

Teaching addition and subtraction: A comparative study on the math curriculum goals and the content of the first-grade math textbook in Iran, Japan, and the USA

آموزش جمع و تفریق: مطالعه مقایسه‌ای در باره اهداف برنامه و محتوای کتب درسی ریاضی پایه اول ابتدایی کشورهای ایران، ژاپن و آمریکا

Mehdi Izadi, Ebrahim Reyhani, Gholam Ali Ahadi
MSc in Mathematics Education, Islamic Azad University, Fars, Iran
Associate Professor of Curriculum Planning, Rajaei University, Tehran, Iran
Associate Professor of Mathematics, Rajaei University, Tehran, Iran

مهدی ایزدی، ابراهیم ریحانی*، غلامعلی احمدی
کارشناس ارشد آموزش ریاضی، واحد علوم و تحقیقات فارس، دانشگاه آزاد اسلامی، فارس، ایران
دانشیار گروه برنامه‌ریزی درسی دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، تهران، ایران
دانشیار گروه ریاضی دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، تهران، ایران

Abstract

چکیده

Focusing on the math curriculum goals and content of the first-grade math textbooks in Iran, Japan and the USA, this research aimed to study about the process of teaching addition and subtraction. The math curriculum goals and content of the first-grade math textbooks of these three countries were considered as the statistical populations of the study. To collect the data documentary research was utilized and comparative method was used in order to analyze the data. The findings showed that the American curriculum focused on enhancing the ability of "problem solving"; whereas, the Iranian program focused more on the "making sense and understanding the concept". On the other hand, Japan's curriculum emphasized on "understanding and exploring adding and subtracting ways" by the students themselves. During the process of teaching these two operations, American textbooks introduced the largest number of teaching methods. In the beginning of teaching addition and subtraction, except the new version of Iranian book (۲۰۱۱), all the books, initially teaching addition and subtraction, focused on the combination aspect of addition and reduction aspect of subtraction.

پژوهش حاضر با هدف بررسی فرآیند آموزش اعمال جمع و تفریق در اهداف برنامه و محتوای کتب درسی ریاضی پایه اول ابتدایی سه کشور ایران، ژاپن و آمریکا، صورت گرفت. جامعه آماری این تحقیق، اهداف برنامه و محتوای کتب درسی ریاضی پایه اول ابتدایی سه کشور فوق بود. این تحقیق با روش توصیفی تحلیلی تطبیقی صورت گرفت که برای جمع‌آوری داده‌ها از روش مطالعه اسنادی و برای تحلیل داده‌ها، از روش تحلیل کیفی استفاده شد. نتایج این بررسی نشان داد که در برنامه‌ی درسی در آمریکا تمرکز بر روی افزایش توانایی «حل مسأله» است در حالی که برنامه درسی ایران، بیشتر بر روی «مفهوم‌سازی مناسب این دو عمل و ایجاد درک درست» در دانش‌آموزان تمرکز دارد. برنامه درسی ژاپن هم بیشترین تأکید را بر کسب «درک صحیح» و کشف روش‌های جمع و تفریق «توسط خود دانش‌آموزان» دارد. در فرآیند آموزش این دو عمل کتاب درسی آمریکا، بیشترین تعداد روش آموزش را نسبت به کتاب‌های دیگر داراست. در شروع آموزش عمل جمع و تفریق، به جز کتاب جدید ایران (۲۰۱۱) در همه کتاب‌ها از جنبه ترکیبی جمع و جنبه کاهش تفریق استفاده شده است.

Keywords: teaching addition, subtraction, math curriculum program, first-grade of elementary school, textbooks

واژگان کلیدی: آموزش جمع، تفریق، برنامه درسی ریاضی، اول ابتدایی و کتاب درسی

* نویسنده مسؤول: ابراهیم ریحانی e_reyhani@yahoo.com

پذیرش: ۹۳/۷/۱۹

وصول: ۹۲/۴/۲۳

مقدمه

بررسی یافته‌های ملی آزمون تیمز (TIMSS: Trend international math & science study) نشان می‌دهد که عملکرد دانش‌آموزان ایرانی در ریاضیات مطلوب نیست (Karimi, ۲۰۰۹). محتوای برنامه و کتب درسی ریاضی، تأثیری مهم بر عملکرد دانش‌آموزان در درس ریاضی دارد (Raffia poor gatabi, ۲۰۱۰). این تأثیر در نظام‌های آموزشی متمرکز مانند ایران، بیشتر است (Gooya, ۲۰۰۶). علت چنین تأثیری، این امر است که از معلمان ریاضی ایرانی خواسته می‌شود تا نسبت به کتاب‌های درسی وفادار باشند (Kiamanesh, ۲۰۰۵) و آنها نیز تا حد زیادی (بالای ۸۰ درصد)، از کتاب‌های درسی به عنوان منبع اصلی برای تدریس استفاده می‌کنند (Raffia poor gatabi, ۲۰۱۰). برنامه آموزش ابتدایی، محور تحول اساسی در امر آموزش در همه زمینه‌ها از جمله درس ریاضی است (Abedi, ۲۰۰۴). همچنین محتوای تمامی دروس از جمله درس ریاضی در پایه اول ابتدایی، به دلیل این که اولین تجربیات آموزشی دانش‌آموزان در این پایه شکل می‌گیرد، اهمیت فوق‌العاده‌ای دارد. بنابراین بررسی محتوای کتب درسی ریاضی دوره ابتدایی کشورمان، به خصوص در پایه اول ابتدایی، و مقایسه آن با محتوای کتب درسی دیگر کشورها، یک ضرورت به حساب می‌آید.

علم حساب، یکی از مهم‌ترین شاخه‌های اصلی ریاضیات هست که هم در زندگی روزمره افراد کاربرد دارد و هم ابزاری جهت توسعه تفکر ریاضی است. به همین دلیل بچه‌ها در اولین مرحله یادگیری ریاضیات پس از آشنایی با اعداد، با مفهوم دو عمل جمع و تفریق از علم حساب و مسائل مربوط به آن آشنا می‌شوند (Erdoğan, ۲۰۱۰).

چون شیوه‌های یاددهی و یادگیری مفاهیم مختلف ریاضی از کشوری به کشور دیگر متفاوت است (Torner, Schoenfeld & Reiss, ۲۰۰۷)، بنابراین بررسی شیوه‌های آموزش مفاهیم مختلف ریاضی از جمله جمع و تفریق در محتوای برنامه درسی کشورهای مختلف، می‌تواند در دستیابی به شیوه‌های مناسب آموزش این مفاهیم مؤثر باشد. کشورهایی همانند ژاپن و آمریکا در آزمون‌های بین‌المللی، همانند تیمز، نمرات بالای میانگین بین‌المللی را

کسب کرده‌اند و جزء کشورهای برتر این آزمون‌ها بوده‌اند (The International Association for the Evaluation of Educational Achievement, ۲۰۱۱). همچنین بیش‌ترین مطالعات و تحقیقات در زمینه آموزش ریاضی، در این دو کشور، به خصوص در کشور آمریکا، صورت گرفته است (Reyhani, Ahmadi & Karami zarandi, ۲۰۱۱). دلیل این تحقیق، با بررسی اهداف برنامه و محتوای کتب درسی ریاضی پایه اول ابتدایی سه کشور ایران، ژاپن و آمریکا، در پی یافتن روش‌های مناسب جهت آموزش دو عمل جمع و تفریق است. برای دستیابی به این هدف بایستی به دو سؤال اصلی این تحقیق که شامل موارد زیر است، پاسخ داد:

۱- عمل جمع و تفریق، از منظر محتوا و فرآیند در اهداف برنامه درسی ریاضی پایه اول ابتدایی سه کشور ایران، ژاپن و آمریکا چگونه است؟

۲- آموزش عمل جمع و تفریق، در محتوای کتب درسی ریاضی پایه اول ابتدایی سه کشور ایران، ژاپن و آمریکا چگونه صورت می‌گیرد؟

چارچوب نظری تحقیق

جمع و تفریق، اولین اعمالی هستند که در علم حساب آموزش داده می‌شوند. مسائل جمع و تفریق از لحاظ بیان، به دو دسته کلی مسائل نمادی (Symbol Problems) و مسائل کلامی (Word Problems) تقسیم می‌شوند. مسائل نمادی، مسائلی هستند که به وسیله اعداد و نمادهای ریاضی بیان می‌شود. در مسائل کلامی از عبارات کلامی (متنی) برای بیان موقعیتی که متناظر با عمل جمع یا تفریق است، استفاده می‌شود. هر یک از این دو دسته، ویژگی‌ها و خصوصیات، مشکلات و راه‌حل‌های آموزشی مخصوص به خود را دارند. در این قسمت، ابتدا مبانی نظری موجود در مورد مسائل نمادی جمع و تفریق و سپس مبانی نظری مربوط به زمینه مسائل کلامی، ارائه می‌گردد.

مسائل نمادی جمع و تفریق

آموزش اغلب مفاهیم ریاضی از جمله جمع و تفریق، به طور سنتی شامل سه روش محاسباتی عمده است:

۱- نوشتار استاندارد (written standard) الگوریتم‌ها:

این روش شامل آموزش الگوریتم‌های استاندارد

درسی با توجه به نتایج تحقیقات مختلف، نمی‌تواند مؤثر و کافی باشد (Selter, ۲۰۰۱).

علاوه بر عدم تمایل افراد در استفاده از روش نوشتار استاندارد در محیط‌های غیر مدرسه‌ای و در زندگی روزمره خود، کودکان در یادگیری و استفاده از این روش نیز مشکلات زیادی دارند. البته مشکلات آنان در عمل جمع نسبت به عمل تفریق، کمتر است (Selter, ۲۰۰۱). تفریق می‌تواند به وسیله دو مدل اصلی کم کردن (taking away) و تعیین اختلاف (determining the difference)، و با استفاده از رابطه معکوس آن با جمع درک شود. نتایج تحقیقات مختلف نشان می‌دهد که بزرگسالان، بین روش‌های مختلف تفریق بر اساس شرایط عددی مسائل، راه‌گزینی می‌کنند (جدول شماره ۱).

اما بچه‌ها راه‌گزینی منعطف بین دو راهبرد، همان طور که بزرگ‌ترها انجام می‌دهند، ندارند، بلکه آنها مسائل ارائه‌شده در قالب تفریق (۹-۱۲) را با استفاده از تفریق مستقیم و مسائل تفریق ارائه‌شده در قالب جمع (۱۲ = □ + ۹) را با استفاده از روش تفریق توسط جمع حل می‌کنند (Peters et al., ۲۰۱۲).

آنها این الگوی ثابت تصمیم‌گیری را در حل مسائل جمع و تفریق نشان می‌دهند (Selter, ۲۰۰۱). علت چنین الگوی ثابتی در انتخاب راهبردها از طرف کودکان می‌تواند بنا بر دلایل زیر باشد که هر دلیل به ترتیب به وجود آورنده دلیل بعدی در فرآیند آموزش است: ۱- تأکید برنامه درسی بیشتر کشورها بر استفاده از روش نوشتار استاندارد بدون یادگیری مفهومی این روش‌ها ۲- استفاده از مفهوم کاهش (decrease) تفریق به صورت یک جانبه گرایانه در محتوای برنامه درسی و کتاب‌های ریاضی پایه اول ابتدایی ۳- بها دادن معلمان به استفاده منعطف از راهبردهای مناسب به جای بها دادن به استفاده منعطف از راهبردهای مناسب ۴- تسلط فرهنگ مهارت محور بر کلاس‌های ریاضی به جای فرهنگ انتخاب راهبرد مؤثر ۵- برخوردار نبودن دانش‌آموزان از قدرت انتخاب راهبرد مناسب به دلیل عدم وجود دانش مفهومی مناسب در مورد روابط بین جمع و تفریق (Verschaffel et al., ۱۹۹۶; Torbeyns, Verschaffel & Ghesquiere, ۲۰۰۵; Torbeyns, De Smedt,

همانند استفاده از قواعد رقمی یا جدول ارزش مکانی برای جمع و تفریق اعداد بزرگ‌تر از ۱۰ است.

۲- نوشتار غیررسمی (written informal) در این روش راهبرد به‌کاررفته بر مبنای ویژگی‌های اعداد ارائه‌شده و با استفاده از ساده‌ترین روش تعیین می‌شود (به عنوان مثال، حل $۳۹۹ + ۵۲۷$ با استفاده از روش $۱-۴۰۰+۵۲۷$)

۳- محاسبه ذهنی (mental arithmetic) در این روش تمامی عملیات محاسبه‌ای در ذهن و بدون هیچ گونه نوشتاری، صورت می‌گیرد و حاصل پس از عملیات ذهنی، به دست می‌آید (Selter, ۲۰۰۱).

تأکید برنامه درسی بیشتر کشورها بر توسعه نوشتار استاندارد (الگوریتم‌ها) با هدف دستیابی به محاسبه مؤثر، سریع و درست است (Verchaffel & De Corte, ۱۹۹۶). به همین دلیل کتاب‌های درسی نیز بیشترین تمرکز خود را بر نوشتار استاندارد دارند و فرصت‌های زیادی را برای استفاده از روش‌های دیگر به افراد نمی‌دهند. همین امر موجب شده است که این روش از طرف معلمان نیز دارای بالاترین اولویت نسبت به دو روش دیگر باشد (Selter, ۲۰۰۱).

با تمامی این تأکیدات از طرف برنامه درسی، کتب درسی و معلمان بر نوشتار استاندارد، نتایج تحقیقات مختلف نشان می‌دهد که بزرگسالان اغلب تمایلی به استفاده از روش‌های نوشتار استاندارد آموخته‌شده مدرسه‌ای، در موقعیت زندگی روزمره‌شان ندارند، بلکه از روش‌های نوشتار غیررسمی استفاده می‌کنند (Scribner, ۱۹۸۴ cited in Selter, ۲۰۰۱) چنین نتایجی را نانس، اسپچلایمن و کاراها (Nunes, Schlieman & Carraher, ۱۹۹۳ cited in Selter, ۲۰۰۱) برای کودکان خیابانی برزیلی نیز گزارش کرده‌اند. هارت (Hart, ۱۹۸۱ cited in Selter, ۲۰۰۱) نیز از تحقیقش چنین نتیجه‌گیری می‌کند که خیلی از بچه‌های مدارس راهنمایی (دوره میانی) انگلیس، تمایلی به استفاده از روش‌های آموخته‌شده مدرسه‌ای ندارند. بنابراین آموزش الگوریتم‌ها به تنهایی، در برنامه درسی و محتوای کتب

زبانی و درک متنی نیز باشند. طبقه‌بندی مسائل کلامی بر اساس ساختار معنایی که دارند، مبنای یک سنت طولانی در تحقیق بر مسائل جمع و تفریق بوده است (Verschaffel, ۲۰۰۷, Greer & De Corte). ساختار کلی این مسائل شامل ساختارهای افزایشی (increase)، کاهش، ترکیبی (combination) و مقایسه‌ای است. جدول شماره ۲، این طبقه‌بندی را به همراه مثال نشان می‌دهد.

قبل از حل مسائل کلامی، کودکان بایستی قادر باشند که (۱) بیان کنند که چه چیزی خواسته شده است (۲) بیان کنند که چه چیزی داده شده است (۳) راهنماهای متنی موجود را تشخیص دهند (۴) عمل درستی که باید استفاده شود را تعیین کنند. کتب درسی و ارزشیابی‌های مدرسه، بایستی این رویه دقیق را از پایه اول ابتدایی برای حل مسائل کلامی منعکس کنند (Department of Education Bureau Of Elementary Education, ۲۰۰۳, cited in Verzosa & Mulligan, ۲۰۱۲).

جمع و تفریق در اهداف برنامه درسی کشورهای ایران، ژاپن و آمریکا (ایالت کالیفرنیا) جدول شماره ۳، اهداف برنامه درسی هر یک از سه کشور مذکور را در آموزش دو عمل جمع و تفریق، نشان می‌دهد.

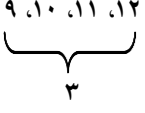
Ghesquiere & Verschaffel, ۲۰۰۹ & Selter, Prediger, Nührenböcker & HuBmann, (۲۰۱۲).

به طور کلی با توجه به مبانی نظری موجود، می‌توان راه‌حل‌های ذیل را برای رفع مشکلات یادگیری و حل مسائل نمادی دو عمل جمع و تفریق توسط دانش‌آموزان از پایه اول ابتدایی ارائه کرد: ۱- استفاده از همه روش‌ها (الگوریتم‌ها، نوشتار غیررسمی و حساب ذهنی) در محتوای برنامه درسی، ۲- توسعه مستمر درک دانش‌آموزان از مفهوم عدد و روابط بین اعداد، ۳- توجه همزمان و یکسان به جنبه کاهش و مقایسه‌ای (comparison) تفریق و توسعه همزمان دانش مفهومی و رویه‌ای در مورد راهبردهای مختلف آن، ۴- آموزش جمع و تفریق به عنوان عملیاتی در هم تنیده با یک رابطه معکوس و نه به عنوانی اعمالی جدا و بی‌ربط به هم و ۵- اهمیت دادن به استفاده منعطف دانش‌آموزان از راهبردهای مختلف (Selter et al., ۲۰۱۲; Selter, ۲۰۰۱; Peters et al., ۲۰۱۲).

مسائل کلامی جمع و تفریق

برای حل این مسائل، افراد علاوه بر داشتن مهارت‌های مربوط به عمل جمع و تفریق، بایستی دارای مهارت‌های

جدول ۱ - نحوه راه‌گزینی بزرگسالان در حل مسائل نمادی تفریق (Peters, De Smedt, Torbeyns, Ghesquiere & Verschaffel, ۲۰۱۲)

مثال	راه حل	حالت	
۸-۴	بازیابی	عدد مورد تفریق > ۱۰	
$12 - 9 \rightarrow 9 + \square = 12$ ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲ 	تفریق توسط جمع	حاصل تفریق > عدد کم شونده	اختلاف بین عدد کم شونده و حاصل تفریق، زیاد باشد. عدد مورد تفریق ≤ 10
۱۲-۳=۹	تفریق مستقیم	حاصل تفریق < عدد کم شونده	
$12 - 5 =$ $12 - 7 =$	هر دو راهبرد	اختلاف بین عدد کم شونده و حاصل تفریق، کم باشد.	

جدول ۲ - انواع مسائل کلامی جمع و تفریق (Carpenter & Moser, ۱۹۸۴)

نوع مسأله	مثال
اضافه کردن (join)	حسین، ۳ تا سکه داشت. رضا هم ۸ تا سکه به او داد. الآن حسین چند تا سکه دارد؟
جدا کردن (separate)	حسین، ۱۱ تا تیله داشت. او ۶ تا از تیله‌هایش را به رضا داد. الآن حسین چند تا تیله دارد؟
ترکیب (combine)	حسین ۵ تا کلاه دارد. رضا ۸ تا کلاه دارد. حسین و رضا باهم چند تا کلاه دارند؟
مقدار اضافه‌شده مجهول (addend missing)	حسین ۷ تا مداد داشت. رضا تعدادی مداد به او داد. حسین الآن ۱۲ تا مداد دارد. رضا چه تعدادی مداد به حسین داده بود؟
جزء مجهول (part) (unknown)	حسین و رضا، ۱۱ تا تیله باهم دارند. حسین ۴ تا تیله داشت. رضا چه تعدادی تیله دارد؟
مقایسه (compare)	حسین، ۱۲ تا کتاب دارد. رضا ۷ تا کتاب دارد. حسین چه تعدادی کتاب بیشتر از رضا دارد؟

جدول ۳ - اهداف آموزش جمع و تفریق در برنامه درسی کشورهای ایران، ژاپن و آمریکا (با توجه به این که در این تحقیق، اهداف برنامه و محتوای کتب درسی ایالت کالیفرنیا از کشور آمریکا مورد تحلیل قرار گرفته است، بنابراین در کل این مقاله، منظور از کشور آمریکا، ایالت کالیفرنیا است.)

اهداف	برنامه درسی
۱- مفهوم عمل جمع و تفریق را درک نمایند. ۲- جمع و تفریق را به صورت کلامی بیان کنند و به صورت ریاضی بنویسند. ۳- ترکیب و تجزیه اعداد را بتوانند تا ۱۰ انجام دهند. ۴- جمع و تفریق‌های ساده را به طور ذهنی انجام دهند. ۵- با جمع و تفریق اعداد دو رقمی آشنا شوند. ۶- از ماشین حساب برای اطمینان از درستی جواب مسأله، استفاده کنند. ۷- نسبت به خواص ریاضی جمع، درک اولیه پیدا کنند. ۸- نمایش جمع و تفریق به صورت ستونی را انجام دهند. ۹- جمع و تفریق‌های متوالی تا حاصل جمع حداکثر ۱۰ را (تا دو مرحله) انجام دهند.	اهداف برنامه درسی ریاضی پایه اول ابتدایی کشور ایران (Alamian, ۲۰۱۱)
۱- دانش‌آموزان مفهوم جمع و تفریق را درک خواهند کرد و در استفاده اختصاصی از این اعمال مهارت خواهند یافت. ۲- با موقعیت‌هایی که در هر کدام، جمع و تفریق ممکن است کاربرد پیدا کنند، آشنا باشند. ۳- کشف روش‌هایی برای جمع کردن ۲ عدد یک رقمی و تفریق آنها که هر کدام (جمع و تفریق) وارون دیگری هست، طوری که دانش‌آموزان بتوانند دقیق و مطمئن جمع و تفریق را انجام دهند. ۴- فکر کردن در مورد روش‌های محاسبه موارد ساده جمع و تفریق اعداد دو رقمی.	اهداف برنامه درسی ریاضی پایه اول ابتدایی کشور ژاپن (۲۰۰۸, Translated to english in Takahashi, Watanabe & Yoshida, ۲۰۰۸)
۱- ارائه و حل مسائل جمع و تفریق. ۲- درک و استفاده از خاصیت‌های اعمال و روابط بین جمع و تفریق. ۳- جمع و تفریق تا ۲۰. ۴- کار با تساوی‌های جمع و تفریق. ۵- استفاده از مفهوم ارزش مکانی و خاصیت‌های اعمال برای جمع و تفریق کردن.	اهداف برنامه درسی ریاضی پایه اول ابتدایی کشور آمریکا (California Department of Education, ۲۰۱۰)

روش پژوهش

در این تحقیق از روش توصیفی تحلیلی تطبیقی استفاده شده است که برای این منظور، اهداف برنامه و محتوای کتب درسی سه کشور در ریاضی پایه اول ابتدایی، مورد بررسی قرار گرفت. جامعه آماری این تحقیق، اهداف برنامه درسی و محتوای کتب درسی ریاضی پایه اول ابتدایی سه کشور ایران، ژاپن و آمریکا (ایالت کالیفرنیا) است. حجم نمونه برابر با حجم جامعه انتخاب گردید. با توجه به غیرمتمرکز بودن نظام آموزشی کشور آمریکا، برنامه درسی و کتاب درسی ایالت کالیفرنیا از این کشور جهت بررسی انتخاب گردید. از آنجایی که نظام آموزشی کشور ایران و ژاپن متمرکز است، اهداف برنامه‌ی درسی موجود در سایت رسمی وزارت آموزش و پرورش این دو کشور در این تحقیق مورد بررسی قرار گرفت. در ضمن، با توجه به این که در ژاپن و ایالت کالیفرنیا آمریکا کتب درسی توسط انتشارات مختلف، منتشر می‌شود، کتاب ریاضی پایه اول ابتدایی کشور ژاپن در سال ۲۰۱۲، منتشرشده توسط مؤسسه انتشاراتی توکیو شوسکی (Tokyo Shoseki) که بیشترین سطح استفاده در مدارس ابتدایی کشور ژاپن را دارد و کتاب ریاضی منتشرشده توسط انتشارات مک میلان مک گراو هیل (Macmillan McGraw-Hill) در سال ۲۰۰۹ در ایالت کالیفرنیا، برای بررسی، انتخاب گردید. برای تحلیل کتاب ریاضی پایه اول ابتدایی کشور ایران نیز با توجه به این که این کتاب در سال تحصیلی ۱۳۹۱-۱۳۹۰ تغییر کرد، هم کتاب جدید و هم کتاب قدیمی برای بررسی مورد استفاده قرار گرفت. روش جمع‌آوری اطلاعات در این تحقیق، روش مطالعه اسنادی بود و برای تجزیه و تحلیل اطلاعات، از روش کیفی توصیفی مقایسه‌ای استفاده شد. مراحل انجام تحقیق به این صورت بود که بعد از تبیین مبانی نظری موجود در زمینه آموزش دو عمل جمع و تفریق، اهداف برنامه درسی و محتوای کتب ریاضی سه کشور مذکور در پایه اول ابتدایی، با محوریت کتاب جدید ایران، از طریق فرم‌های تحلیل محتوا، مورد مقایسه قرار گرفت. برای تعیین روایی فرم‌های تحلیل محتوا، از نظرات پنج نفر از کارشناسان برنامه‌ریزی و تألیف کتب درسی استفاده شد. داده‌های جمع‌آوری شده در

جدول‌های مقایسه‌ای، ارائه و نتایج به شیوه کیفی، مورد تجزیه و تحلیل و نتیجه‌گیری قرار گرفت.

یافته‌های پژوهش

آموزش عمل جمع

کتاب ریاضی قدیم پایه اول ابتدایی ایران مراحل آموزش عمل جمع در این کتاب، به ترتیب در جدول شماره ۴ ارائه شده است. جمع در این کتاب تا عدد ۱۰، آموزش داده می‌شود.

در این کتاب، تعداد زیادی عبارات جبری (عبارات عددی ناقص) برای آموزش این عمل ارائه شده است و از دانش‌آموزان خواسته شده است که با توجه به تصاویر، این عبارات را کامل کنند.

کتاب ریاضی جدید پایه اول ابتدایی ایران

جدول شماره ۵، روش‌های آموزش جمع در این کتاب را نشان می‌دهد. در آموزش عمل جمع در این کتاب، از جدول ارزش مکانی استفاده نشده است و جمع اعداد بیشتر از ۱۰، با استفاده از چوب خط، آموزش داده می‌شود. آموزش جمع در این کتاب به صورت کلی تا عدد ۲۰ است و در مواردی با استفاده از چوب خط، جمع اعداد مضرب ۵ و اعدادی با چند واحد بیشتر از این مضرب‌ها مانند ۵۳، تا ۱۰۰ آموزش داده شده است.

نقطه قوت در آموزش جمع (و تفریق) در این کتاب، استفاده از انگشتان دست به عنوان بهترین و ساده‌ترین وسیله دست ورزی برای یادگیری این عمل است. البته به نظر می‌رسد، باید زمان ارائه و نحوه استفاده از این راهبرد در این کتاب مورد بررسی قرار گیرد تا بهترین نتیجه در استفاده از آن، به دست آید. «زیرا استفاده از دست ورزی‌ها، مستلزم تسلط کامل فراگیران بر مفهوم در جهان متجسم است» (Tall, ۲۰۰۳ cited in Nazari, ۲۰۱۱).

با توجه به این که استفاده از این دست ورزی، نیازمند توانایی افراد در استفاده از انگشتان دست است (یعنی فراگیری که به دلایل مختلف، از جمله ناتوانی جسمی، توانایی استفاده از انگشتان دست خود را نداشته باشد، نمی‌تواند از این روش استفاده کند) و همچنین به دلیل مشکلات ذاتی این روش همانند زمان بر بودن آن و محدود بودنش به اعداد کمتر از ۵ (Maleki, ۲۰۱۲)، به نظر

نکته جالب این است که در ارائه نیمه مجسم (استفاده از قرار دادن مکعب‌ها در کنار هم برای آموزش جمع)، نوار مستقیم تیره‌ای برای حرکت دادن مکعب‌ها در شکل قرار داده شده است تا این حرکت به صورت مستقیم در ذهن دانش‌آموزان صورت گیرد، چرا که بدون وجود این مسیر، لزومی برای حرکت مستقیم مکعب‌ها برای در کنار هم قرار گرفتن در ذهن دانش‌آموزان وجود ندارد.

این امر نشان‌دهنده این است که مؤلفان این کتاب سعی داشته‌اند تا با فکر کردن در مورد مواردی که ممکن است موجب بد فهمی دانش‌آموزان گردد و اصلاح آن موارد، راه‌های احتمالی موجود برای بروز آنها را از بین ببرند (شکل ص ۴۲ در جدول شماره ۶).

می‌رسد که از این روش بایستی به عنوان روشی مکمل و نه به عنوان روش اصلی انجام عمل جمع (و تفریق) در این کتاب استفاده شود.

کتاب ریاضی پایه اول ابتدایی کشور ژاپن

مراحل آموزش عمل جمع در این کتاب در جدول شماره ۶ ارائه شده است.

در ابتدای معرفی مستقیم مفهوم جمع در این کتاب، از مفهوم ترکیبی جمع به جای مفهوم افزایشی جمع، به صورت مجسم، نیمه مجسم و انتزاعی در قالب مسأله کلامی مصور استفاده شده است. بلافاصله نماد جمع معرفی شده است و از دانش‌آموزان کامل کردن و نوشتن عبارات جمعی متناظر خواسته شده است که در نوع خود بی‌نظیر است.

جدول ۴ - مراحل آموزش عمل جمع در کتاب قدیم ایران

ردیف	شرح مراحل آموزش
۱	ابتدا از کلمه "و" برای قرار دادن اشکال و اجسام در کنار هم استفاده می‌شود.
۲	سپس به جای کلمه "و"، از علامت "+" استفاده می‌شود و جمع اعداد را با کنار هم قرار دادن اشکال و اجسام و شمردن آنها آموزش می‌دهد (ص ۶۰).
۳	در این کتاب، برای به دست آوردن حاصل جمع، از راهبرد رنگ کردن یا رسم شکل استفاده شده است. همچنین از این روش برای مفهوم‌سازی خاصیت جابجایی جمع، نیز استفاده شده است (صص ۶۳ و ۶۸).
۴	در نهایت پس از پیشرفت دانش‌آموزان در این امر، بدون دادن شکل از آنها خواسته می‌شود تا حاصل جمع اعداد را به صورت کاملاً انتزاعی و با شمردن به دست آورند. همچنین آموزش جمع به صورت افقی و عمودی و نشان دادن تساوی حاصل جمع در هر دو نوع (افقی و عمودی)، در مورد دو عدد مورد نظر، آموزش داده می‌شود (ص ۷۲).

جدول ۵ - روش‌های آموزش جمع در کتاب ریاضی جدید پایه اول ابتدایی ایران

ردیف	نام روش	شرح تصویری روش
۱	استفاده از انگشتان دست	
۲	رسم چوب خط	
۳	رنگ کردن	
۴	محور اعداد	


جدول ۶ - مراحل آموزش عمل جمع در کتاب ژاپن

شرح مراحل آموزش	ردیف
 <p>(صص ۲۵ و ۳۳)</p>	<p>۱</p> <p>قبل از معرفی مفهوم جمع، مفهوم اجزایی (cardinal) و ترتیبی (ordinal) عدد معرفی می‌شود که این مفهوم، مقدمه‌ای برای مفهوم‌سازی عمل جمع است.</p>
<p>سپس از دانش‌آموزان خواسته می‌شود تا شمارش با فاصله ۲ تایی را انجام دهند.</p>	<p>۲</p>
 <p>(ص ۴۲)</p>	<p>۳</p> <p>در ابتدا در معرفی مستقیم مفهوم جمع، از مفهوم ترکیبی جمع به جای مفهوم افزایشی جمع، به صورت نشان دادن مجسم، نیمه مجسم و انتزاعی در قالب ارائه تصویری مسأله کلامی استفاده شده است.</p>
 <p>(ص ۴۴)</p>	<p>۴</p> <p>سپس مفهوم افزایشی (ارائه‌شده در جدول شماره ۲) عمل جمع معرفی می‌شود.</p>

شکل ۱ - طرح مسأله توسط دانش‌آموزان. ص ۵۱

داستانهای ریاضی بسازید.

داستان ریاضی برای $2+2=5$ بسازید.



۲ تا ماشین وجود دارد.

۲ تا ماشین دیگر هم، اضافه شد.

الان، در مجموع ۵ تا ماشین هست.

او، چه نوع داستانی ساخته است؟

هارو

$2 + 3 = 5$

روش ساختن ۱۰ در این کتاب استفاده می‌شود (شکل شماره ۲). در این کتاب جمع اعداد تا ۲۰، آموزش داده می‌شود.

کتاب ریاضی پایه اول ابتدایی آمریکا

جدول شماره ۷ و ۸ به ترتیب مراحل آموزش عمل جمع و روش‌های این کتاب برای جمع اعداد بین ۱۰ تا ۱۰۰ را نشان می‌دهد.

آموزش جمع در این کتاب تا عدد ۱۰۰ صورت می‌گیرد.

مفهوم‌سازی و معرفی نماد عمل تفریق

کتاب ریاضی قدیم پایه اول ابتدایی ایران

مراحل آموزش عمل تفریق در این کتاب، به ترتیب

شامل موارد زیر است (جدول شماره ۹):

موضوع مهم دیگر در این بخش، ارائه مسائل کلامی مصور در ابتدا و در مرحله بعد، مسائل نمادی جمع است. همچنین علاوه بر نوشتن و حل عبارات عددی مربوط به مسائل کلامی و نمادی جمع، کتاب فراتر از آن عمل کرده و از دانش‌آموزان می‌خواهد تا برای عبارات عددی جمعی، مسأله کلامی متناظر با آن طرح و بیان کنند که نشان‌دهنده توجه نسبی این کتاب در خصوص استفاده از طرح مسأله توسط دانش‌آموزان، است (شکل شماره ۱).

آموزش روش جمع کردن در این کتاب، ابتدا از طریق کنار هم قرار دادن اشیاء و شمردن تعداد کل آنها برای به دست آوردن حاصل جمع اعداد تا ۱۰ صورت می‌گیرد. برای آموزش جمع اعدادی که حاصلشان بیشتر از ده است، از

جدول ۷ - مراحل آموزش عمل جمع در کتاب آمریکا


ردیف	شرح مراحل آموزش
۱	در لوح آغازین مفهوم‌سازی عمل جمع در این کتاب، از دانش‌آموزان خواسته می‌شود تا برای تصویری که دربردارنده مفهوم ترکیبی جمع است، داستانی بسازند و آن را بیان کنند.
۲	سپس آموزش جمع در ابتدا با در کنار هم قرار دادن اعضای دو گروه و شمردن تعداد کل آنها برای به دست آوردن حاصل جمع، صورت می‌گیرد.
۳	پس از ارائه تعدادی فعالیت برای تثبیت این مفهوم، نماد جمع معرفی می‌شود.
۴	سپس آموزش تفریق هم به صورت افقی و هم عمودی و نشان دادن تساوی حاصل جمع دو عدد در هر دو نوع (افقی و عمودی) با مثال‌ها، صورت می‌گیرد. از این روش برای آموزش جمع تا ۱۰ استفاده می‌شود.
۵	در نهایت خاصیت جابه‌جایی جمع، با استفاده از مثال‌ها توسط اعداد و اشکال، به دانش‌آموزان آموزش داده می‌شود.

جدول ۸ - روش‌های آموزش جمع اعداد بزرگ‌تر از ۱۰، در کتاب ریاضی پایه اول ابتدایی آمریکا

ردیف	نام روش	شرح کلامی روش	شرح تصویری روش
۱	روش شمردن	در این روش برای جمع دو عدد، به اندازه عدد دوم، از عدد اول شروع به شمردن می‌کنیم و عددی که شمردن در آن تمام شود، حاصل جمع دو عدد است.	<p>(ص ۱۵۳)</p>
۲	محور اعداد (line number)	در این روش نقطه‌ای را که نشان‌دهنده عدد اول در جمع است را یافته و از آن نقطه، به اندازه عدد دوم روی محور به سمت جلو حرکت می‌کنیم. عدد متناظر با نقطه پایان این حرکت، حاصل جمع آن دو عدد است.	<p>(ص ۱۶۱)</p>
۳	قاعده دو برابرها (doubles fact)	در جمع دو عدد که باهم مساوی هستند، از این روش استفاده می‌شود.	
۴	روش دو برابرهای به اضافه یک (doubles plus ۱)	زمانی که یکی از دو عددی که باید باهم جمع شوند، یک واحد بیشتر از عدد دیگر باشد، از این روش استفاده می‌شود.	<p>(ص ۱۶۷)</p>
۵	روابط هم خانواده (fact families)	روابط جمع و تفریقی هستند که اعداد یکسانی در همه آنها به کاررفته است.	<p>(ص ۱۹۵)</p>
۶	روش ساختن ۱۰	به شکل شماره ۲ مراجعه کنید.	
۷	جدول ارزش مکانی	از این روش برای جمع کردن اعداد دو رقمی استفاده می‌شود.	<p>(ص ۴۳۹)</p>

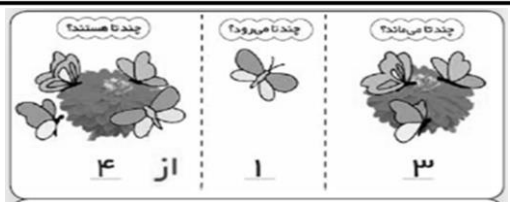
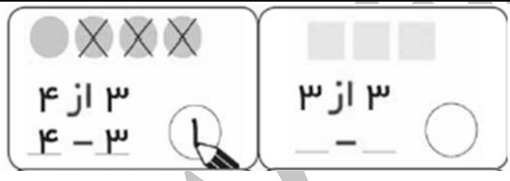
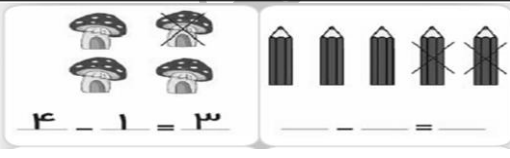
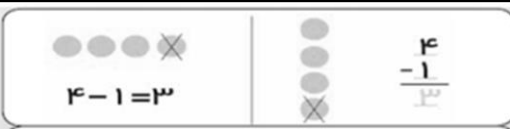
شکل ۲ - راهبرد ساختن ۱۰ برای جمع کردن اعداد بزرگ‌تر از ۱۰. ص ۹۶

چگونه $9+4$ را حساب کنیم.



۹ برای آنکه به ۱۰ تبدیل شود، به ۱ نیاز دارد.
 ۴ را به ۱ و ۳ تبدیل می‌کنیم.
 ۱ با ۹ جمع می‌شود و ۱۰ می‌شود.
 ۱۰ با ۳، ۱۳ می‌شود.

جدول ۹ - مراحل آموزش عمل تفریق در کتاب قدیم ایران

ردیف	شرح کلامی مراحل آموزش	شرح تصویری مراحل آموزش
۱	برای مفهوم‌سازی تفریق در این کتاب، از مفهوم کاهشی تفریق با استفاده از کلمه «از» در ابتدا استفاده شده است.	 <p>(ص ۷۸)</p>
۲	سپس نماد تفریق، ۲ صفحه بعد از شروع ارائه مفهوم تفریق، به جای کلمه «از» ارائه می‌شود.	 <p>(ص ۸۰)</p>
۳	برای به دست آوردن حاصل تفریق، از روش خط زدن استفاده می‌شود.	 <p>(ص ۸۱)</p>
۴	آموزش تفریق در این کتاب به صورت عمودی نیز به دانش‌آموزان آموزش داده می‌شود و با مثال‌ها، به دانش‌آموزان نشان داده می‌شود که حاصل تفریق دو عدد، چه به صورت افقی و چه به صورت عمودی، عدد یکسانی هست.	 <p>(ص ۸۷)</p>

آنجایی که جنبه طبیعی‌تری از تفریق نسبت به جنبه مقایسه‌ای آن است (Selter et al., ۲۰۱۲)، کمک بیشتری به مفهوم‌سازی مناسب این عمل می‌کند. نکته بسیار تأمل‌برانگیز در این کتاب، این است که تعداد کل مواردی که از دانش‌آموزان خواسته می‌شود تا عبارات جبری مربوط به تفریق را کامل کنند، ۹ مورد است که این با توجه به نتایج تحقیقات در این زمینه نسبت به سه کتاب دیگر بسیار کم است. همچنین در این کتاب، اصلاً از راهبرد تفریق غیرمستقیم یا تفریق توسط جمع، استفاده نشده است. با اینکه مسائل نمادی تفریق در این کتاب، جنبه مقایسه‌ای تفریق را بیشتر ارائه می‌کنند، تمامی مسائل کلامی این کتاب، مفهوم کاهشی تفریق را ارائه می‌کنند. همچنین تمامی مسائل کلامی بعد از مسائل نمادی و در انتهای کتاب، ارائه شده‌اند. این اختلاف موجود در ارائه جنبه‌های مختلف تفریق (کاهشی و مقایسه‌ای) توسط مسائل نمادی و کلامی و همچنین زمان ارائه مسائل کلامی در این کتاب، اگر نگوییم که موجب سردرگمی فراگیران و عدم توانایی آنان در حل مسائل کلامی می‌گردد، لااقل می‌تواند موجب آن شود که توانایی‌های فراگیران در حل مسائل کلامی که جنبه مقایسه‌ای تفریق را ارائه می‌کنند، رشد کمتری یابد.

جدول شماره ۱۱ روش‌های آموزش تفریق در کتاب جدید پایه اول ابتدایی ایران را ارائه می‌کند.

در این کتاب، در تمامی موارد، تنها مفهوم کاهشی تفریق ارائه شده است و در هیچ جای کتاب، مفهوم مقایسه‌ای تفریق ارائه نشده است. همچنین در تمامی مسائل، از راهبرد تفریق مستقیم برای به دست آوردن حاصل تفریق استفاده شده است که این می‌تواند خیلی یک جنبه گرایانه باشد (Usiskin & Bell, ۱۹۸۳ cited in Selter et al., ۲۰۱۲). چنین ارائه یک جنبه گرایانه‌ای از تفریق، می‌تواند موجب آن شود که دانش‌آموزان در انتخاب راهبردها برای حل مسائل تفریق، راه‌گزینی منعطف نداشته باشند و نتوانند راهبرد مناسب را بر اساس ویژگی‌های اعداد ارائه شده در هر مسأله، انتخاب کنند. همچنین آموزش عمل تفریق در این کتاب، پس از اتمام آموزش مفهوم عمل جمع است که این نشان‌دهنده ارائه جمع و تفریق به عنوان دو عمل جدا از هم است. در این کتاب، آموزش مفهوم تفریق اعداد کامل تا عدد ۱۰ صورت می‌گیرد.

کتاب ریاضی جدید پایه اول ابتدایی ایران

جدول شماره ۱۰، مراحل آموزش عمل تفریق در این کتاب را به ترتیب بیان می‌کند.

به نظر می‌رسد در این کتاب فرآیند مفهوم‌سازی تا معرفی نماد، نسبتاً طولانی است که این امر می‌تواند فرصت‌های زیادی را در اختیار فراگیران برای درک عمیق این مفاهیم قرار دهد. با این حال اگر برای معرفی مفهوم تفریق در ابتدا از مفهوم کاهشی تفریق استفاده می‌شد، از

جدول ۱۰ - مراحل آموزش عمل تفریق در کتاب جدید ایران

ردیف	شرح کلامی مراحل آموزش
۱	آموزش مفهوم تفریق در این کتاب برای اولین بار، با استفاده از مفهوم مقایسه‌ای (اختلافی) تفریق، به وسیله انگشتان دست، صورت می‌گیرد (ص ۲۵).
۲	این مفهوم در صفحه ۳۱ به همراه عمل جمع (صفحه ۳۰) ارائه می‌شود که این نوع ارائه، نشان‌دهنده اهمیت مؤلفین این کتاب در راستای عینیت بخشی به خاصیت معکوس بین دو عمل جمع و تفریق، است (ص ۳۱).
۳	پس از مفهوم‌سازی جنبه مقایسه‌ای عمل تفریق و انجام دادن آن به وسیله اعمال حرکتی (با استفاده از انگشتان دست)، این امر به صورت ترسیمی (رسم چوب خط) انجام می‌شود (ص ۳۳).
۴	سپس مفهوم حاصل تفریق به عنوان مقدار تفاضل و مقدار کاهشی ارائه می‌گردد (ص ۴۴).
۵	این مفهوم در صفحات بعد، به همراه اینکه از دانش‌آموزان خواسته می‌شود تا داستانی نیز برای این مفاهیم ارائه کنند، ارائه شده است (ص ۵۱).
۶	در معرفی نماد تفریق، از مفهوم مقایسه‌ای تفریق استفاده می‌شود (ص ۹۳).
۷	از دانش‌آموزان خواسته می‌شود تا عبارات عددی مربوط به تفریق را کامل کنند (ص ۱۱۶).

تفریق در این کتاب، استفاده از سه نوع ارائه مجسم، نیمه مجسم و انتزاعی (عبارات عددی) و انتقال مرحله‌ای فراگیران از مرحله‌ای به مرحله بالاتر (یعنی از مجسم به نیمه مجسم - از نیمه مجسم به انتزاع) است که نسبت به سه کتاب دیگر، بسیار مناسب‌تر عمل شده است.

کتاب ریاضی پایه اول ابتدایی آمریکا

جدول شماره ۱۲ مراحل آموزش تفریق در کتاب پایه اول ابتدایی آمریکا را نشان می‌دهد. در این کتاب مسائل کلامی مربوط به تفریق، شامل سه نوع: ۱- کاهشی ۲- جزء مجهول ۳- مقایسه‌ای (جدول شماره ۲) است که با توجه به استفاده از راهبردهای غیرمستقیم تفریق به همراه راهبردهای مستقیم، می‌تواند در توسعه مفهوم تفریق و استفاده منعطف دانش‌آموزان از راهبردهای مختلف تفریق، کمک شایانی کند. بیشتر مسائل کلامی این کتاب، از نوع کاهشی است. آموزش تفریق در این کتاب تا عدد ۱۰۰ است. در جدول شماره ۱۳، راهبردهای مورد استفاده در این کتاب برای آموزش تفریق آمده است.

کتاب ریاضی پایه اول ابتدایی کشور ژاپن

در این کتاب، عنوان اولین درسی که مربوط به مفهوم تفریق است، «باقیمانده‌اش چند تا، اختلافش چند تا؟» است که نشان‌دهنده اراده مؤلفان کتاب در ارائه هر دو جنبه از مفهوم تفریق است. در شروع درس، مفهوم تفریق با جنبه کاهشی آن در قالب یک مسأله تصویری، ارائه می‌شود (شکل شماره ۳).

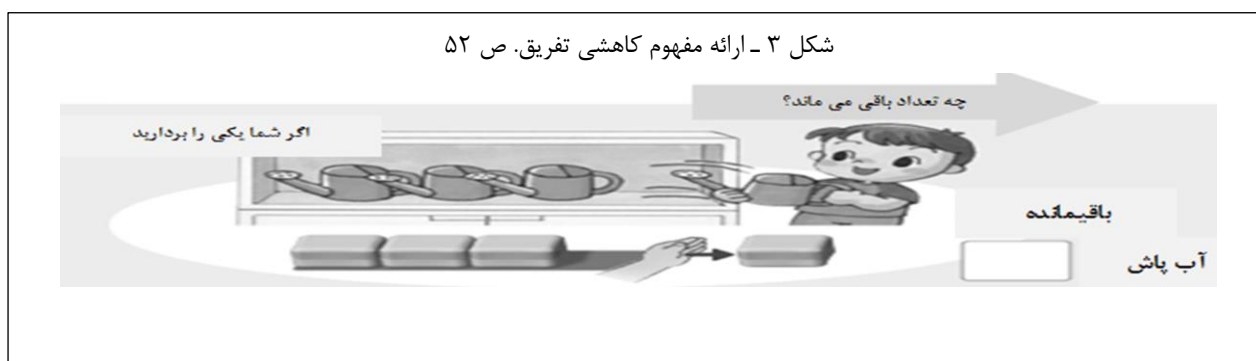
سپس نماد تفریق معرفی می‌شود و دانش‌آموزان برای کامل کردن و نوشتن عبارات جبری متناظر با تفریق، راهنمایی می‌شوند. پس از معرفی جنبه کاهشی تفریق، جنبه مقایسه‌ای آن ارائه می‌شود. بعد از آن، کامل کردن و نوشتن عبارات جبری متناظر با تفریق خواسته می‌شود (شکل شماره ۴).

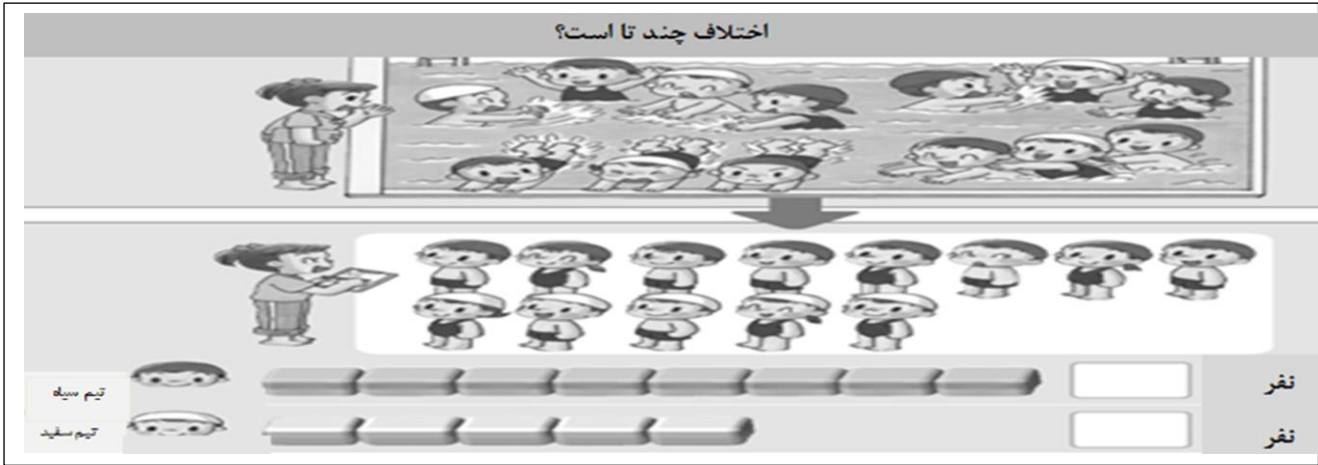
در این کتاب از روش برداشتن و حذف کردن برای محاسبه جنبه کاهشی تفریق و از روش برقراری تناظر یک به یک برای محاسبه جنبه مقایسه‌ای تفریق استفاده شده است. نکته حائز اهمیت در تمامی مراحل مفهوم‌سازی عمل

جدول ۱۱ - روش‌های آموزش تفریق در کتاب ریاضی جدید پایه اول ابتدایی ایران

ردیف	نام روش	شرح روش
۱	انتقال (استفاده از انگشتان دست)	برای تفریق اعداد کوچک‌تر از ۵ به وسیله انگشتان دست، به این صورت عمل می‌شود که، تعداد اعضای مجموعه بزرگ‌تر توسط انگشتان یک دست، با باز کردن آنها نشان داده می‌شود، سپس به تعداد اعضای مجموعه کوچک‌تر یا عددی که باید تفریق شود، انگشتان باز دست، بسته می‌شود و تعداد انگشتان بازمانده دست، نشان‌دهنده حاصل تفریق است (ص ۹۳).
۲	روش حذف	خط زدن اشکال به تعداد عددی که باید کم شود و شمردن اشکال خط نخورده برای یافتن حاصل تفریق (ص ۹۶).
۳	محور اعداد	حرکت رو به عقب به تعداد واحد عدد کم شونده از عدد بزرگ‌تر برای رسیدن به نقطه پایانی حرکت بر روی محور، که حاصل تفریق است (ص ۱۱۹).

شکل ۳ - ارائه مفهوم کاهشی تفریق. ص ۵۲





جدول ۱۲ - مراحل آموزش تفریق در کتاب ریاضی پایه اول ابتدایی آمریکا

ردیف	شرح مراحل آموزش
۱	<p>لوح آغازین معرفی مفهوم عمل تفریق در این کتاب، با مسأله‌ای کلامی که مربوط به مفهوم کاهشی تفریق است، آغاز می‌شود.</p> <p>(ص ۸۳)</p>
۲	<p>سپس در بخش داستان‌های تفریق، از دانش‌آموزان خواسته می‌شود تا از راهبرد رسم شکل برای به دست آوردن پاسخ مسائل کلامی، استفاده کنند. همچنین از دانش‌آموزان خواسته می‌شود تا داستان عددی برای هم کلاسی‌هایشان بیان کنند.</p>
۳	<p>از دانش‌آموزان خواسته می‌شود تا تفاوت‌های بین داستانهای جمع و تفریق را بیان کنند.</p>
۴	<p>در مرحله بعد، مفهوم جزء، جزء - کل و به دست آوردن یک جزء از دو جزء تشکیل دهنده یک کل مشخص (مفهوم کاردینالیته عدد)، برای مفهوم - سازی تفریق ارائه می‌گردد.</p> <p>(ص ۸۹)</p>
۵	<p>برای به دست آوردن حاصل تفریق، از راهبرد تفریق به وسیله جمع استفاده می‌شود.</p>
۶	<p>پس از این مراحل، نماد تفریق معرفی می‌گردد که بلافاصله فراگیران برای کامل کردن و نوشتن عبارات جبری متناظر با تفریق، هدایت می‌شوند.</p> <p>(ص ۹۱)</p>
۷	<p>در مرحله بعد، تفریق را هم به صورت افقی و هم عمودی از دو طریق نیمه مجسم و انتزاعی با روش خط زدن به تعدادی که باید کم شود، به منظور نشان دادن تساوی حاصل تفریق در هر دو روش افقی و عمودی، آموزش می‌دهد.</p> <p>(ص ۱۱۱)</p>

جدول ۱۳ - روش‌های آموزش تفریق اعداد در کتاب ریاضی پایه اول ابتدایی آمریکا

ردیف	نام روش	شرح کلامی روش	شرح تصویری روش
۱	شمارش رو به عقب (count back)	در این روش از عدد بزرگ‌تر شروع می‌کنیم و به اندازه عددی که باید از آن کم شود، معکوس (رو به عقب) می‌شماریم و عدد پایانی این شمارش، حاصل تفریق است.	<p>۶ - ۲ = ۴</p> <p>۶, ۵, ۴</p> <p>(ص ۱۸۱)</p>
۲	محور اعداد و حرکت رو به عقب	در این روش، نقطه متناظر با عدد بزرگ‌تر را بر روی محور یافته و از آن نقطه به اندازه عدد کم شونده، رو به عقب بر روی محور حرکت می‌کنیم. عدد متناظر با نقطه اتمام این حرکت بر روی محور، حاصل تفریق است.	<p>۹ - ۳ = ۶</p> <p>(ص ۱۸۵)</p>
۳	استفاده از دو برابرها (use doubles)	برای تفریق اعدادی که یکی از آنها دو برابر دیگری است، از این روش استفاده می‌شود.	<p>۶ + ۶ = ۱۲ ۱۲ - ۶ = ۶</p> <p>(ص ۳۱۵)</p>
۴	جمع و تفریق‌های مرتبط به هم (related addition and subtraction)	جمع و تفریق‌های وابسته به هم، جمع و تفریق‌هایی می‌باشند که اعداد بکار رفته در آنها، اعداد یکسانی هستند. برای به دست آوردن حاصل تفریق این اعداد، می‌توانیم از قاعده جمعی مرتبط با آن استفاده کنیم.	<p>(ص ۱۹۳)</p>
۵	روابط هم خانواده	در جدول شماره ۸ توضیح داده شده است.	در جدول ۸ توضیح داده شده است.
۶	جدول ارزش مکانی	برای تفریق اعداد دو رقمی که رقم یکان آنها، نیازی به قرض گرفتن از رقم دهگان ندارند، از این روش استفاده می‌شود.	<p>(ص ۴۵۳)</p>

پاسخ به سؤالات تحقیق:

عمل است و بیشتر از دانش رویه‌ای، تأکید بر دانش مفهومی دارد.

در عوض اهداف برنامه درسی آمریکا در آموزش این دو عمل، بیشترین تأکید خود را بر دانش رویه‌ای و بسط راهبردهای آموزش این دو عمل دارند. اهداف برنامه درسی کشور ژاپن، بیشترین تأکید خود را بر نقش محوری دانش‌آموزان در کشف و دستیابی به مفهوم صحیح این دو

۱- عمل جمع و تفریق، از منظر محتوا و فرآیند در اهداف برنامه درسی ریاضی پایه‌ی اول ابتدایی سه کشور ایران، ژاپن و آمریکا چگونه است؟

بررسی اهداف برنامه درسی سه کشور مذکور در آموزش جمع و تفریق، مشخص کرد که بیشترین تمرکز اهداف برنامه درسی ایران بر مفهوم‌سازی مناسب این دو

جدول ۱۴ - جدول سطح محتوایی، سطح رویه‌ای (تعداد روش)، نحوه شروع و فرآیند آموزش دو عمل جمع و تفریق در کتب درسی سه کشور

ردیف	کشور	عمل	سطح محتوایی	تعداد روش	شروع آموزش	فرآیند آموزش
۱	ایران (کتاب جدید)	جمع	تا عدد ۱۰۰	۴ روش	جنبه افزایشی	افزایشی و ترکیبی
		تفریق	تا عدد ۲۰	۴ روش	جنبه مقایسه‌ای	کاهشی و مقایسه‌ای
۲	ایران (کتاب قدیم)	جمع	تا عدد ۱۰	۲ روش	جنبه ترکیبی	افزایشی و ترکیبی
		تفریق	تا عدد ۱۰	۲ روش	جنبه کاهشی	کاهشی
۳	ژاپن	جمع	تا عدد ۲۰	۲ روش	جنبه ترکیبی	افزایشی و ترکیبی
		تفریق	تا عدد ۲۰	۲ روش	جنبه کاهشی	کاهشی و مقایسه‌ای
۴	آمریکا	جمع	تا عدد ۱۰۰	۸ روش	جنبه ترکیبی	افزایشی و ترکیبی
		تفریق	تا عدد ۱۰۰	۶ روش	جنبه کاهشی	کاهشی، جزء مجهول و مقایسه‌ای

کتاب ریاضی پایه اول ابتدایی

رویه‌ای، کتاب قدیم ایران به همراه کتاب ژاپن، شامل کمترین سطح آموزش هستند (جدول شماره ۱۴).

همچنین جدول شماره ۱۴ نشان می‌دهد که شروع آموزش عمل جمع و تفریق در کتاب جدید ایران نسبت به سه کتاب دیگر متفاوت است و نیاز به اصلاح دارد. چرا که در آموزش عمل جمع در این کتاب، از جنبه افزایشی آن استفاده شده است که به نظر می‌رسد اگر با معرفی جنبه ترکیبی آن، همانند سه کتاب دیگر، صورت می‌گرفت، طبیعی‌تر و مناسب‌تر بود. شروع آموزش تفریق در این کتاب نیز با معرفی جنبه مقایسه‌ای آن است، در صورتی که ارائه جنبه کاهشی آن برای معرفی این مفهوم، مناسب‌تر بود.

نتایج بررسی‌ها نشان داد که تأکید بر استفاده از «عبارات ریاضی (math sentences)» مبنای اصلی آموزش این مفاهیم در کتاب ریاضی ژاپن است. معادل نسبی اصطلاح «عبارت ریاضی» در زبان ژاپنی، «شیکی (shiki)» است. البته شیکی مفهومی فراتر از عبارت ریاضی است، چرا که شیکی شامل تمامی عبارات همانند $3+5$ ، $x-4$ ، $3 \div 3$ ، یا معادلاتی از قبیل $3+5=8$ ، $x-4=7$ ، $3 \div 7=3$ و همچنین نا معادلاتی مانند $x+5 > 2$ است.

نوشتن و تفسیر شیکی، یکی از حوزه‌های محتوایی ریاضی در تمامی پایه‌های ابتدایی و مقاطع پایین دبیرستان در این کشور است. برنامه درسی ژاپن از شیکی به عنوان وسیله‌ای مهم برای ارائه پدیده‌ها و روابط به منظور توسعه و تسهیل تفکر ریاضی و برقراری ارتباط بین فرآیندهای اثبات

عمل و همچنین روش‌های محاسبه‌ای مربوط به این دو عمل، طی فعالیت خود دانش‌آموزان دارد.

این بررسی‌ها نشان دادند که اهداف برنامه درسی دو کشور ایران و ژاپن، بیشترین تأکید خود را بر آموزش جمع و تفریق تا عدد ۱۰ دارند، در صورتی که این تأکید در اهداف برنامه درسی آمریکا، تا عدد ۲۰ است. البته در اهداف برنامه درسی این کشورها، به آشنایی فراگیران با جمع و تفریق اعداد بزرگ‌تر از ۱۰، نیز اشاره شده است. یکی از نقاط مثبت موجود در اهداف برنامه درسی ایران، این است که در آن، اشاره مستقیمی به انجام جمع و تفریق به صورت ذهنی شده است درحالی‌که چنین هدفی در برنامه درسی دو کشور ژاپن و آمریکا، بیان نشده است. نکته دیگر، این است که از بین اهداف این سه کشور، تنها اهداف برنامه درسی کشور آمریکا، اشاره مستقیمی به استفاده از عبارات جبری (کار کردن با تساوی‌های جمع و تفریق) داشته است.

۲- آموزش عمل جمع و تفریق، در محتوای کتب درسی ریاضی پایه اول ابتدایی سه کشور ایران، ژاپن و آمریکا چگونه صورت می‌گیرد؟

در بررسی نحوه آموزش دو عمل مذکور در کتب درسی سه کشور مذکور، مشخص گردید که کتاب درسی آمریکا، هم از نظر دانش محتوایی و هم از نظر دانش رویه‌ای، شامل بیش‌ترین سطح آموزش نسبت به سه کتاب دیگر است. در مقابل در دانش محتوایی، کتاب قدیم ایران و در دانش

در این بین، کتاب ژاپن دارای نقاط قوتی نسبت به سه کتاب دیگر است. از مهم‌ترین نقاط قوت موجود در این کتاب می‌توان به این موارد اشاره کرد: ۱- تأکید بر نقش دانش‌آموزان در دستیابی به مفاهیم هم در اهداف و هم در محتوای این کتاب ۲- استفاده از استاندارد حل مسئله و همچنین طرح مسئله توسط دانش‌آموزان جهت درک مفاهیم توسط خود آنها و نه به عنوان محتوایی جدا و موضوعی برتر ۳- ارائه تمامی مسائل کلامی به صورت مصور و عدم استفاده از عبارات کلامی به تنهایی در بیان مسائل به دلیل مشکلات طبیعی دانش‌آموزان در این پایه در مهارت‌های درک متنی ۴- استفاده از ارائه و تفسیر عبارات عددی به عنوان اصلی‌ترین ویژگی دروس ریاضیات ژاپن، به طوری که این کتاب به محض آشنایی بچه‌ها با عمل جمع، بر نوشتن عبارات ریاضی تأکید دارد (Watanabe, ۲۰۱۱) ۵- استفاده از ارائه مجسم (تصاویر واقعی اجسام)، نیمه مجسم و انتزاعی مفاهیم و انتقال به موقع فراگیران از مرحله‌ای به مرحله بالاتر ۶- استفاده از تصاویر مجازی مناسب و تصاویر واقعی طبیعی برای ارائه مطالب ۷- در نظر گرفتن جنبه‌های ترکیبی و افزایشی عمل جمع و جنبه‌های کاهش‌ی و تفاضلی عمل تفریق و استفاده از روش‌های مناسب جهت درک رابطه معکوس بین جمع و تفریق توسط دانش‌آموزان.

بحث و نتیجه‌گیری

هدف از انجام این تحقیق، بررسی فرآیند آموزش دو عمل جمع و تفریق در اهداف برنامه و محتوای کتب درسی ریاضی پایه اول ابتدایی سه کشور ایران، ژاپن و آمریکا، به منظور ارائه پیشنهادهای جهت بهبود نحوه آموزش این دو عمل در محتوای کتاب‌های درسی کشورمان بود. بررسی‌ها در این مطالعه، نشان دادند که، اهداف برنامه درسی سه کشور در آموزش این دو عمل، تا حدود زیادی مشابه هم است و تفاوت اصلی اهداف، در هدف‌گذاری نهایی این برنامه‌های درسی است، به طوری که اهداف برنامه درسی ایران بر یادگیری صحیح و انجام درست این دو عمل در مسائل مختلف، تأکید دارد. اهداف برنامه درسی آمریکا، بیش‌ترین تأکید خود را بر حل صحیح مسائل (کلامی و نمادی)، با استفاده از راهبردهای مختلف دارد و اهداف

استفاده می‌کند. همچنین این کشور از شیکی به عنوان ابزاری برای آنکه دانش‌آموزان نحوه تفکر خود را در مسائل مختلف، در قالب آن بیان کنند، استفاده می‌کند (Watanabe, ۲۰۱۱).

در آموزش دو عمل جمع و تفریق در کتاب جدید ایران نسبت به کتاب قدیم، تغییرات بسیاری دیده می‌شود، البته برخی از این تغییرات ایراداتی نیز دارند که در ادامه تعدادی از این تغییرات به همراه ایرادات وارد بر آن بیان می‌شود: ۱- میزان استفاده از استاندارد حل مسئله و اتصال (برای مطالعه بیشتر در این خصوص، به اصول و استانداردهای ریاضی مدرسه‌ای منتشرشده توسط NCTM (National Council of Teachers of Mathematics, ۲۰۰۰) مراجعه شود) در ارائه مطالب افزایش داشته است (Izadi, ۲۰۱۲) که این افزایش در استاندارد اتصال به نظر می‌رسد مناسب باشد، ولی در استاندارد حل مسئله، با وجود افزایش در استفاده از این استاندارد، نحوه و میزان استفاده مناسب ناست و بایستی از این راهبرد به عنوان وسیله‌ای برای انتقال مفاهیم استفاده شود و نه به عنوان موضوعی جدا و در انتهای کتاب. ۲- میزان ارائه تصاویر واقعی طبیعی در این کتاب نسبت به کتاب قبلی افزایش داشته است ولی هنوز تعداد این تصاویر در حد قابل قبول نیست، چرا که نسبت کل تصاویر واقعی طبیعی در این کتاب نسبت به سایر تصاویر (مجازی و واقعی غیرطبیعی) ۹۶٪ درصد و تعداد کل آنها، ۵ عدد در تمام محتوای کتاب است (Izadi, ۲۰۱۲). ۳- در این کتاب سعی شده است تا از جنبه‌های مختلف آموزشی اعم از دست ورزیها، مهارت‌های ترسیمی، محور اعداد و ... جهت ارائه این دو مفهوم استفاده شود که نحوه و زمان استفاده از این جنبه‌ها در برخی موارد مناسب ناست (بخش ۲-۱-۴ مقاله را ببینید). ۴- همچنین در این کتاب سعی شده است تا ابعاد گوناگون دو عمل جمع و تفریق (افزایشی، ترکیبی، کاهش‌ی و مقایسه‌ای) مورد توجه قرار گیرد و به آنها پرداخته شود که ایرادتی بر این امر نیز وارد است، به عنوان مثال بهتر بود که شروع آموزش تفریق با جنبه کاهش‌ی آن باشد و یا در مسائل کلامی و نمادی این کتاب، همه جنبه‌های این دو عمل همزمان و به یک میزان لحاظ شود.

برنامه درسی ژاپن، بر نقش محوری دانش‌آموزان در فرآیند درک مفاهیم و کسب مهارت‌های مربوط به دو عمل جمع و تفریق، تأکید دارد. به نظر می‌رسد که محتوای کتاب درسی جدید ایران همانند کتاب درسی آمریکا، با وجود تمرکز اهداف برنامه درسی این کشور بر مفهوم‌سازی مناسب، بیشتر بر توسعه دانش رویه‌ای در دانش‌آموزان تأکید دارد. همچنین سطح محتوایی ارائه‌شده در این کتاب فراتر از سطح پیش‌بینی‌شده در اهداف برنامه درسی است. این تضادهای موجود بین اهداف برنامه درسی و محتوای کتاب درسی ایران نیاز به اصلاح دارد. همچنین محتوای کتب درسی هر سه کشور، بیش‌ترین تأکید خود را بر آموزش نوشتار استاندارد، با تفاوت‌هایی در ارائه محدوده راهبردها (الگوریتم‌ها)، دارند. البته این تفاوت رویکردی و محتوایی می‌تواند متأثر از ساختار سیستم آموزشی پیش‌دبستانی این کشورها باشد (Erdogan, 2010).

نتایج به دست آمده از این تحقیق، با نتایج تحقیقات ترفرس (Treffers, 1987) و ورچافل و همکاران (1996) یکسان بود که نشان‌دهنده تأکید محتوای کتب درسی بیشتر کشورها بر توسعه نوشتار استاندارد، است. همچنین نتایج به دست آمده از تحلیل کتب درسی کشور آمریکا، با نتایج تحقیق فن و ژو (Fan & zhu, 2007)، در مورد اینکه کتاب‌های آمریکا، تأکید بیشتری بر دانش رویه‌ای و همچنین حل مسأله به عنوان موضوعی برتر و جدا، دارند، مطابقت داشت. از طرفی، نتایج این مطالعه با این مطلب که، تأکید بر نوشتن و تفسیر عبارات ریاضی، ویژگی منحصربه‌فرد برنامه درسی و محتوای کتب درسی ژاپن است (Watanabe, 2011)، نیز مطابقت داشت. لازم به ذکر است که با توجه به اینکه هیچ تحقیقی تا کنون در داخل کشور در خصوص نحوه آموزش دو عمل جمع و تفریق، صورت نگرفته است، لذا نمی‌توان نتایج بدست آمده از این مطالعه را با آنها مورد مقایسه قرار داد.

با توجه به نتایج این تحقیق و همچنین نتایج مطالعات مختلف انجام‌شده که در قسمت مبانی نظری این مقاله بیان شد، می‌توان پیشنهادات ذیل را جهت بهبود فرآیند آموزش دو عمل جمع و تفریق در محتوای برنامه درسی کشورمان، به دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتب درسی وزارت آموزش و

پرورش و همچنین برنامه‌ریزان و مؤلفان کتب درسی ریاضی مقطع ابتدایی، ارائه کرد: ۱- تأکید ویژه بر نقش دانش‌آموزان در فرآیند یادگیری و دانش‌آموز محور بودن این فرآیند در یادگیری این دو عمل، ۲- ایجاد درک عمیق از مفاهیم مختلف اعداد (اجزایی و ترتیبی) در دانش‌آموزان با استفاده از بازی‌های ریاضی تجزیه اعداد یا ساختن ۱۰، ۳- استفاده از هر سه روش نوشتار استاندارد، نوشتار غیررسمی و محاسبه ذهنی، به‌طور متعادل در محتوای کتب درسی و توسعه هماهنگ قابلیت‌های دانش‌آموزان در هر سه روش، ۴- شروع آموزش عمل جمع با ارائه مفهوم ترکیبی آن و شروع آموزش عمل تفریق با ارائه جنبه کاهشی آن و ارائه تمامی جنبه‌های این دو عمل (جدول شماره ۲) در محتوای کتب درسی، ۵- استفاده از عبارات عددی ناقص (عبارت جبری) و عبارات جمعی جبران‌کننده برای هر تفریق به منظور ایجاد درک عمیق از روابط معکوس بین جمع و تفریق در دانش‌آموزان، ۶- استفاده مناسب از تصاویر و تصاویر مناسب به منظور انتقال بهتر مفاهیم و ۷- با توجه به این که کودکان از مهارت‌های زبانی کافی برخوردار نیستند و موفق به بازیابی اطلاعاتی که به‌طور صریح در مسائل کلامی بیان‌شده، نمی‌شوند (Verzosa et al., 2012)، به نظر می‌رسد آموزش مسائل کلامی به‌صورت متداول، در دوره ابتدایی، به‌خصوص در پایه اول ابتدایی، با شکست مواجه می‌شود. بنابراین بهترین روش برای توسعه مهارت حل مسأله کودکان در زمینه جمع و تفریق، استفاده از شیوه طرح مسأله متناظر با هر عبارت عددی جمع و تفریق توسط خود کودکان، است. از آنجایی که استفاده از تصاویر به‌عنوان یکی از مهم‌ترین ابزارهای تصویرسازی ذهنی، تأثیر معناداری بر پیشرفت دانش‌آموزان در حل مسائل کلامی ریاضی دارد (Salimi, Sadi, 2014)، به همین دلیل ارائه تصویری مسائل، بهترین شیوه برای ارائه مسائل کلامی در این پایه هست، همان‌طور که در کتاب درسی ژاپن، تمامی مسائل کلامی به همراه ارائه تصویری آنان است و در هیچ موردی، ارائه کلامی مسائل به تنهایی صورت نگرفته است. انجام این مطالعه، با محدودیت‌هایی همراه بود که از مهم‌ترین آنها می‌توان به ۱- در دسترس نبودن سری‌های

Look at China, Singapore, and US mathematics textbooks. *Educ Stud Math*, ۶۶, ۶۱-۷۵. doi: ۱۰.۱۰۰۷/s۱۰۶۴۹-۰۰۶-۹۰۶۹-۶

Fujii, T., & Iitaka, S. (۲۰۱۲). *Mathematics International Grade ۱*. Tokyo: Tokyo shoseki.

Gooya, Z. (۲۰۰۶). The process of change the content of the school mathematics curriculum. *Roshd Mathematics Education Journal*, ۱۲(۴۶), ۸-۱۲. Teaching-Aids Publications Office, Organization of Research & Educational Planning, Ministry of Education [Persian.]

International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA) (۲۰۱۱). *TIMSS & PIRLS*. Retrieved July ۷, ۲۰۱۲, from <http://timss.bc.edu>

Izadi, M. (۲۰۱۲). *A Comparative Content Analysis of the First-Grade Math Curriculum Goals and Content of the Book 'Iran, Japan and America (State of California) (Unpublished master's thesis)*. Islamic Azad University Fars Science and Research Branch, Shiraz, Iran.

Karimi, A. (۲۰۰۹). *The main findings of the TIMSS and PIRLS studies Persian date Farvardin ۱۳۸۸*. Tehran: Research Institute for Education.

Kiamanesh, A. (۲۰۰۵). *The Role of Students' Characteristics and Family Background in Iranian Students' Mathematics Achievement*. Prospects, ۳۵(۲), ۱۶۱-۱۷۴.

Maleki, JH. (۲۰۱۲). *Describe the processes of learning numbers by students with focusing on new book of first grade math (Unpublished master's thesis)*. Shahid Beheshti University, Tehran, Iran.

Nazari, k. (۲۰۱۱). *Checking impact of visualization activities- centered on nurturing spatial abilities and understanding the concept of limit of third year of secondary of the female students (Unpublished master's thesis)*. Shahid Rajaei University, Tehran, Iran.

Peters, G., De Smedt, B., Torbeyns, J., Ghesquière, P., & Verschaffel, L. (۲۰۱۲). Children's use of subtraction by addition on large single-digit subtractions. *Educ Stud Math*, ۷۹(۳), ۳۳۵-۳۴۹. doi: ۱۰.۱۰۰۷/s۱۰۶۴۹-۰۱۱-۹۳۰۸-۳

مختلف کتب ریاضی منتشرشده در دو کشور ژاپن و آمریکا،
۲- عدم وجود پیشینه مناسب در خصوص این تحقیق و ۳-
وجود تفاوت‌هایی در نظام آموزشی سه کشور مورد مطالعه،
اشاره کرد. در پایان با توجه به گستردگی و اهمیت موضوع،
برخی پیشنهادها برای مطالعات بعدی می‌تواند شامل
مواردی از قبیل ۱- بررسی مقایسه‌ای فرآیند آموزش مفهوم
عدد به‌عنوان مبنای آموزش دو عمل جمع و تفریق، بین
برنامه درسی کشورهای پیشرفته در آموزش ریاضی و
کشورمان، ۲- بررسی فرآیند آموزش دو عمل جمع و تفریق
در سه پایه اول مقطع ابتدایی در برنامه درسی کشورهای
مختلف به‌منظور دستیابی به روش‌های مناسب آموزش این
اعمال و ۳- بررسی تأثیر روش‌های مختلف آموزش این دو
عمل بر میزان یادگیری دانش‌آموزان و استفاده منعطف آنها
از راهبردهای مختلف، باشد.

منابع

Abedi, M.R. (۲۰۰۴). *Creativity*. Tehran: Jami publication .

Alamian, V. (۲۰۱۱). *Guide to first-grade math reprogram. first-grade Mathematics*. Retrieved April ۳, ۲۰۱۲, from <http://saheleriyaziyat.com>

California Department of Education. (۲۰۱۰). *K-۱۲ California's Common Core Content Standards for Mathematics. Curriculum & Instruction*. Retrieved July ۷, ۲۰۱۲ from <http://www.cde.ca.gov>.

Carpenter, T. P., & Moser, J. M. (۱۹۸۴). The acquisition of addition and subtraction concepts in grades one through three. *Journal for Research in Mathematics Education*, ۱۵, ۱۷۹-۲۰۲.

Davoodi, KH., Rastgar, A., & Alamian, V. (۲۰۱۱). *Grade ۱ Math- ۲, volume ۱*. Iran: General Department printing and distribution of textbooks.

Erdoğan, E. Ö. (۲۰۱۰). A comparison of curricula related to the teaching of addition and subtraction concepts. *Procedia social and behavioral sciences*, ۲(۲۰۱۱), ۵۲۴۷-۵۲۵۰. doi: ۱۰.۱۰۱۶/j.sbspro.۲۰۱۰.۰۳.۸۵۴

Fan, L., & Zhu, Y. (۲۰۰۷). *Representation of problem-solving procedures: A Comparative*

Torbeyns, J., De Smedt, B., Ghesquière, P., & Verschaffel, L. (۲۰۰۹). Solving subtractions adaptively by means of indirect addition: Influence of task, subject, and instructional factors. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, ۸(۲), ۱-۳۰.

Torbeyns, J., Verschaffel, L., & Ghesquière, P. (۲۰۰۵). Simple addition strategies in a first-grade class with multiple strategy instruction. *Cognition and Instruction*, ۲۳, ۱-۲۱.

Torner, G., Schoenfeld, A.H., & Reiss, K.M. (۲۰۰۷). Problem solving around the world: Summing up the state of the art. *ZDM Mathematics Education*. Springer: Berlin /Heidelberg.

Treffers, A. (۱۹۸۷). Three dimensions: A model of goal and theory description in mathematics education. The Wiskobas project. Dordrecht: Reidel.

Verschaffel, L., & De Corte, E. (۱۹۹۶). Number and arithmetic. In A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, & C. Laborde (Eds.), *International handbook of mathematics education* (1st ed., pp. ۹۹-۱۳۸). Dordrecht: Kluwer.

Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (۲۰۰۷). Whole number concepts and operations. In F. K. Lester (Eds.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. ۵۵۷-۶۲۸). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Verzosa, D.B., & Mulligan, J. (۲۰۱۲). Learning to solve addition and subtraction word problems in English as an imported language. *Educ Stud Math*. doi: ۱۰.۱۰۰۷/s۱۰۶۴۹-۰۱۲-۹۴۲۰-z

Watanabe, T. (۲۰۱۱). Shiki: A Critical Foundation for School Algebra in Japanese Elementary School Mathematics. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early Algebraization* (pp. ۱۰۹-۱۲۴). USA, New York: Springer.

Rafia poor gatabi, A. (۲۰۱۰). Designing framework for creating balance in Secondary mathematics curriculum of Iran (Unpublished doctoral dissertation). Shahid Beheshti University, Tehran, Iran.

Reyhani, E., Ahmadi, GH., & Karami Zarandi, Z. (۲۰۱۱). Comparative study of the problem solving process taught in high school mathematics curriculum America, Australia, Japan, Singapore and Iran. *Quarterly Journal of Education*, ۲۷(۱), ۱۱۵-۱۴۲ [Persian].

Rostami, M.H., Karimpoor, R., & Lellahi, K. (۲۰۱۰). Grade ۱ Math- ۲. Iran: General Department printing and distribution of textbooks.

Salimi, M., Sadi Pour, E., Delavar, A., & Maleki, H. (۲۰۱۴). Comparison of training effects in imagery strategies of mental imagery of think-aloud of written representation and motor representation on the performance of elementary students in solving verbal math problems. *Research in Curriculum Planning*, ۱۱(۱۴), ۱۲-۲۲ [Persian].

Scribner, S. (۱۹۸۴). 'Studying working intelligence', in B. Rogoff and J. Lave (Eds.), *Everyday Cognition: Its Development in Social Context* (pp. ۹-۴۰). Harvard University Press, Cambridge, MA.

Selter, C. (۲۰۰۱). Addition and Subtraction of Three-Digit Numbers: German Elementary Children's Success, Methods and Strategies. *Educ Stud Math*, ۴۷, ۱۴۵-۱۷۳.

Selter, C., Prediger, S., Nührenböcker, M., & Hußmann, S. (۲۰۱۲). Taking away and determining the difference-a longitudinal perspective on two models of subtraction and the inverse relation to addition. *Educ Stud Math*, ۷۹(۳), ۳۸۹-۴۰۸.

Takahashi, A., Watanabe, T., & Yoshida, M. (۲۰۰۸). English Translation of the Japanese Mathematics Curricula in the Course of Study (Grades ۱-۹). *Globaledresources*. Retrieved from <http://www.globaledresources.com>

The McGraw-Hill. (۲۰۰۹). *California mathematics, volume ۱*. USA: The McGraw-Hill companies.