x_{22} + 19x_{23}$$

s.t.

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 113 - 10\alpha_1$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 217 - 20\alpha_2$$

$$x_{11} + x_{21} \geq 71$$

$$x_{12} + x_{22} \geq 133$$

$$x_{13} + x_{23} \geq 96$$

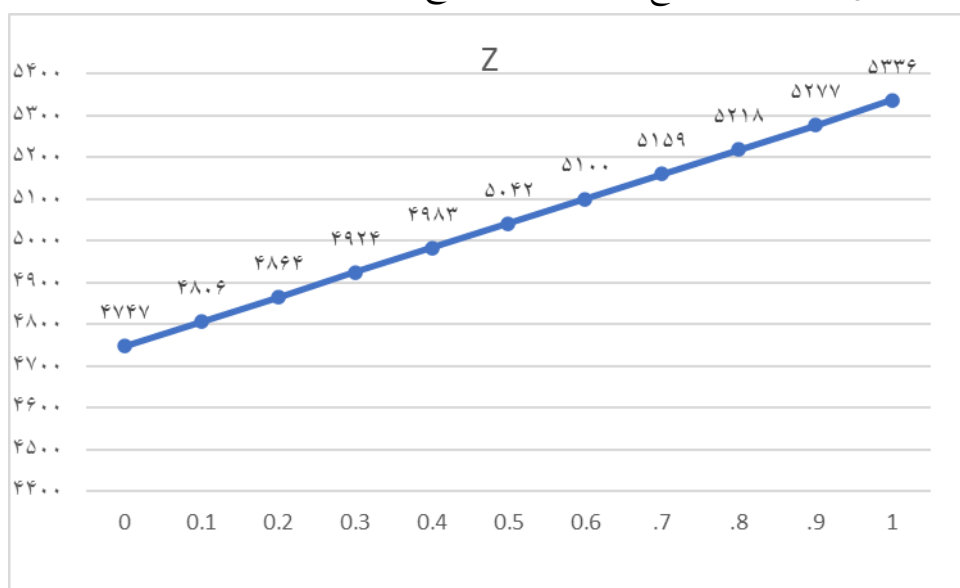
$$x_{ij} \geq 0, \quad 0 < \alpha_i \leq 1, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2, 3.$$

حال مدل بالا را به ازای α_i های مختلف با استفاده از لینگو به دست می‌آوریم که مقادیر آن در جدول زیر آورده شده است.

جدول ۲. مقدار تابع هدف براساس مقادیر مختلف α_i

α_i	۰	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵	۰/۶	۰/۷	۰/۸	۰/۹	۱
Z	۴۷۴۷	۴۸۰۶	۴۸۶۴	۴۹۲۴	۴۹۸۳	۵۰۴۲	۵۱۰۰	۵۱۵۹	۵۲۱۸	۵۲۷۷	۵۳۳۶
x_{11}	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
x_{12}	۱۱۳	۱۱۲	۱۱۱	۱۱۰	۱۰۹	۱۰۸	۱۰۷	۱۰۶	۱۰۵	۱۰۴	۱۰۳
x_{13}	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
x_{21}	۷۱	۷۱	۷۱	۷۱	۷۱	۷۱	۷۱	۷۱	۷۱	۷۱	۷۱
x_{22}	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷	۲۸	۲۹	۳۰
x_{23}	۴۵	۴۵	۴۵	۴۵	۴۵	۴۵	۴۵	۴۵	۴۵	۴۵	۴۵

نمودار پایین نشان دهنده این است که با افزایش سطح رضایت‌مندی مشتری، مقادیر تابع هدف افزایش می‌یابد. شایان ذکر است در اینجا روند تحلیل همانند بررسی تغییرات مقادیر تابع هدف یک مساله دوهدفه است که هدف غالب سطح رضایت‌مندی (درجه صدق‌پذیری) است. از این رو، دو تابع هدف در جهت متفاوت تغییر می‌کنند و به همین دلیل برخلاف تصور هدف با افزایش سطح رضایت‌مندی کاهش نخواهد یافت.



شکل ۲. مقدار تابع هدف براساس مقادیر مختلف α_i

در حالتی که $\alpha^* = (0/5, 0/5, 0/5)$ است، جواب $z^* = 5271$ می‌باشد که برای یافتن جواب کارا معادله زیر را حل می‌کنیم.

$$\begin{aligned} &Max \alpha_1 + \alpha_2 \\ &s.t. 9x_{11} + 16x_{12} + 28x_{13} + 14x_{21} + 29x_{22} + 19x_{23} \leq z^* + (1-\alpha_1)500 \\ &x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 103 + (1-\alpha_1)0 \\ &x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 197 + (1-\alpha_2)20 \\ &x_{11} + x_{21} \geq 71 \\ &x_{12} + x_{22} \geq 133 \\ &x_{13} + x_{23} \geq 96 \\ &x_{ij} \geq 0, \quad 0 < \alpha_i \leq 1, \quad i=1,2, \quad j=1,2,3. \end{aligned}$$

با توجه به روش پیشنهادی جواب بهینه تابع هدف معادله بالا $z^{**} = 5336$ ، $\alpha^{**} = (0/17, 1/1)$ و جواب بهینه به صورت $x^{**} = (0, 103, 0, 71, 30, 96)$ می‌باشد.

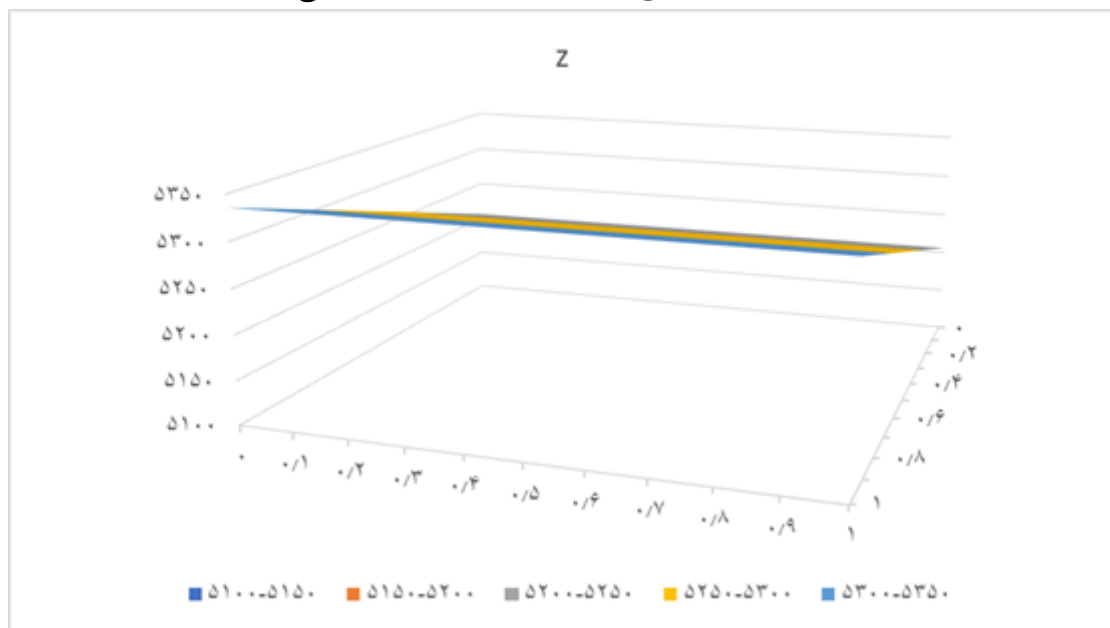
که جواب بهینه با انتخاب تصمیم گیرنده و با رضایت مندی بیشتر مشتری به دست آورده‌ایم. با توجه به مقادیر مختلفی که برای α_i در نظر می‌گیریم می‌توانیم تحلیل حساسیت داشته باشیم. با تغییرات α_i در قید اول و دوم مقادیر تابع هدف را بررسی می‌کنیم.

جدول ۳. مقدار تابع هدف براساس مقادیر مختلف α_i

$\alpha_1 \backslash \alpha_2$	۰	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵	۰/۶	۰/۷	۰/۸	۰/۹	۱
۰	5271	5219	5233	5245	5258	5271	5284	5297	5310	5323	5336
۰/۱	5271	5219	5233	5245	5258	5271	5284	5297	5310	5323	5336
۰/۲	5271	5219	5233	5245	5258	5271	5284	5297	5310	5323	5336
۰/۳	5271	5219	5233	5245	5258	5271	5284	5297	5310	5323	5336
۰/۴	5271	5219	5233	5245	5258	5271	5284	5297	5310	5323	5336
۰/۵	5271	5219	5233	5245	5258	5271	5284	5297	5310	5323	5336
۰/۶	5271	5219	5233	5245	5258	5271	5284	5297	5310	5323	5336
۰/۷	5271	5219	5233	5245	5258	5271	5284	5297	5310	5323	5336

۰/۸	۵۲۰۶	۵۲۱۹	۵۲۳۲	۵۲۴۵	۵۲۵۸	۵۲۷۱	۵۲۸۴	۵۲۹۷	۵۳۱۰	۵۳۲۳	۵۳۳۶
۰/۹	۵۲۰۶	۵۲۱۹	۵۲۳۲	۵۲۴۵	۵۲۵۸	۵۲۷۱	۵۲۸۴	۵۲۹۷	۵۳۱۰	۵۳۲۳	۵۳۳۶
۱	۵۲۰۶	۵۲۱۹	۵۲۳۲	۵۲۴۵	۵۲۵۸	۵۲۷۱	۵۲۸۴	۵۲۹۷	۵۳۱۰	۵۳۲۳	۵۳۳۶

نمودار بعدی بیانگر این است که با افزایش سطح رضایت مندی مشتری، مقادیر تابع هدف افزایش می‌یابد.



شکل ۳. مقدار تابع هدف براساس مقادیر مختلف α_i

با توجه به تحلیل حساسیت، تصمیم‌گیرنده قادر می‌باشد که بهترین انتخاب را α_i برای داشته باشد که مزیت روش پیشنهادی می‌باشد.

۵ بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله، مدل حمل و نقل با قيود عرضه نادقیق با شرایط انعطاف‌پذیر در نظر گرفته شده است. امکان پارامترهای غیرقطعی برای تصمیم‌گیرنده داده شده است که ابتدا مساله غیرقطعی را به فرم قطعی پارامتری تبدیل کرده و سپس با رویکرد برنامه‌ریزی دومرحله‌ای و حدود انتظار برای هر عرضه و با نظر تصمیم‌گیرنده به جواب α -کارا رسیده‌ایم. یکی از نتایج مثبت کاهش هزینه‌های حمل و نقل، افزایش رضایت مندی مشتریان و در نتیجه سود بیشتر برای شرکت‌ها می‌باشد. نتیجه دیگر نیز تحلیل حساسیت آن بوده که حق انتخاب بیشتری به تصمیم‌گیرنده داده است. در پژوهش‌های آتی می‌توان همزمان از تقاضای فازی انعطاف‌پذیر استفاده نمود.

سپاسگزاری

نویسندگان از داوران محترم که با ارسال نقطه نظرات خود در بهبود نسخه‌های اصلاحی مقاله همکاری نموده‌اند، کمال تشکر و قدردانی دارند.

منابع

- [1] Gani, A. N., Razak, K. A., (2006). Two stage fuzzy transportation problem. *Journal of Physical Sciences*, 10, 63-69.
- [2] Pandian, P., Natarajan, G., (2010). A new method for finding an optimal solution for transportation problems. *International Journal of Mathematical Sciences and Engineering Applications*, 4(2), 59-65.
- [3] Kaur, A., Kumar, A., (2012). A new approach for solving fuzzy transportation problems using generalized trapezoidal fuzzy numbers. *Appl. Soft Comput*, 12(3), 1201-1213.
- [4] Dehbari, S., Pourrosta, A., Naderi Bani, M., Ghobadian, E., Tavakkoli-Moghaddam, R., (2013). Routing of multi-purpose vehicles with possible service time and fuzzy demand under time window constraints. *Journal of Operations Research and its Applications*, 9(4), 85-106.
- [5] Gabrel, V., Lacroix, M., Murat, C., Remli, N., (2014). Robust location transportation problems under uncertain demands. *Discrete Applied Mathematics*, 164, 100-111.
- [6] Guo, H., Wang, X., Zhou, S., (2015). A transportation problem with uncertain costs and random supplies. *International Journal of e-Navigation and Maritime Economy*, 2, 1-11.
- [7] Akilbasha, A., Pandian, P., Natarajan, G., (2018). An innovative exact method for fully interval integer transportation problems. *Information in Medicine Unlocked*, 11, 95-99.
- [8] Dantzig, G. B., (2018). Application of the Simplex Method to a Transportation Problem, *Activity Analysis of Production and Allocation*. In: Koopmans, T. C., Ed., John Wiley & Sons, New York, 359-373.
- [9] Nasserli, S. H., Khabiri, B., (2019). A Gray Transportation Problem in Fuzzy Environment. *Journal of Operations Research and its Applications*, 16(3), 111-122.
- [10] Khalifa, A. E. W., Kumar, P., Alharbi, M. G., (2020). Enhancement of Capacitated Transportation Problem in Fuzzy Environment. *Advances in Fuzzy Systems*, 9, 1-9.
- [11] Poor Ofaghi, F., Darvishi Soloklaei, D., Saffar Ardabili, J., (2021). A New Approach to Finding the solution of Transportation Problems with Gray Parameters. *Journal of Operations Research and Its Applications*, Volume 18(2), 59-73.
- [12] Attari, H., Nasserli, S. H., (2014). New concepts of feasibility and efficiency of solutions in fuzzy mathematical programming problems. *Fuzzy Information and Engineering*, 6(2), 203-221.
- [13] Nasserli, S. H., Khabiri, B., (2010). A revised simplex algorithm for fuzzy number linear programming problem using linear ranking functions. *International Journal of Mathematics and Computation*, 8(10), 114-126.
- [14] Nasserli, S. H., Ramzannia-Keshteli, G., (2018). A goal programming approach for fuzzy flexible linear programming problems. *Iranian Journal of Operations research*, 9(1), 1-28.
- [15] Nasserli, S. H., Ebrahimnejad, A., Cao, B. Y., (2019). Application for the Flexible Linear Programming. In *Fuzzy Linear Programming: Solution Techniques and Applications* (pp. 223- 232). Springer, Cham.
- [16] Nasserli, S. H., Verdegay, J. L., Mahmoudi, F., (2021). A New Method to Solve Fuzzy Interval Flexible Linear Programming Using a Multi-Objective Approach. *Fuzzy Information and Engineering*, 13(2), 248-265.
- [17] Ramzannia-Keshteli, G., Nasserli, S. H., (2018). Solving flexible fuzzy multi-objective linear programming problems: Feasibility and efficiency concept of solutions. *Punjab University Journal of Mathematics*, 51(6), 19-31.
- [18] Mahmoudi, F., (2019). A new solving approach for fuzzy flexible programming problem in uncertainty conditions, *International Journal of Applied Operational Research*, Vol. 9, 19-29.
- [19] Nasserli, S.H., (2007). Fuzzy Simplex Methods for Solving Fuzzy Linear Programming Problems. *Journal of Operations Research and Its Applications*, 4(13), 67-76.

- [20] Goodarzian, F., Shishebori, D., Nasser, S. H., Dadva, F., (2021). A bi-objective production distribution problem in a supply chain network under grey flexible conditions. *Rairo Operations Research*, 55, S1287–S1316.
- [21] Liu, S. T., Kao, C., (2004). Solving fuzzy transportation problems based on extension principle. *European Journal of operational research*, 153(3), 661-674.
- [22] Hamdy, A. T., (2007). *Operations research: An introduction*. 8th Edition, Pearson Prentice Hall, Upper Saddle River.
- [23] Behmanesh, E., Nasser, S. H., (2013). An interactive method based on non-fuzzy parameterization to solve the problem of multi-objective transportation. *Journal of Operations Research and its Applications*, 10(3), 25-39.