

تخمین جهت منابع با استفاده از زیرفضای کرونکر



سینا مجیدیان* و فرزانه حدادی

دانشکده برق، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران

چکیده

این مقاله به بررسی تخمین جهت منابع با استفاده از آرایه خطی می‌پردازد. تاکنون الگوریتم‌های مختلفی برای شرایطی که در آن تعداد منابع بیشتر از تعداد آنتن‌ها باشد، ارائه شده است. از آن جمله به الگوریتم ختری‌رائو، آرایه تودرتو و آرایه پویا می‌توان اشاره کرد. روش‌های یاد شده تنها توانایی تخمین منابع ناهمبسته را دارند. الگوریتم تخمین جهت منابع با استفاده از زیرفضای کرونکر برای تخمین جهت منابع همبسته‌ای با تعداد بیشتر از تعداد عنصر آرایه در این مقاله ارائه شده است. شبیه‌سازی‌های ارائه شده در این مقاله تأییدی بر این ادعا است. علاوه بر این، کران کرامررائو که معیار بسیار مهم در بحث تخمین است، بررسی شده است. این کران برای مسأله تخمین جهت منابع پیش از این ارائه شده بود؛ اما برای تعداد منابع بیشتر از تعداد عنصر آرایه قابل محاسبه نیست. این مقاله بر این مشکل چیره شده و کران کرامررائو را برای تعداد منابع بیشتر از تعداد عنصر آرایه نیز ارائه کرده است.

واژگان کلیدی: پردازش سیگنال آرایه‌ای، تخمین جهت منبع، منابع همبسته، کرونکر

Direction of Arrival (DOA) Estimation Using Kronecker Subspace

Sina Majidian* & Farzan Haddadi

School of Electrical Engineering, Iran University of Science and Technology (IUST),
Tehran, Iran

Abstract

This paper proceeds directions of arrival (DOA) estimation by a linear array. These years, some algorithms, e.g. Khatri-Rao approach, Nested array, Dynamic array have been proposed for estimating more DOAs than sensors. These algorithms can merely estimate uncorrelated sources. For Khatri-Rao approach, this is due to the fact that Khatri-Rao product discard the non-diagonal entries of the correlation matrix in opposed to Kronecker product. In this article, an algorithm named as *Direction of Arrival (DOA) Estimation using Kronecker Subspace* is proposed to solve more correlated sources than sensors via some properties of vectorization operator and Kronecker product. The simulations in different scenarios are presented considering various numbers of frames and correlation values, here. These verify our mathematical analysis. Furthermore, Cramer-Rao bound (CRB) which is a crucial criterion to estimate, is under investigating for DOA problem. Although, CRB for DOA estimation has been proposed before, it is applicable only for fewer sources than sensors. In this paper, CRB for more sources than sensor is derived by extending the dimensions with using both real and imaginary parts of the parameters. This bound is compared to the error of the presented algorithm. The simulations show that the error of the presented algorithm is merely 7 dB far from the CRB.

Keywords: Array signal processing, Direction of Arrival (DOA), Correlated sources, Kronecker.

* Corresponding author

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات

فصلنامه



سال ۱۳۹۷ شماره ۱ پیاپی ۳۵

۲۹

www.SID.ir

مناسبی نیست. این مقاله به تخمین جهت منابع همبسته به تعداد بیشتر از عنصر آرایه پرداخته است.

معیار بسیار مهم برای سنجش عملکرد یک تخمین‌گر، خطای آن است. کم‌بودن خطای تخمین‌گر حاکی از عملکرد مناسب آن است؛ اما در بعضی شرایط خطا به صفر نمی‌رسد. با این حال کمینه خطای تخمین‌گر پیشنهادی ناریب^{۱۶} (برابر بودن امید مقدار تخمین زده شده با مقدار واقعی آن)، تو سط کران کرامرائو ارائه شده است. اگر تخمین‌گر مورد نظر به این کران برسد، بهترین تخمین‌گر ممکن از دید کمینه خطا ارائه شده است [7]. در مسأله تخمین جهت منابع، برای محاسبه کران کرامرائو تلاش‌های بسیاری شده است. در مقاله [8] به جای محاسبه مستقیم کران کرامرائو، واریانس خطای تخمین‌گر بیشینه در ست‌نمایی^{۱۸} محاسبه شده است که به صورت مجانبی برابر با کران است. ده سال بعد در مقاله دیگری [9] محاسبه مستقیم انجام شده است. این محاسبه در شرایطی که تعداد منابع کمتر از تعداد عنصر آرایه است، کارایی دارد. برای برطرف کردن این محدودیت راهکاری نوین ارائه خواهد شد.

مباحث ارائه‌شده در این مقاله چنین است: بخش بعدی، به مروری بر پژوهش‌های پیشین پرداخته است که شامل مدل مسأله تخمین جهت، روش موزیک و روش ختری‌رائو است. در بخش سوم الگوریتم پیشنهادی با نام تخمین جهت منابع با استفاده از زیرفضای کرونر معرفی شده است. در بخش بعدی CRB برای تخمین جهت بررسی و تکمیل شده است. در پایان شبیه‌سازی‌های مفصلی برای تحلیل عملکرد روش ارائه شده است.

۲- مبانی تئوری

۲-۱- مدل مسأله

فرض کنید q جبهه موج صفحه‌ای، بر آرایه‌ای p عنصری وارد می‌شوند. منابع در میدان دور قرار دارند، تنها پارامتری که منبع را مشخص می‌کند، جهت آن خواهد بود. منابع در جهات θ_k که $k = 1, \dots, q$ قرار دارند. عناصر آرایه و منابع را در یک صفحه واحد در نظر می‌گیریم. پس بردار سیگنال دریافتی با فرض نوفه جمع‌شونده به صورت زیر مدل می‌شود [1]:

تخمین جهت منابع در بحث پردازش سیگنال آرایه‌ای یکی از زمینه‌های مهم پژوهشی از سال‌ها پیش است. تخمین جهت به دور روش کلی شکل‌دهی پرتو^۱ (از جمله کاپون^۲، بارلت^۳ و ...) و زیرفضایی (از جمله موزیک^۴، اسپریت^۵ و ...) انجام می‌شود [1, 15-17]. الگوریتم موزیک، یک روش بسیار متداول است که با استفاده از جداسازی زیرفضای سیگنال و نوفه به تخمین جهت منبع می‌پردازد. یکی از ویژگی‌های مهم این روش این است که به صورت مجانبی به کران کرامرائو^۶ (CRB) می‌رسد. این الگوریتم هنگامی که منابع همدوس و یا دارای همبستگی بسیار بالا باشند کارایی خود را از دست می‌دهد. این موضوع به دلیل کاهش رتبه ماتریس همبستگی^۷ است. پژوهش‌گران برای رفع این مسأله روش‌های هموارسازی فضایی^۸ (که شامل پس‌رو^۹، پس‌رو-پیش‌رو^{۱۰}، تفاضل فضایی^{۱۱} و ...) ارائه کرده‌اند [2]. اساس کار این روش‌ها در تقسیم کردن آرایه به چندین زیرآرایه^{۱۲} است.

ابتدا ماتریس همبستگی داده‌های دریافتی در هر زیرآرایه جداگانه محاسبه شده، سپس با میانگین‌گیری روی آن‌ها منجر به بهبود رتبه ماتریس می‌شود.

مسأله مهم دیگر محدودیت در تعداد منابع قابل تخمین است که در الگوریتم‌های مذکور از جمله روش موزیک وجود دارد. این روش منابعی به تعداد یکی کمتر از تعداد عناصر آرایه را می‌تواند تخمین بزند. برای رفع این مشکل روش‌های مختلفی ارائه شده است از آن جمله می‌توان به روش‌های آمارگان بالاتر [13-14]، روش آرایه گویا [12]، روش ختری‌رائو^{۱۳} [3]، آرایه تودرو^{۱۴} [4]، آرایه نخست^{۱۵} [5]، رانام برد؛ اما این روش‌ها برای منابع ناهمبسته ارائه شده‌اند. علاوه بر موارد بالا روش آرایه پویا^{۱۶} [6]، بر مبنای تغییر مکان آنتن‌های آرایه طراحی شده است که این روش از دید عملی روش

¹ Beam forming

² Capon

³ Bartlett

⁴ MUSIC (multiple signal classification)

⁵ ESPRIT (Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques)

⁶ Cramer-Rao bound (CRB)

⁷ Covariance matrix

⁸ Spatial smoothing

⁹ Forward

¹⁰ Forward-backward

¹¹ Spatial differencing

¹² Sub-array

¹³ Khatri-Rao approach

¹⁴ Nested array

¹⁵ Co-prime array

¹⁶ Dynamic array

17 Unbiased

18 Maximum likelihood



$p > q$ تضمین می‌کند که $AR_s A^H$ یک ماتریس مثبت شبه‌معین^۱ با رتبه q باشد. آنگاه $p - q$ مقدار ویژه آن صفر خواهد بود. با توجه رابطه بالا نتیجه می‌شود $p - q$ کوچک‌ترین مقدار ویژه R_x برابر واریانس نوفه σ_n^2 خواهد بود. حال اگر بردار ویژه q_i متناظر با مقدار ویژه λ_i برای R_x باشد، خواهیم داشت:

$$(R_x - \lambda_i I_p) q_i = 0 \quad i = q + 1, \dots, p \quad (9)$$

از آنجایی که ماتریس A رتبه کامل و ماتریس R_s غیر تکین است:

$$A^H q_i = 0 \quad (10)$$

بنابراین

$$\{a(\theta_1), \dots, a(\theta_q)\} \perp \{q_{q+1}, \dots, q_p\} \quad (11)$$

یعنی بردارهای ویژه متناظر با $p - q$ کوچک‌ترین مقدار ویژه، بر q ماتریس جاروب عمود است. حال برای ساخت زیرفضای نوفه داریم:

$$V_n = [q_{q+1}, \dots, q_p] \quad (12)$$

طیف موزیک به صورت زیر تعریف می‌شود [10]:

$$P_{\text{MUSIC}}(\theta) = \frac{1}{a^H(\theta) V_n V_n^H a(\theta)} \quad (13)$$

جهت منابع DOA، q قله در طیف بالا است. در عمل با استفاده از $x(t_n)$ برای $n = 1, \dots, N$ ماتریس همبستگی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\hat{R} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x(t_n) x^H(t_n) \quad (14)$$

و سپس با تجزیه مقدار ویژه \hat{R} ، زیرفضای نوفه محاسبه و طیف الگوریتم موزیک تشکیل داده می‌شود.

۲-۳- روش ختری راثو

همان‌طور که در مدل مسأله گفته شد، تعداد q سیگنال باند باریک بر یک آرایه خطی یکنواخت p عنصری وارد می‌شود. در این بخش روش ختری راثو برای مرور ارائه می‌شود [3]. فرض می‌شود که سیگنال منابع ناهمبسته و شبه ایستاد است. این بدان معنا است که واریانس منبع در هر فریم ثابت است.

$$x(t) = \sum_{k=1}^q a(\theta_k) s_k(t) + n(t) \quad (1)$$

که در آن $a(\theta_k)$ شامل برداری با p مقدار است:

$$a(\theta_k) = \left[e^{2\pi i \frac{d_1}{\lambda} \sin(\theta_k)} \dots e^{2\pi i \frac{d_p}{\lambda} \sin(\theta_k)} \right]^T \quad (2)$$

که در آن d_p مکان عنصر آرایه p ام است. همچنین با فرض

$$A(\theta) = [a(\theta_1), \dots, a(\theta_q)]_{(p \times q)} \quad (3)$$

$$s(t) = [s_1(t), \dots, s_q(t)]^T \quad (4)$$

مدل کلی مسأله را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$x(t) = A(\theta) s(t) + n(t) \quad (5)$$

که در آن $A(\theta)$ بردار جاروب آرایه، مبین پاسخ آرایه به جبهه موج صفحه‌ای است. صورت مسأله بدین گونه خواهد شد: با داشتن $x(t)$ ، θ_k را بیابید. با استفاده از مدل کلی مسأله، ماتریس همبستگی به صورت زیر خواهد بود:

$$R_x = AR_s A^H + R_n = AR_s A^H + \sigma_n^2 I_p \quad (6)$$

که در آن R_s ماتریس همبستگی منابع $(q \times q)$ و R_n ماتریس همبستگی نوفه $(p \times p)$ است. تساوی آخر برای نوفه سفید نوشته شده است. همچنین I ماتریس یک و نماد H ترانپوز مزدوج مختلط است.

۲-۲- روش موزیک

همان‌طور که در مقدمه گفته شد، یکی از رایج‌ترین روش‌ها در تخمین جهت منابع، روش موزیک است. این روش با استفاده از ماتریس همبستگی به تفکیک زیرفضای سیگنال و نوفه می‌پردازد [10]. می‌دانیم R_x دارای q مقدار ویژه $\{\lambda_1, \dots, \lambda_q\}$ است که در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$|R_x - \lambda_i I_p| = 0 \quad (7)$$

حال اگر مقدار ویژه $AR_s A^H$ ، را e_i بنامیم، خواهیم داشت:

$$e_i = \sigma_n^2 - \lambda_i \quad (8)$$

از آن جایی که A ماتریس جاروب یک آرایه، ماتریسی شامل بردارهای مستقل خطی است، پس رتبه کامل خواهد بود. حال اگر ماتریس همبستگی منابع R_s غیر تکین^۲ باشد،

¹ Steering vector

² Non-singular

³ Positive semi-definite matrix

با استفاده از خواص ضرب ختری رانو به سادگی نشان داده می‌شود که \mathbf{Y} معادل رابطه زیر است:

$$\mathbf{Y} = (\mathbf{A}^* \odot \mathbf{A}) \boldsymbol{\psi} + \text{vec}(\mathbf{R}_n) \mathbf{1}_M^T \quad (26)$$

$$\boldsymbol{\psi} = [\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_M] = \begin{bmatrix} r_{11} & \dots & r_{1M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{q1} & \dots & r_{qM} \end{bmatrix} \quad (27)$$

که در آن $\mathbf{1}_M^T$ ستونی از یک به تعداد M است. از آنجایی که منابع نایستان هستند، $[\boldsymbol{\psi} \ \mathbf{1}_M^T]$ رتبه کامل است، بنابراین با استفاده از تصویر مؤلفه نوفه را می‌توان حذف کرد:

$$\mathbf{P}^\perp = \mathbf{I}_M - \frac{1}{M} \mathbf{1}_M \mathbf{1}_M^T \quad (28)$$

خواهیم داشت:

$$\mathbf{Y} \mathbf{P}^\perp = [(\mathbf{A}^* \odot \mathbf{A}) \boldsymbol{\psi} + \text{vec}(\mathbf{R}_n) \mathbf{1}_M^T] \mathbf{P}^\perp = (\mathbf{A}^* \odot \mathbf{A}) (\mathbf{P}^\perp \boldsymbol{\psi}^T)^T \quad (29)$$

در پایان با استفاده از تجزیه مقدار تکین² زیرفضای نوفه را می‌توان به دست آورد تا برای تخمین جهت منبع در الگوریتم‌های شناخته شده موزیک استفاده شود.

$$\mathbf{Y} \mathbf{P}^\perp = [\mathbf{U}_s \mathbf{U}_n] \begin{bmatrix} \Sigma_s & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_s^H \\ \mathbf{V}_n^H \end{bmatrix} \quad (30)$$

که در آن Σ_s ماتریس قطری مقادیر ویژه، \mathbf{U}_s و \mathbf{V}_s^H بردار ویژه راست و چپ مربوط به مقادیر ویژه غیر صفر هستند. مسأله تخمین جهت به صورت زیر در می‌آید:

$$\mathbf{U}_n^H (\mathbf{a}^*(\theta) \otimes \mathbf{a}(\theta)) = 0 \quad (31)$$

اثبات می‌شود که در این روش تعداد جهت منبع قابل تخمین به تعداد دو برابر عناصر آرایه می‌رسد [3].

۳- الگوریتم پیشنهادی

همان‌طور که بحث شد، الگوریتم ختری رانو برای منابع ناهمبسته کارایی دارد. نیاز به الگوریتمی مناسب برای منابع همبسته بیشتر از تعداد عنصر آرایه وجود دارد که موضوع اصلی این مقاله است. در این بخش الگوریتمی معرفی خواهد شد که مبتنی بر زیرفضای کرونگر است. خواص ختری رانو که در بخش قبل ارائه شد، منجر به حفظ همبستگی منابع (عناصر غیر قطری ماتریس همبستگی) نمی‌شود؛ اما با استفاده از ضرب کرونگر، این مهم، مقدور خواهد بود [11]. در ادامه جزئیات و تئوری الگوریتم ارائه می‌شود. ابتدا برای \mathbf{R}_x عمل ستونی‌سازی انجام می‌شود:

$$E[|s_i(t)|^2] = r_i^{(m)} \quad (15)$$

$$t \in [(m-1)K, mK-1] \quad m = 1, \dots, M \quad (16)$$

که $s_i(t)$ منبع i ام است. همچنین K و M به ترتیب طول فریم و تعداد فریم است. ماتریس همبستگی سیگنال دریافتی در فریم m ام به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{R}_x^{(m)} = E[\mathbf{x}(t)\mathbf{x}(t)^H] \in \mathbb{C}^{p \times p} \quad (17)$$

$$\forall t \in [(m-1)K, mK-1] \quad (18)$$

با استفاده از مدل مسأله ماتریس همبستگی سیگنال دریافتی در هر فریم را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$\mathbf{R}_x^{(m)} = \mathbf{A} \mathbf{R}_s^{(m)} \mathbf{A}^H + \mathbf{R}_n \quad (19)$$

که در آن $\mathbf{R}_s^{(m)}$ همبستگی منبع بوده که به شکل زیر است:

$$\mathbf{R}_s^{(m)} = \text{diag}(r_1^{(m)}, r_2^{(m)}, \dots, r_q^{(m)}) \quad (20)$$

این به علت فرض ناهمبستگی منابع است. همان‌طور که در بخش قبل گفته شد، در عمل تخمین آن با استفاده از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\hat{\mathbf{R}}_x^{(m)} = \frac{1}{K} \sum_{t=(m-1)K}^{mK-1} \mathbf{x}(t)\mathbf{x}(t)^H \quad (21)$$

برای تخمین جهت منابع در این شرایط از روش ختری رانو استفاده می‌کنند. در این روش همبستگی سیگنال به صورت زیر برای هر فریم ستونی‌سازی می‌شود:

$$\mathbf{y}_m \triangleq \text{vec}(\mathbf{R}_x^{(m)}) = \text{vec}(\mathbf{A} \mathbf{R}_s^{(m)} \mathbf{A}^H) + \text{vec}(\mathbf{R}_n) \quad (22)$$

از آنجایی که $\mathbf{R}_s^{(m)}$ قطری است با استفاده از خواص ضرب ختری رانو می‌توان نوشت:

$$\mathbf{y}_m = (\mathbf{A}^* \odot \mathbf{A}) \mathbf{r}_m + \text{vec}(\mathbf{R}_n) \quad (23)$$

که در آن $(\cdot)^*$ و \odot به ترتیب نماد مزدوج مختلط و ضرب ختری رانو هستند. همچنین \mathbf{r}_m عناصر روی قطر ماتریس همبستگی منبع است.

$$\mathbf{r}_m = [r_1^{(m)}, r_2^{(m)}, \dots, r_q^{(m)}]^T \quad (24)$$

حال \mathbf{y}_m مربوط به هر فریم به عنوان ستون ماتریس \mathbf{Y} قرار داده می‌شود.

$$\mathbf{Y} = [\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_M] \quad (25)$$

² projection

³ Singular Value Decomposition (SVD)

¹ vectorize



برای شرایط نطفه‌ای می‌بایست این عبارت کمینه شود، پس به‌طور معادل، مسأله بهینه‌سازی به‌صورت زیر در می‌آید:

$$\text{Max} \frac{1}{\| \mathbf{U}_n^H \mathbf{b}(\boldsymbol{\theta}) \|} \quad (44)$$

در بخش پایانی شبیه‌سازی‌های مربوط ارائه خواهد شد.

۴- محاسبه کران کرامررائو CRB

همان‌طور که در مقدمه ذکر شد، کران کرامررائو یک رابطه بسیار مهم در بحث تخمین است. این کران حد پایینی برای خطای تخمین گر ارائه می‌دهد. برای چگالی احتمال $P(\mathbf{x}; \boldsymbol{\alpha})$ اگر شرط عادی بودن^۱ به‌صورت

$$E\left[\frac{\partial \ln p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\alpha})}{\partial \boldsymbol{\alpha}}\right] = 0 \quad (45)$$

برقرار باشد، مقدار خطای تخمین گر ناریب در شرط زیر صدق می‌کند [7]:

$$\text{var}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \geq \frac{1}{\text{FIM}} \quad (46)$$

$$\text{FIM} = -E\left[\frac{\partial^2 \ln p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\alpha})}{\partial \boldsymbol{\alpha}^2}\right] \quad (47)$$

که در آن FIM ماتریس اطلاعات فیشر^۲ و $\boldsymbol{\alpha}$ بردار مجهولی که می‌بایست تخمین زده شود، است. یکی از نوآوری این پژوهش محاسبه کران کرامررائو برای تعداد منابع بیشتر از تعداد عنصر آرایه است.

۴-۱- کران کرامررائو برای منابع کمتر از تعداد عنصر آرایه

در مدل مسأله تخمین جهت منبع، بردار مجهول شامل جهت منبع، واریانس نطفه، ماتریس همبستگی منبع است که به‌صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$\boldsymbol{\alpha} = [\boldsymbol{\theta}^T \ \boldsymbol{\rho}^T \ \sigma]^T \quad (48)$$

که در آن

$$\boldsymbol{\theta} = [\theta_1, \dots, \theta_q]^T \quad (49)$$

جهت منبع به تعداد q تا است و σ جذر واریانس نطفه است. همچنین $\boldsymbol{\rho}$ یک بردار شامل عناصر روی قطر، قسمت حقیقی و موهومی عناصر بالا مثلثی ماتریس همبستگی منبع است. این بدان علت است که ساختار ماتریس همبستگی به‌صورت هرمیتی^۳ است. پس:

$$\mathbf{z} \triangleq \text{vec}(\mathbf{R}_x) = \text{vec}(\mathbf{A}\mathbf{R}_s\mathbf{A}^H) \quad (32)$$

حال با استفاده از خاصیت ضرب کرونگر برای ماتریس همبستگی خواهیم داشت:

$$\text{vec}(\mathbf{R}_x) = \text{vec}(\mathbf{A}\mathbf{R}_s\mathbf{A}^H) = (\mathbf{A}^* \otimes \mathbf{A})\text{vec}(\mathbf{R}_s) \quad (33)$$

با در نظر گرفتن

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^* \otimes \mathbf{A} \quad (34)$$

$$\boldsymbol{\varphi} = \text{vec}(\mathbf{R}_s) \quad (35)$$

\mathbf{z} به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\mathbf{z} = \mathbf{B}\boldsymbol{\varphi} \quad (36)$$

حال تخمین مقدار \mathbf{z} را در یک دوره زمانی (فریم) محاسبه می‌کنیم:

$$\hat{\mathbf{z}}^{(i)} = (\mathbf{A}^* \otimes \mathbf{A})\text{vec}(\hat{\mathbf{R}}_s^{(i)}) \quad (37)$$

سپس برای فریم‌های مختلف $i = 1, \dots, M$ به‌عنوان ستونی از \mathbf{Z} قرار می‌دهیم:

$$\mathbf{Z} = [\hat{\mathbf{z}}^{(1)}, \dots, \hat{\mathbf{z}}^{(M)}] \quad (38)$$

بنابراین

$$\mathbf{Z} = \mathbf{B}\boldsymbol{\Psi} \quad (39)$$

که در آن

$$\boldsymbol{\Psi} = [\text{vec}(\hat{\mathbf{R}}_s^{(1)}), \dots, \text{vec}(\hat{\mathbf{R}}_s^{(M)})] \quad (40)$$

است. حال برای تجزیه مقدار ویژه را انجام می‌دهیم:

$$(\mathbf{Z}\mathbf{Z}^H)\mathbf{U}_i = \lambda_i\mathbf{U}_i \quad (41)$$

که در آن λ_i مقدار ویژه و \mathbf{U}_i بردار ویژه متناظر است. برای مقدار ویژه صفر آن خواهیم داشت:

$$(\mathbf{B}\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\Psi}^H\mathbf{B}^H)\mathbf{U}_i = 0 \quad (42)$$

با استفاده از نامساوی کوشی-شوارتز [11] داریم:

$$\|\mathbf{B}\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\Psi}^H\mathbf{B}^H\mathbf{U}_i\|^2 \leq \|\mathbf{B}\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\Psi}^H\|^2 \|\mathbf{B}^H\mathbf{U}_i\|^2 \quad (43)$$

بدین ترتیب می‌توان نتیجه‌گیری کرد که بخش دوم عبارت سمت راست در رابطه (۴۳) برای مشخص کردن جهت منبع کافی است. از آنجایی که هر ستون $\mathbf{B} = \mathbf{A}^* \otimes \mathbf{A}$ برابر $\mathbf{a}(\theta_i) \otimes \mathbf{a}(\theta_i)$ است، کافی است روی یک ستون به جست‌وجو بپردازیم. بدین ترتیب می‌بایست عبارت $\|\mathbf{U}_n^H \mathbf{b}(\boldsymbol{\theta})\|$ صفر شود. از آنجایی که عبارت (نرم) مثبت است،

¹ Regularity

² Fisher information matrix

³ Hermitian

حال \mathbf{y} به صورت زیر تعریف می شود:

$$\mathbf{y} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{x}_r \\ \mathbf{x}_i \end{bmatrix} \quad (64)$$

بدین ترتیب، ماتریس همبستگی با ابعاد $2q \times 2q$ خواهد بود:

$$\mathbf{C}_y = E[\mathbf{y}\mathbf{y}^T] \quad (65)$$

و به صورت بلوکی می توان نمایش داد:

$$\mathbf{C}_y = \begin{bmatrix} E[\mathbf{x}_r\mathbf{x}_r^T] & E[\mathbf{x}_r\mathbf{x}_i^T] \\ E[\mathbf{x}_i\mathbf{x}_r^T] & E[\mathbf{x}_i\mathbf{x}_i^T] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2 \\ \mathbf{C}_3 & \mathbf{C}_4 \end{bmatrix} \quad (66)$$

واضح است که $\mathbf{C}_3 = \mathbf{C}_2^T$. حال به بررسی هریک از بلوکها می پردازیم:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_1 = E[\mathbf{x}_r\mathbf{x}_r^T] &= \mathbf{A}_r\mathbf{R}_{s_r}\mathbf{A}_r^T + \mathbf{A}_i\mathbf{R}_{s_i}\mathbf{A}_i^T \\ &+ \mathbf{A}_r\mathbf{R}_{s_{ri}}\mathbf{A}_i^T - (\mathbf{A}_r\mathbf{R}_{s_r}\mathbf{A}_r^T)^T \\ &+ \sigma^2\mathbf{I} \end{aligned} \quad (67)$$

که در آن

$$\mathbf{R}_{s_r} = E[\mathbf{s}_r\mathbf{s}_r^T] \quad (68)$$

$$\mathbf{R}_{s_{ri}} = E[\mathbf{s}_r\mathbf{s}_i^T] \quad (69)$$

و همچنین

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_2 &= \mathbf{A}_r\mathbf{R}_{s_r}\mathbf{A}_i^T \\ &+ \mathbf{A}_r\mathbf{R}_{s_{ri}}\mathbf{A}_r^T \\ &- \mathbf{A}_i\mathbf{R}_{s_{ri}}\mathbf{A}_i^T - \mathbf{A}_i\mathbf{R}_{s_i}\mathbf{A}_r^T \end{aligned} \quad (70)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_4 &= \mathbf{A}_i\mathbf{R}_{s_r}\mathbf{A}_i^T + \mathbf{A}_i\mathbf{R}_{s_{ri}}\mathbf{A}_r^T \\ &+ (\mathbf{A}_i\mathbf{R}_{s_{ri}}\mathbf{A}_r^T)^T \\ &+ \mathbf{A}_r\mathbf{R}_{s_i}\mathbf{A}_i^T + \sigma^2\mathbf{I} \end{aligned} \quad (71)$$

اگر داده ها دایروی باشند، $\mathbf{C}_4 = \mathbf{C}_1$ خواهد بود.

از آنجایی که مسأله گاوسی فرض شده است، به مانند بخش قبل ماتریس اطلاعات فیشر برای $\mathcal{N}(0, \mathbf{C}_y)$ به صورت زیر خواهد بود:

$$\text{FIM}_{i,j} = N\text{Tr}\left(\frac{d\mathbf{C}_y}{d\alpha_i}\mathbf{C}_y^{-1}\frac{d\mathbf{C}_y}{d\alpha_j}\mathbf{C}_y^{-1}\right) \quad (72)$$

$$\text{for } i, j = 1, \dots, \frac{3}{2}(q^2 + q) + q + 1 \quad (73)$$

که در آن N تعداد نمونه ها است. همانند بخش قبل

$$\boldsymbol{\alpha} = [\boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\rho}^T \boldsymbol{\sigma}] \quad (74)$$

با این تفاوت که $\boldsymbol{\rho}$ از سه بخش تشکیل می شود

$$\text{for } k = 1, \dots, \frac{1}{2}(q^2 + q): \quad \rho_k = \mathbf{R}_{s_r}^{(i,j)} \quad (75)$$

$$\boldsymbol{\rho}: \{\mathbf{R}_s^{(i,i)}, \text{Re}(\mathbf{R}_s^{(i,j)}), \text{Im}(\mathbf{R}_s^{(i,j)})\} \quad (50)$$

$$\text{for } j > i \quad i, j = 1, \dots, q. \quad (51)$$

در [7] آورده شده است که برای حالت گاو سی با ماتریس همبستگی \mathbf{R}_x ماتریس اطلاعات فیشر خواهیم داشت:

$$\text{FIM}_{i,j} = N\text{Tr}\left(\frac{d\mathbf{R}_x}{d\alpha_i}\mathbf{R}_x^{-1}\frac{d\mathbf{R}_x}{d\alpha_j}\mathbf{R}_x^{-1}\right) \quad (52)$$

$$\text{for } i, j = 1, \dots, q^2 + q + 1 \quad (53)$$

که در آن N تعداد نمونه ها است. کران کرامرائو برای تخمین جهت منابع به صورت زیر است [8]:

$$\text{CRB}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\sigma}{2N} \text{Re}\{(D^*\boldsymbol{\Pi}_A^{\perp}D) \odot (\mathbf{R}_s\mathbf{A}^*\mathbf{R}_x^{-1}\mathbf{A}\mathbf{R}_s)\}^{-1} \quad (54)$$

که در آن

$$\mathbf{D} = [d_1, \dots, d_q] \quad (55)$$

$$d_i = \frac{d\mathbf{a}(\theta_i)}{d\theta_i} \quad (56)$$

همچنین

$$\boldsymbol{\Pi}_A^{\perp} = \mathbf{I} - \mathbf{A}(\mathbf{A}^*\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^* \quad (57)$$

معکوس ماتریس در رابطه (57) وقتی که تعداد منابع کمتر از تعداد عنصر آرایه باشد، قابل محاسبه است. در بخش بعد این کران برای تعداد منابع بیشتر از تعداد عنصر آرایه محاسبه و ارائه می شود. این موضوع تا کنون مورد توجه قرار نگرفته بوده و محاسبه نشده بود.

۲-۴- کران کرامرائو برای منابع همبسته بیشتر از تعداد عنصر آرایه

برای محاسبه کران کرامرائو، قسمت حقیقی و موهومی اجزا، مدل مسأله جدا می کنیم؛ سپس قسمت حقیقی و موهومی سیگنال دریافتی به عنوان یک متغیر جدید \mathbf{y} تعریف می شود.

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_r + i\mathbf{A}_i \quad (58)$$

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}_r + i\mathbf{s}_i \quad (59)$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}_r + i\mathbf{n}_i \quad (60)$$

و برای سیگنال دریافتی:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_r + i\mathbf{x}_i \quad (61)$$

بنابراین

$$\mathbf{x}_r = \mathbf{A}_r\mathbf{s}_r - \mathbf{A}_i\mathbf{s}_i + \mathbf{n}_r \quad (62)$$

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{A}_r\mathbf{s}_i + \mathbf{A}_i\mathbf{s}_r + \mathbf{n}_i \quad (63)$$

برای محاسبه $\frac{dC_y}{d\theta_k}$ از هر بلوک ماتریس C_y جداگانه مشتق می‌گیریم. ابتدا بلوک C_1

$$\begin{aligned} \frac{dC_1}{d\theta_k} = & D_r^k R_{s_r} A_r^T + A_r R_{s_r} (D_r^k)^T + D_i^k R_{s_i} A_i^T \\ & + A_i R_{s_i} (D_i^k)^T - (D_r^k R_{s_{ri}} A_i^T + A_r R_{s_{ri}} (D_i^k)^T) \\ & - (D_r^k R_{s_{ri}} A_i^T + \\ & A_r R_{s_{ri}} (D_i^k)^T)^T \end{aligned} \quad (86)$$

که در آن

$$D_r^k = \frac{dA_r}{d\theta_k} \quad (87)$$

$$D_i^k = \frac{dA_i}{d\theta_k} \quad (88)$$

همچنین برای C_2 و C_4 به راحتی قابل محاسبه است.

حال برای محاسبه Δ ، آن را به دو قسمت جدا می‌کنیم:

$$\Delta = (C_y^T \otimes C_y^{-1/2}) \left[\frac{d\bar{C}}{d\rho^T} \mid \frac{d\bar{C}}{d\sigma} \right] \triangleq [V \mid u] \quad (89)$$

ابتدا برای u مشتق بلوک‌های C به صورت زیر مشخص می‌شود:

$$\frac{dC_1}{d\sigma} = I, \quad \frac{dC_2}{d\sigma} = \mathbf{0}_{q \times q}, \quad \frac{dC_4}{d\sigma} = I \quad (90)$$

که با استفاد از این روابط به سادگی u به دست می‌آید. حال محاسبه v ، ابتدا مشتق را برای بلوک نخست محاسبه می‌کنیم. برای $k = 1, \dots, \frac{1}{2}(q^2 + q)$

$$\frac{dC_1}{d\rho_k} = A_r \frac{dR_{s_r}}{d\rho_k} A_r^T - \left(A_r \frac{dR_{s_r}}{d\rho_i} A_r^T \right)^T \quad (91)$$

و برای $k = \frac{1}{2}(q^2 + q), \dots, (q^2 + q)$

$$\frac{dC_1}{d\rho_k} = A_i \frac{dR_{s_i}}{d\rho_k} A_i^T \quad (92)$$

و برای $k = (q^2 + q), \dots, \frac{3}{2}(q^2 + q)$

$$\frac{dC_1}{d\rho_k} = A_r \frac{dR_{s_{ri}}}{d\rho_k} A_i^T \quad (93)$$

همین‌طور برای سایر بلوک‌ها محاسبه می‌شود. برای بررسی بیشینه تعداد منابع قابل تخمین، می‌بایست شرایط معکوس پذیر بودن ماتریس $\Delta^T \Delta$ لحاظ شود. شرط لازم معکوس پذیری ماتریس $\Delta^T \Delta$ این است که تعداد ستون‌های ماتریس Δ بیشتر از تعداد سطرهاى ماتریس Δ باشد. با توجه به ابعاد ماتریس Δ که

$$\frac{3}{2}(q^2 + q) \times 4p^2$$

است، بیشینه تعداد منابع قابل تخمین به صورت زیر است:

$$4p^2 > \frac{3}{2}(q^2 + q) \quad (94)$$

$$\begin{aligned} \text{for } k = & \frac{1}{2}(q^2 + q), \dots, (q^2 + q): \rho_k \\ & = R_{s_{ri}}^{(i,j)} \end{aligned} \quad (96)$$

$$\begin{aligned} \text{for } k = & (q^2 + q), \dots, \frac{3}{2}(q^2 + q): \rho_k \\ & = R_{s_i}^{(i,j)} \end{aligned} \quad (97)$$

به طوری که $j \geq i, i, j = 1, \dots, q$ است. چون ماتریس همبستگی خاصیت هرمیتی دارد، شرط $j \geq i$ قرار داده شده تا عناصر بالامثلثی و قطری انتخاب گردند. اگر داده‌ها دایروی باشند $R_{s_r} = R_{s_i}$ ، آنگاه ردیف سوم حذف می‌شود. حال با استفاده از خواص ستونی‌سازی

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \text{FIM}_{i,j} = & \text{vec} \left(\frac{dC_y}{d\alpha_i} \right)^T (C_y^{-T} \\ & \otimes C_y^{-1}) \text{vec} \left(\frac{dC_y}{d\alpha_i} \right) \end{aligned} \quad (98)$$

و با تعریف

$$\bar{C} = \text{vec}(C_y) \quad (99)$$

خواهیم داشت:

$$\frac{1}{N} \text{FIM} = \left\{ \frac{d\bar{C}}{d\alpha^T} \right\}^T (C_y^{-T} \otimes C_y^{-1}) \frac{d\bar{C}}{d\alpha^T} \quad (100)$$

که به دو بخش می‌تواند جدا شود:

$$\begin{aligned} (C_y^T \otimes C_y^{-1/2}) \left[\frac{d\bar{C}}{d\theta^T} \mid \frac{d\bar{C}}{d\rho^T} \mid \frac{d\bar{C}}{d\sigma} \right] \\ \triangleq [G \mid \Delta] \end{aligned} \quad (101)$$

بنابراین

$$\frac{1}{N} \text{FIM} = \begin{bmatrix} G^T \\ \Delta^T \end{bmatrix} [G \mid \Delta] = \begin{bmatrix} G^T G & G^T \Delta \\ \Delta^T G & \Delta^T \Delta \end{bmatrix} \quad (102)$$

از آنجایی که کران کرانراو برای مسأله تخمین جهت منابع مورد نظر است، فقط بلوک نخست در معکوس ماتریس اطلاعات فیشرف کافى خواهد بود. با استفاده از رابطه قضیه معکوس ماتریس بلوکی [11]، با کمی محاسبات، معکوس بلوک نخست برای مسأله به صورت زیر ساده می‌شود:

$$\text{CRB}(\theta) = \frac{1}{N} (G^T \Pi_{\Delta}^{\perp} G)^{-1} \quad (103)$$

که در آن

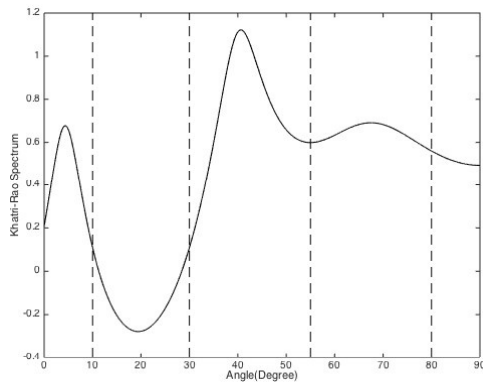
$$\Pi_{\Delta}^{\perp} = I - \Delta(\Delta^T \Delta)^{-1} \Delta^T \quad (104)$$

حال محاسبه ستون k ام از ماتریس G مدنظر است.

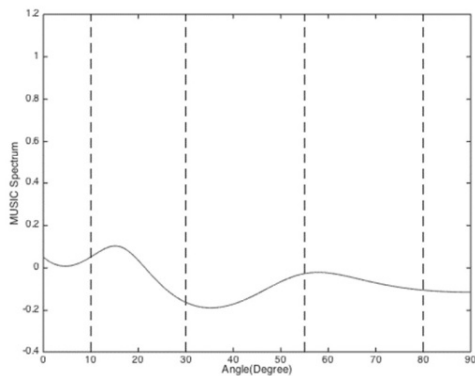
$$\begin{aligned} g_k = & (C_y^T \otimes C_y^{-1/2}) \frac{d\bar{C}}{d\theta_k} \\ & = (C_y^T \otimes C_y^{-1/2}) \text{vec} \left(\frac{dC_y}{d\theta_k} \right) \end{aligned} \quad (105)$$

۵- شبیه‌سازی

در شبیه‌سازی نخست کارایی الگوریتم ختری‌رائو در مقایسه با روش MUSIC مورد بررسی قرار گرفته است. چهار منبع ایستادن گوسی ناهمبسته در جهات $\theta = \{10^\circ, 30^\circ, 55^\circ, 80^\circ\}$ با $SNR=20dB$ بر یک آرایه یکنواخت خطی سه‌عنصری با فاصله $\frac{\lambda}{2}$ وارد می‌شوند. شبیه‌سازی با استفاده از نرم‌افزار MATLAB انجام شده است. همان‌طور که دیده می‌شود روش MUSIC نتوانسته است تخمین مناسبی ارائه دهد، از آنجایی که منابع ناهمبسته هستند؛ روش ختری‌رائو به خوبی تخمین زده است.

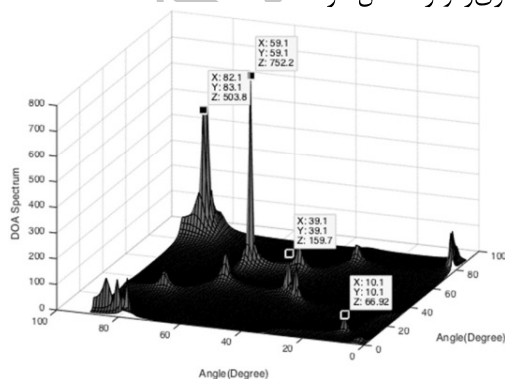


(شکل-۲): تخمین جهت منابع همبسته جهات $\theta = \{10^\circ, 35^\circ, 60^\circ, 85^\circ\}$ با یک آرایه سه‌عنصری با استفاده از روش ختری‌رائو. (Figure-2): DOA estimation of correlated sources using Khatri-Rao algorithm with array of three elements.

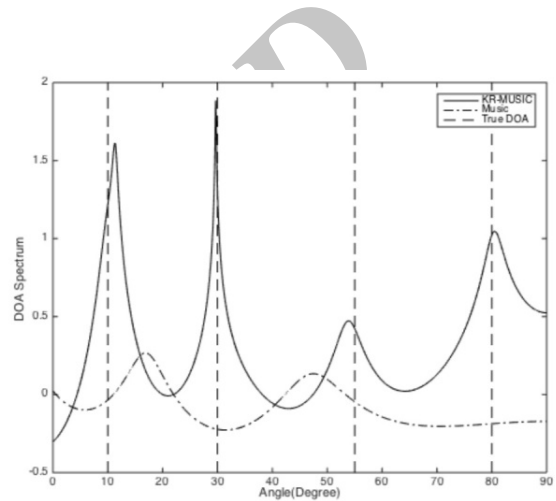


(شکل-۳): تخمین جهت منابع همبسته در جهات $\theta = \{10^\circ, 35^\circ, 60^\circ, 85^\circ\}$ با یک آرایه سه‌عنصری با استفاده از روش موزیک. (Figure-3): DOA estimation of correlated sources using MUSIC algorithm with array of three elements.

همان‌طور که در شکل (۲) و (۳) دیده می‌شود، روش موزیک و ختری‌رائو نتوانستند تخمین درستی ارائه کنند. علت ناتوانی الگوریتم موزیک، بیشتر بودن تعداد منابع نسبت به تعداد عنصر آرایه است که باعث می‌شود زیرفضای نوفه‌ای موجود نباشد. همچنین همبسته بودن منابع، کارایی روش ختری‌رائو را مختل کرده است.



(شکل-۴): شبیه‌سازی الگوریتم تخمین جهت منبع با استفاده از زیرفضای کرونکر برای چهار منبع دو به دو همبسته. (Figure-4): DOA estimation using Kronecker subspace algorithm for 4 correlated sources.

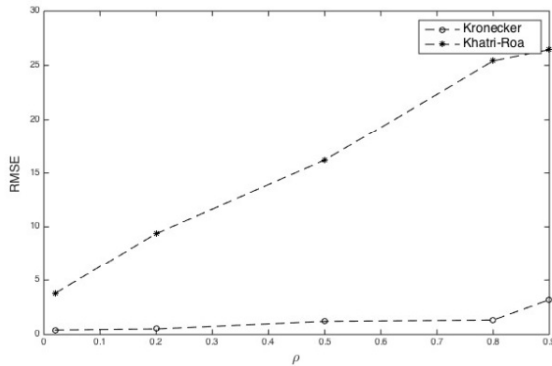


(شکل-۱): تخمین جهت منابع با استفاده از روش موزیک. به علت بیشتر بودن تعداد منابع از تعداد عنصر آرایه تخمین غلطی ارائه می‌دهد.

(Figure-1): DOA estimation using MUSIC and Khatri-Rao. MUSIC yields to an incorrect estimation.

چهار منبع در جهات $\theta = \{10^\circ, 35^\circ, 60^\circ, 85^\circ\}$ بر یک آرایه یکنواخت خطی سه‌عنصری با فاصله $\frac{\lambda}{2}$ وارد می‌شوند. به طوری که دو منبع نخست با ضریب 0.9، همچنین منبع سوم و چهارم با ضریب 0.8 همبسته می‌باشند. تخمین جهت با استفاده از الگوریتم‌های مطرح‌شده (موزیک و ختری‌رائو) و همچنین الگوریتم پیشنهادی انجام شده است. منبع به صورت سیگنال تصادفی گاوسی و همچنین نوفه، به صورت سفید گاوسی با $SNR = 10dB$ در نظر گرفته شده است. در ابتدا طیف الگوریتم روش ختری‌رائو، سپس موزیک به ترتیب در شکل (۲) و (۳) آورده شده است. همچنین طیف الگوریتم پیشنهادی در شکل (۴) رسم شده است.

اما روش ختری رانو با افزایش همبستگی خطا به طور فزاینده‌ای افزایش می‌یابد و روش کارایی خود را از دست می‌دهد. این بدان علت است که در روش ختری رانو درایه‌های غیرقطری ماتریس همبستگی صفر فرض شد.

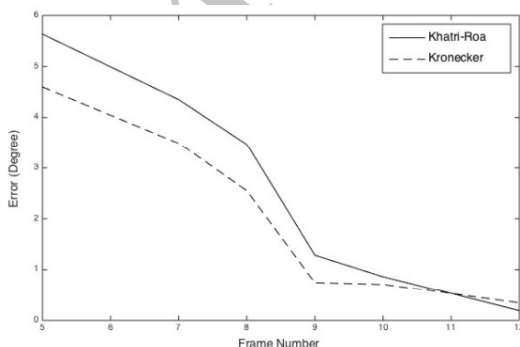


(شکل-۶): خطای الگوریتم پیشنهادی در مقایسه با الگوریتم

ختری رانو بر حسب همبستگی منابع.

(Figure-6): Error comparison of proposed algorithm with Khatri-rao algorithm in terms of correlation of sources.

شبیه‌سازی آخر مربوط به عملکرد الگوریتم پیشنهادی در مقایسه با الگوریتم ختری رانو بر حسب تعداد فریم است. همان جهت منابع که ناهمبسته بوده و $SNR=10dB$ با طول فریم بیست در نظر گرفته شده که در شکل (۷) آورده شده است. برای هر دو روش، با افزایش تعداد فریم خطای تخمین جهت منابع کم می‌شود؛ اما هنگامی که تعداد فریم کم باشد، الگوریتم پیشنهادی (تخمین جهت منابع با استفاده از زیرفضای کرونگر) خطای کمتری در مقایسه با روش ختری رانو دارد؛ اما با تعداد فریم زیاد، روش ختری رانو عملکرد بهتری دارد. این بدان علت است که روش ختری رانو نوفه اثر کمتری بر خطای تخمین ماتریس همبستگی دارد. زیرا فرض را بر ناهمبستگی منابع گذاشته، درحالی که در روش پیشنهادی اعمال نشده است.



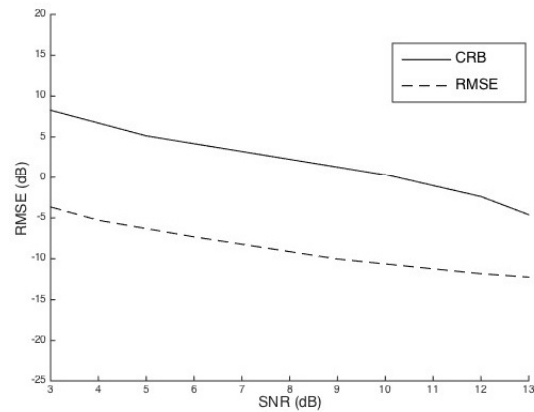
(شکل-۷): خطای الگوریتم پیشنهادی در مقایسه با الگوریتم

ختری رانو بر حسب تعداد فریم.

(Figure-7): Error comparison of proposed algorithm with Khatri-rao algorithm in terms of frame number

الگوریتم ارائه شده (تخمین جهت منبع با استفاده از زیرفضای کرونگر) توانسته است، چهار جهت منبع همبسته را با خطای کمی تخمین بزند (شکل (۴)). درحالی که الگوریتم‌های پیشین چنین توانایی را نداشتند.

در ادامه، همه شبیه‌سازی‌ها با استفاده از روش مونت کارلو به تعداد یکصدبار اجرا شده است. جذر میانگین مربع خطا^۱ (RMSE) برای الگوریتم پیشنهادی محاسبه و با کران کرامرانو مقایسه خواهد شد.



(شکل-۵): مقایسه خطای تخمین با کران کرامرانو برای منابع

همبسته در جهات $\theta = \{10^\circ, 35^\circ, 60^\circ, 85^\circ\}$ با یک آرایه سه عنصری

(Figure-5): Comparison of error estimation with Cramer-Rao bound for correlated sources with array of three elements.

در شکل (۵) مقایسه بین RMSE و کران کرامرانو برای همان جهات $\theta = \{10^\circ, 35^\circ, 60^\circ, 85^\circ\}$ رسم شده است. در این شبیه‌سازی منابع دوبه‌دو همبسته به میزان 0.3 و 0.8 می‌باشند. همان‌طور که در این مقاله بحث شد، تاکنون الگوریتمی برای تخمین جهت منابع همبسته بیشتر از تعداد عنصر ارائه نشده بود. همان‌طور که دیده می‌شود، الگوریتم پیشنهادی توانسته تا $7dB$ به کران کرامرانو نزدیک شود.

شبیه‌سازی بعدی مربوط به بررسی اثر میزان همبستگی منابع بر دو روش ختری رانو و روش پیشنهادی است. چهار منبع همبسته در جهات $\theta = \{10^\circ, 35^\circ, 60^\circ, 85^\circ\}$ بر یک آرایه سه عنصری وارد می‌شوند. $SNR=10dB$ در نظر گرفته شده است. نمودار خطای تخمین جهت منابع در شکل (۶) رسم شده است. همبستگی از 0.01 تا 0.9 تغییر می‌کند. همان‌طور که دیده می‌شود، خطای الگوریتم پیشنهادی با افزایش میزان همبستگی کمی پیدا می‌کند؛

^۱ Root mean square error

در این مقاله ابتدا به مرور پیشینه پژوهش تخمین جهت منابع با استفاده از آرایه‌ای از آنتن‌ها پرداخته شده است. مدل مسأله و روش موزیک به عنوان متداول‌ترین روش در این حوزه ارائه شده است. این مقاله به تخمین جهت منابع به تعدادی بیشتر از تعداد عنصر آرایه اختصاص یافته است. بدین منظور روش ختری‌رائو به همراه مزایا و معایب آن بررسی شد. مهم‌ترین مزیت این روش، تخمین جهت به تعداد بیشتر از تعداد عنصر آرایه بوده و همچنین مهم‌ترین عیب آن ناتوانی در تخمین جهت منابع همبسته است. الگوریتم ارائه شده در این مقاله می‌تواند تعداد منابع همبسته‌ای بیشتر از تعداد عناصر آرایه تخمین بزند؛ درحالی‌که الگوریتم‌های پیشین توانایی چنین عملکردی نداشتند. همچنین در این مقاله کران کرامرئو مورد بررسی قرار گرفته است. کران ارائه شده توسط استویکا در سال ۲۰۰۱، وقتی تعداد منابع بیشتر از تعداد عناصر آرایه باشند، قابل محاسبه نخواهد بود. این مقاله با استفاده از گسترش ابعاد داده‌ها به حقیقی و موهومی موفق به محاسبه کران کرامرئو در شرایط یادشده است. همچنین مقایسه خطای الگوریتم ارائه شده با کران کرامرئو انجام شد. نتیجه آنکه الگوریتم تخمین جهت منابع با استفاده از زیرفضای کرونکر توانسته است تا 7dB به کران نزدیک شود. علاوه بر آن عملکرد الگوریتم پیشنهادی در همبستگی بالا و همچنین با تعداد فریم کم بررسی شد که حکایت از توانایی بسیار خوب نسبت به الگوریتم‌های پیشین دارد.

7- References

۷- مراجع

- degrees of freedom," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 58, no. 8, pp. 4167-4181, Aug. 2010.
- [5] P.P. Vaidyanathan and P. Pal, "Sparse sensing with co-prime samplers and arrays," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 59, no. 2, pp. 573-586, Feb. 2011.
- [6] D. Ariananda and G. Leus, "Direction of arrival estimation for more correlated sources than active sensors," *Signal Process. (Elsevier)*, Vol.93, pp. 3435-3448, Dec. 2013.
- [7] S. M. Kay, *Fundamentals of Statistical Signal processing: Estimation Theory*, Prentice Hall, 1993.
- [8] P. Stoica, A. Nehorai, "Performance study of conditional and unconditional direction-of-arrival estimation," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Process.*, vol. 38, no.10, pp. 1783-1795, Oct 1990.
- [9] P. Stoica, E.G. Larsson, A.B. Gershman, "The stochastic CRB for array processing: a textbook derivation," *IEEE Signal Process. Lett.*, vol.8, no. 5, pp. 148-150, May 2001.
- [10] R. Schmidt, "Multiple Emitter Location and Signal Parameter Estimation," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. AP-34, No. 3, pp. 276-280, Mar. 1986.
- [11] A. Roger, R. Charles, *Topics in Matrix Analysis*, Cambridge University Press, 1991.
- [12] Y. I. Abramovich, N. K. Spencer, and A. Y. Gorokhov, "DOA estimation for noninteger linear Arrays with More Uncorrelated Sources than Sensors," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 48, pp. 943-955, Apr. 2000.
- [13] P. Chevalier, A. Ferreol, and L. Albera, "High-resolution direction finding from higher order statistics: The 2q-MUSIC algorithm," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 54, pp. 2986-2997, Aug. 2006.
- [14] P. Chevalier, L. Albera, A. Ferreol, and P. Comon, "On the virtual array concept for higher order array processing," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 53, pp. 1254-1271, Apr. 2005
- [15] Z. Chen, G. Gokeda, Y. Yu, *Introduction to Direction-of-Arrival Estimation*, Artech House press., 2010.
- [16] D. Johnson, D. Dudgeon, "Array signal processing, Concepts and Techniques," Prentice Hall, 1993
- [۱۷] م. کهانی، و. خان آقا (۱۳۸۹). مکان‌یابی منابع چندگانه صوتی در محیط انعکاسی به کمک BSS و استفاده از ویژگی‌های سیگنال گفتار برای رفع ابهام جایگشت عمومی. پردازش علائم و داده‌ها. ۷ (۱): ۶۴-۵۳.
- [17] MH. Kahaei, V. Khanagha, "Localization of Multiple Speakers in Echoic Environments Using

- [1] H. Krim and M. Viberg, "Two decades of array signal processing research, the parametric approach," *IEEE Signal Process. Mag.*, pp. 67-94, Jul. 1996.
- [2] L. Fulai, et al., "Spatial Differencing Method for DOA Estimation Under the Coexistence of Both Uncorrelated and Coherent Signals," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 60, no. 4, pp. 2052-2062; April 2012.
- [3] W. K. Ma, T. H. Hsieh, and C. Y. Chi, "DOA Estimation of Quasi-Stationary Signals With Less Sensors Than Sources and Unknown Spatial Noise Covariance: A Khatri-Rao Subspace Approach," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 58, no. 4, pp. 2168-2180, Apr. 2010.
- [4] P. Pal and P.P. Vaidyanathan, "Nested arrays: A novel approach to array processing with enhanced





سینا مجیدیان مدرک کارشناسی و کارشناسی ارشد خود را به ترتیب از دانشگاه شهید بهشتی (۱۳۹۲) و دانشگاه علم و صنعت ایران (۱۳۹۴) در رشته مهندسی برق - مخابرات اخذ کرد. ایشان از سال ۱۳۹۴ دانشجوی دکترا در دانشگاه علم و صنعت ایران است. زمینه تخصصی مورد علاقه ایشان پردازش سیگنال آرایه‌ای و پردازش داده‌های ژنومیک (بیوانفورماتیک) است. نشانی رایانامه ایشان عبارت است از :

s_majidian@yahoo.com



دکتر فرزانه حدادی تحصیلات خود را در مقاطع کارشناسی، کارشناسی ارشد و دکترا به ترتیب در سال‌های ۱۳۸۰، ۱۳۸۲ و ۱۳۸۸ در رشته مخابرات سیستم از دانشگاه صنعتی شریف به پایان رساند. ایشان از سال ۱۳۹۰ در سمت عضو هیأت علمی دانشگاه علم و صنعت ایران مشغول به تدریس و پژوهش هستند. زمینه‌های تخصصی مورد علاقه ایشان حس‌گری فشرده و پردازش سیگنال آماری است. نشانی رایانامه ایشان عبارت است از :

farzanhaddadi@iust.ac.ir