متافیزیک (مجله علمی ـ پژوهشی)
دانشکده ادبیات و علوم انسانی - دانشگاه اصفهان
دورهٔ جدید، سال چهارم، شماره ۱۴، پاییز و زمستان ۱۳۹۱، ص ۶۴-۵۱

مبانی فلسفی منطق شهودی

لطف‌الله نبوی* – سید محمدعلی حجتی** – حمید علایی‌نژاد***

چکیده

منطق شهودی، به عنوان منطقی فلسفی و غیر کلاسیک، بیش از همه بر فلسفه شهودگرایی براوئر (Brouwer) و نظریات فلسفی او در مورد ریاضیات و منطق بنا شده است. این نظریات، رویکردی کاملاً متفاوت را با رویکرد کلاسیک به منطق و ریاضیات عرضه می‌دارد. شهودگرایی براوئری، منطق را مقدم بر ریاضیات نمی شمرد و آن را نتیجه‌ای برساخته از روندهای ساخت هویات و براهین ریاضی می‌داند. در مقاله حاضر، به تبیین مبانی نظری منطق شهودی پرداخته خواهد شد. این نظریات شامل انتقادهای براوئر به ریاضیات و منطق کلاسیک و رویکرد خاص خود او به ریاضیات و منطق است.

واژه‌های کلیدی

براوئر، منطق شهودی، شهودگرایی، ساخت‌گرایی براوئری، اصل طرد شقّ ثالث.

* دانشیار فلسفه دانشگاه تربیت مدرس nabavi_l@modares.ac.ir
** دانشیار فلسفه دانشگاه تربیت مدرس hojatima@modares.ac.ir
*** دانشجوی دکتری دانشگاه تربیت مدرس (مسئول مکاتبات) hamid_alaeinejad@yahoo.com

تاریخ وصول: ۱۳۹۰/۲/۱۴ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۱/۱۲/۱

مقدمه

منطق شهودی، نتیجه دیدگاه‌های فلسفی براوئر (Brouwer) در مورد مبانی و فلسفه ریاضیات است که به شهودگرایی معروف است. رویکرد براوئر در حوزه منطق، منجر به بازنگری در مبانی منطق کلاسیک و شکل گیری منطقی غیر کلاسیک با نام منطق شهودی شد. منظور از شهودگرایی در اینجا، فلسفه‌ای است که در اوایل قرن بیستم توسط براوئر ارائه گردید. در آن زمان، منطق کلاسیک چندان رشد نیافته بود. اولین مقاله براوئر که به تبیین مبانی رویکرد وی به ریاضیات، ذکر مبانی فلسفی آن و جایگاه منطق و زبان از نظر او اختصاص دارد، در سال ۱۹۰۷ ارائه شد. او در این مقاله، برخلاف سنت رایج در زمان خود، منطق را مقدم بر ریاضیات و مبنای آن ندانست. از نظر او منطق روندی است که در توالی ساخت‌های ریاضیات برقرار است و از این رو، به ریاضیات وابسته است. از نظر براوئر، ریاضیات یک فعالیت ذهنی است و اشیای ریاضی در حقیقت ساختمان‌های ذهنی هستند که مشخصه‌های آنها توسط ساخت‌های ذهنی تعیّن می‌یابد. در این حالت، زبان هیچ نقشی در فرآیند شکل‌گیری ساخت‌های ریاضیات ندارد ولی استفاده از زبان برای بیان و در اشتراک گذاشتن این ساخت‌ها ضروری است. از طرفی زبان به یاری حافظه می‌آید و برای بیان ساخت‌های ذهنی ریاضیات و روابط میان آن‌ها به کار می‌رود. به این طریق است که زبان ریاضیات به وجود می‌آید. این زبان همان زبان استدلال منطقی است و بررسی مشخصه‌های ریاضی این زبان، منجر به پیدایش چیزی می‌شود که همان منطق نظری است.

براوئر به غیر از انتقاد به برتری منطق بر ریاضیات، انتقادات دیگری نیز بر رویکرد کلاسیک به منطق وارد کند. او اصل طرد شق ثالث را که در همه سیستم‌های منطق کلاسیک برقرار است، قبول ندارد؛ به این معنی که از نظر او چنین نیست که هر مسئله ریاضی، صادق یا کاذب باشد. چنین رویکرد متفاوتی به ریاضیات و منطق، نیاز به بازنگری در اصول منطق کلاسیک و بنا نهادن منطقی منطبق بر چنین دیدگاهی را نمایان می‌سازد.

خود براوئر در کارهایش، منطق شهودی را به عنوان نظامی صوری بنا ننهاد و سیستمی برای آن ارائه نکرد ولی برخی از قضایای این منطق را در کارهای خود و بر اساس اصول حاکم بر فلسفه شهودگرایی اثبات کرد. در فلسفه شهودگرایی براوئر، مفهوم صدق به مفهوم برهان احاله داده می‌شود. از آنجا که بر اساس فلسفه شهودگرایی براوئر صدق یک عبارت ریاضی توسط ارائه یک برهان مشخص می‌شود، معنای ادات منطقی و شرایط صدق جملات مرکب زبان منطق شهودی نیز باید توسط همین مفهوم« برهان‌پذیری» بیان شود. در منطق شهودی، یک برهان، نوعی ساخت است؛ به این معنا که برهان داشتن برای یک مسئله ریاضی ، به این معنا ست که ما یک الگوریتم ساختی برای حل آن مسئله داریم و این الگوریتم، طی یک فرآیند ساختی، ما را به حکم مورد نظر می‌رساند و به این طریق، مسئله را اثبات می‌کند.

در تأسیس سیستم‌های نحوی و معناشناسی منطق شهودی، همان ملاحظات فلسفی مورد نظر براوئر در فلسفه شهودگرایی به کار گرفته شده است. مبنای اساسی برای تشکیل سیستم‌های منطق شهودی، برقرار نبودن قاعده طرد شقّ ثالث است. از این رو نمی‌توان منطق شهودی را منطقی «توسعه یافته» و «نیمه کلاسیک» دانست زیرا بسیاری از قضایای منطق کلاسیک در منطق شهودی برقرار نیستند. در منطق شهودی، اعتبار اصل طرد شق ثالث که یکی از قضایای

ابتدایی منطق کلاسیک است، انکار می‌شود. در نتیجه این رویکرد، دیگر نمی‌توان از برهان خلف برای اثبات قضایا استفاده کرد. از این رو، منطق شهودی به عنوانی نوعی از منطق‌های «غیرکلاسیک» مطرح می‌گردد. در حقیقت، پاره‌ای از قضایای منطق کلاسیک در این نظام برقرار نیست ولی عکس آن برقرار است؛ یعنی تمامی قضایای منطق شهودی، در منطق کلاسیک قابل اثبات هستند. بنابراین منطق شهودی، به عنوان منطقی غیر کلاسیک تعریف می‌شود که قضایای آن، زیرمجموعه قضایای منطق کلاسیک می‌باشند. در ادامه و پیش از ورود به بحث در مورد مبانی فلسفی منطق شهودی و شهودگرایی، دو رویکرد مهم در مورد ارتباط میان منطق و ریاضیات شرح داده خواهد شد.

شهودگرایی در برابر منطق‌گرایی و صورت‌گرایی

در این قسمت، دو رویکرد مهم به مبانی ریاضیات که در مقابل رویکرد شهودگرایی قرار می‌گیرند، بیان می‌شود. شرح این دو رویکرد به این دلیل مورد توجه است که وجوه اختلاف میان نظریات مبنایی را در مورد ریاضیات و منطق مشخص می کند، و به گونه‌ای، مرزهای دیدگاه شهودگرایی را با دیدگاه‌های دیگر روشن می‌سازد.

هیتینگ (Heyting) (Heyting, 1971) مباحثه‌ای ترتیب می‌دهد که در آن، از هر سه دیدگاه شهودگرایی، منطق‌گرایی و صورت‌گرایی نماینده‌ای حضور دارد. طرف اصلی بحث، ظاهراً خود هیتینگ است که نماینده‌ی شهودگرایان است و نمایندگان دیگر دیدگاه‌ها به طرح سوالاتی دربارهٔ فلسفه شهودگرایی و در پاره‌ای موارد نقد آن و بیان رویکرد خود می‌پردازند. هیتینگ با طرح این مباحثه، به بیان مؤلفه‌های اساسی فلسفه شهودگرایی و منطق شهودی می پردازد و وجوه مشابهت و تمایز آن را با دیگر دیدگاه‌ها بیان می‌کند. در اینجا پس از معرفی دو رویکرد منطق‌گرایی و صورت‌گرایی به بیان دیدگاه شهودگرایی در مقابل هر یک از این دو رویکرد پرداخته خواهد شد.

منطق‌گرایی

از اواخر قرن نوزدهم، یعنی از حدود سال ۱۸۷۵ تا دهه سی قرن بیستم، شاهد تلاش‌های جدی و مستمری در مورد مبانی ریاضیات هستیم. در این بازه زمانی، سه رویکرد مبنایی، و البته متفاوت، به مبانی ریاضیات شکل گرفته‌اند: منطق‌گرایی، شهودگرایی و صورت‌گرایی. این سه رویکرد عمده، پس از ارائه اولین اصل ناتمامیت گودل در سال ۱۹۳۱، در حوزه‌هایی دچار دگرگونی شد و تا مباحث اخیر در مورد مبانی ریاضیات ادامه یافت.

کانت دانش ریاضیات را نوعی دانش پیشینی می‌داند که بر پایه شهود قرار دارد. فرگه (Frege) با این نظر کانت که شهود مکانی را پایه هندسه اقلیدسی می‌داند موافق است ولی برخلاف کانت، علم حساب را فاقد پایه شهودی می‌داند. از نظر فرگه، حقایق حسابی، حقایقی منطقی هستند و تنها می‌توانند به‌واسطه ابزارهای منطقیِ صرف دانسته شوند. فرگه در کتاب «مبانی حساب» قصد دارد نشان دهد که حساب، شاخه‌ای از منطق است و نیازی به تمسک به دیگر مبانی برهانی ندارد. فرگه برای بیان خود دو دلیل اصلی دارد. یکی اینکه، بر خلاف آنچه در مورد اصل توازی در هندسه اقلیدسی می‌توان بیان کرد، با فرض نقیض هر یک از اصول علم حساب، به ناسازگاری میان آن اصل و دیگر اصول می‌رسیم. دلیل دیگر اینکه این اصول به قدری کلی هستند که می‌توان آنها را در مورد همه چیز به کار برد. یعنی علم حساب و شمارش در مورد هر چیزی

که به اندیشه در آید، به کار می‌رود و از این رو، عمومیت و کلیتی مانند قوانین منطق دارد. فرگه آگاهی ما به صدق اصول موضوعه منطق و روش‌های استنتاج را نوعی دانش پیشینی می‌داند.

در این زمان، ددکیند (Dedekind) روی برنامه‌ای دیگر در منطق‌گرایی کار می‌کرد. او برای اولین بار سیستمی با اصول موضوعه برای اعداد طبیعی ارائه داد. در ریاضیات مدرن، مدل استاندارد ددکیند–پئانو برای اعداد طبیعی پذیرفته شده است. ددکیند نشان داد که با در نظر گرفتن مدل استاندارد برای حساب درجه دوم پئانو، هر جمله‌ای از این زبان یا نقیض آن، نتیجه‌ای منطقی از اصول موضوعه پئانو هستند. ددکیند اعداد طبیعی را نتیجه پردازش ذهن انسان و ساخته آزاد ذهن او می‌داند. او اثبات می‌کند که مجموعه بینهایت وجود دارد. تعریف او از چنین مجموعه‌ای به این صورت است که هر مجموعه‌ای که نگاشتِ یک به یک بین خودش و یک زیرمجموعه محض از آن وجود داشته باشد، بی‌نهایت است. وجود چنین مجموعه‌ای برای وجود یک سیستم نامتناهی لازم و کافی است. در نظریه مجموعه‌های مدرن، وجود چنین مجموعه‌ای، یکی از اصول موضوعه است ولی ددکیند باید نشان می‌داد که این اصل، نتیجه‌ای از منطق به آن طریق، اثبات شدنی است. یک تفاوت مفهوم مورد نظر ددکیند با درک رایج فعلی این است که در نظر پذیرفته شده فعلی، منطق باید از اظهار نظرهای هستی‌شناسی تهی و موضوعش خنثی باشد. از این رو منطق نمی‌تواند وجود اعداد طبیعی یا هر قسمت دیگر از ریاضیات را نتیجه دهد.

فرگه در ادامه کار خود، به یک زبان منطقاً کامل نیاز داشت که مشخصه‌های منطقی هر گزاره‌ای که در این زبان اظهار پذیر است، از فرم جمله‌ای که در آن به کار رفته است، به راحتی قابل تشخیص باشد و همچنین، تفسیر هر عبارت به اندازه‌ای واضح باشد که جای هیچ معنا یا فرض ضمنی را باز نگذارد. از این رو می‌توان کار فرگه را دارای سه بخش دانست. در ابتدا بیان یک زبان منطقاً کامل که شامل تعریف اصطلاحات منطق نیز باشد، سپس تشخیص و قرار داد جملاتی به عنوان اصول موضوعه و نیز قواعد استنتاجی که در آن سیستم معتبر شناخته می‌شوند و در نهایت، نمایش اینکه قواعد حساب، از این اصول موضوعه و با استفاده از قواعد استنتاج معتبر در آن استنتاج می‌شوند.

در مورد کار فرگه، می‌توان گفت که منطق‌گرایی او به عنوان نگرشی در فلسفه ریاضیات محسوب می‌شود که علم حساب را توسیع منطق در نظر می‌گیرد. گودل با اثبات اصل ناتمامیت (Incompiliteness Theorem) خود که نشان می‌دهد اگر ریاضیات سازگار است بعضی از قضایای آن قابل استنتاج نیستند، برنامه منطق‌گرایان را ناکام می‌گذارد. زیرا منطق درجه اول، هم سازگار است و هم تمامی قضایای آن اثبات پذیرند و از این رو ریاضیات نمی‌تواند توسیعی از منطق درجه اول باشد. در حقیقت، در هر سیستم منطقی سازگار، جملات حسابی درستی وجود دارند که در آن سیستم برهان‌پذیر نیستند.

صورت‌گرایی

مرحله مهمی در توسعه و پیشرفت ریاضیات، کار هیلبرت (Hilbert) در سال ۱۸۹۹ با نام «مبانی هندسه» بود. او با این نظر روزگار خود موافق بود که صدق منطقی به معنای سازگاری است. از نظر هیلبرت، هر شیء ریاضیِ سازگار وجود دارد. یعنی اگر اصولی فرضی با یکدیگر در تناقض نباشند، هم صادقند و هم چیزهایی که به‌واسطه آنها تعریف شده‌اند، وجود دارند. در حقیقت از نظر هیلبرت، عدم تناقض معیار صدق و وجود است. هیلبرت همواره به مسائل بنیادی در کار

ریاضی خود اهمیت نشان می‌داد. او در ابتدا به نظریات منطق‌گرایی ددکیند علاقه نشان داد ولی با کشف پارادوکس‌های موجود در آن، تغییر عقیده داد (Snapper, 1979: 5). او پس از آن سعی کرد که با براهین فرا ریاضیاتی (Meta-Mathematical) از سازگاری، نظریه‌های مبنایی ریاضیات مثل نظریه مجموعه‌ها را به دست آورد. او این کار را در سال ۱۹۲۰ و با عنوان برنامه نظریه برهان (Proof-Theoretic Programme) شروع کرد.

از نظر هیلبرت، ریاضیات تنها استخراج فرمول‌های معتبر از مجموعه ای از قواعد است. همچنین به بیان او، نمادها و علائم به کار رفته در ریاضیات فاقد معنا هستند. هیلبرت در کار خود، بی نهایتِ بالفعل را به فرا ریاضیات انتقال داد و محدوده کار ریاضیات را به فضایی فاقد بی نهایت بالفعل نسبت داد. از نظر صورت‌گرایان، ریاضیات می‌تواند به قواعدی برای ساختِ فرمول تحویل یابد. در چنین وضعی، هیچ احتیاجی به ارجاع به معنای فرمول‌های ساخته شده نیست. بر طبق نظر صورت‌گرایان، یک سیستم سازگار و دارای هستی‌شناسی قوی، همه آن چیزی است که برای به کار بستن ریاضیات مورد نیاز است. هیلبرت بر آن بود که سازگاری این سیستم صوری را در یک سیستم متناهی اثبات کند. او برای این هدف، نظریه برهان خود را طراحی کرد که هدفش نشان دادن این مطلب بود که سیستم‌هایی صوری نمی‌توانند بر طبق قواعد خود به نتیجه‌ای بی‌معنا و محال برسند.

نظریه برهان با این پیشنهاد هیلبرت آغاز شد که صدق و کذب برهان‌های ریاضی را که شامل استدلال‌های نامتناهی هستند توسط ابزارهای متناهی بررسی شود. در نظریه‌ی برهان، خود براهین مورد بررسی قرار می‌گیرند و موضوع ریاضیات می شوند. او می خواست به این طریق، سازگاری ریاضیات کلاسیک را توسط ریاضیات متناهی، اثبات کند. او با فرمول بندی برنامه خود نتیجه گرفت که ریاضیات کلاسیک می تواند در سیستم‌های صوری نظریه مجموعه‌ها یا نظریه انواع بیان شوند و این سیستم‌ها می توانند توسط روشی متناهی توصیف گردند. از نظر هیلبرت، به این طریق می‌شد مبنایی برای ریاضیات یافت که هم مورد قبول شهودگرایان باشد و هم ریاضیدانان کلاسیک (Snapper, 1979 : 5-6). ولی گودل با اثبات دومین اصل نامتناهی، نشان داد که چنین برهان سازگاری که مورد نظر هیلبرت است ممکن نیست (Kennedy, 2007, ch. 2-2).

نقد براوئر بر منطق‌گرایی و صورت‌گرایی

انتقاد براوئر به منطق‌گرایان این است که منطق را به عنوان مبنا در نظر گرفته‌اند و برای آن، ماهیتی زبانی قائل شده‌اند. از نظر براوئر، زبان منطق، امری عرَضی برای ریاضیات است و به هیچ وجه نمی‌توان ریاضیات را به زبان ریاضیات یا همان منطق تقلیل داد. براوئر باور دارد که ریاضیات، حاصل فعالیت‌های ذهنی است و منطق، قواعد موجود در ساخت‌های ریاضی است که موجودیت و اعتبار آن‌ها وابسته به ریاضیات است؛ اما منطق‌گرایان درصدد بودند که ریاضیات را حاصل فعالیت‌های منطقی بدانند و به این طریق، اساس ریاضیات را بر منطق قرار دهند. براوئر منطق‌گرایان را به دلیل ارائه برخی براهین غیر ساختی برای قضایای منطق مورد انتقاد قرار می‌دهد و چنین برهان‌هایی را بی‌اعتبار می داند و آن‌ها را نمی‌پذیرد.

برنامه هیلبرت به عنوان تلاشی میانی، بین ریاضیات کلاسیک و ریاضیات شهودگرایانه قرار دارد. انتقادات براوئر به برنامه هیلبرت در ریاضیات این بود که از نظر

صورت‌گرایان، دلیل انتخاب پاره‌ای از اصول به عنوان اصول اساسی ریاضیات و ترجیح آن‌ها بر دیگر اصول مشخص نیست. تنها پاسخ موجود، سازگار بودن آن اصول و مبنایی بودن آنها بر اساس درک متعارف است. در این حالت، صدق به عاری بودن از تناقض تحویل می‌یابد ولی در دیدگاه شهودگرایی، صدق به شهود فاعل شناسنده مربوط است. در شهودگرایی براوئر گزاره A صادق است چون ساخته شده است ولی در صورت‌گرایی، این گزاره صادق است چون به تناقض منجر نمی‌شود. همچنین براوئر به براهین صورت‌گرایان در اثبات سازگار بودن یک سیستم نیز انتقاداتی داشته - است که از موضوع بحث این مقاله خارج است.

دیدگاه‌های فلسفی براوئر

کارهای براوئر به این دلیل مورد توجه فیلسوفان بوده است که ریاضیات او بر اساس یک شناخت‌شناسی خاص، که همان مفهوم شهودگرایی اوست، یک هستی‌شناسی ویژه که مربوط به هستی‌شناسی ریاضیات و ساختی بودن اشیاء ریاضی است و همچنین براساس نقشی است که از آگاهی ریاضیات ارائه داده است. دیدگاه های او منطق و ریاضیات کلاسیک را در مواردی به چالش کشیده است و نظر او با نظر رایج در مورد ماهیت منطق و زبان متفاوت است.

شهودگرایی براوئری را می‌توان مبنای اساسی پیدایش منطق شهودی دانست. این شهودگرایی، در ارتباط بسیار نزدیکی با ساخت‌گرایی او قرار دارد. از نظر براوئر، اشیای ریاضی هنگامی وجود دارند که ساخته شوند و در حقیقت، توسط ذهن «آفریده» شوند. مفهوم «ساختی بودن» (Constractive) در فلسفه او به عنوان یک مفهوم پایه در نظر گرفته شده و تعریف نشده است ولی می‌توان تشخیص داد که آیا یک برهان ساختی برای گزاره یا شیئی ریاضی وجود دارد یا خیر. از نظر براوئر، خودِ این فرآیند آفرینشیِ ریاضیات، فاقد زبان است و فعالیتی صرفاً ذهنی است. در رویکرد براوئر، لزوم وجود زبان تنها برای برقراری ارتباط میان افراد و به خاطرسپاری و بازیابی آن براهین و اشیایی است که پیشتر و طی فرآیندی ساختی، در ریاضیات ساخته شده‌اند و به این طریق، به وجود آمده‌اند (فان آتن، ۱۳۸۷ : ۵۳-۲۳).

ریاضیات شهودگرایانه براوئر، مبانی فلسفی مشخصی دارد که وی از زمان شروع فعالیت خود در مقالات و سخنرانی‌های مختلف به آن‌ها اشاره می‌کند. کارهای براوئر در ریاضیات شهودگرایانه و پایه‌ریزی آن، از یک طرف در نتیجه دیدگاه‌های فلسفی او و در مورد ریاضیات و از طرف دیگر، با انتقادات او به ریاضیات کلاسیک شکل می‌گیرد. در ریاضیات براوئر هم جنبه مثبت، یعنی ایجاد یک سامان ریاضیات شهودگرایانه، و هم جنبهٔ منفی، یعنی نفی و رد برخی احکام ریاضیات کلاسیک وجود دارد. در مورد قسمت مثبت کارهای براوئر باید گفت که نظریات او شامل هر دو جنبه فلسفی و ریاضی می‌شود و در حقیقت، هر دوی این جوانب با تلفیق یکدیگر، براوئر را به هدف خود می‌رساند. او در مورد جنبه ریاضی کار خود، یک نظریه ساختی برای ریاضیات متناهی (Finite Mathematics)، به همراه نظریه مجموعه‌های جدیدی ارائه کرد. او این دستاوردهای ریاضی را توسط رویکرد فلسفی شناخت‌شناسانه و هستی‌شناسانه خود استوار کرد. این نظریات فلسفی براوئر، از یک رویکرد پدیدارشناسان (Phenomenological) حاصل می‌شوند.

پدیدارشناسی براوئر

تمامی نتایج و نظریات براوئر در بیان ریاضیات و منطق

شهودگرایی به گونه‌ای نتیجه‌ای از یک مبنای پدیدارشناسانه است که خود، از تجرید آگاهی اولیه ناشی می‌شود. از نظر براوئر، ریاضیات نوعی آفرینش ذهنی است که مستقل از تجربه و بر همه چیز مقدم است. از نظر براوئر، تنها شهودی که می‌توان آن را مقدم بر ریاضیات در نظر گرفت، شهود زمان است که وجود آن، شرطی مبنایی برای آفرینش ساخت‌های ریاضیات است. شهود از زمان چیزی است که پیش از اینکه زبانی داشته باشیم هم وجود دارد. ریاضیات که در نهایت بر اساس این شهود قرار دارد، مطالعه ساختمان‌هایی است که فاقد زبان است و نتیجه فعالیتی غیر زبانی است (فان آتن، ۱۳۸۷ :۱۸۳–۱۷۱)

بر اساس نظر براوئر، آگاهی اولیه چیزی رویا مانند (Dream-like) است که میان ادراکات حسی شخص وحالت اولیه ذهن او جریان دارد. به این معنی که توجه ذهن که در ابتدا معطوف به خود شخص است، به سمت ادراکات حسیِ صورت گرفته متمایل می‌شود و بدین طریق، آگاهی بالفعل آغاز می‌گردد. در طی این مراحل، فاعل شناسنده (Subject) میان مشخصه‌های گوناگونِ آگاهی به همراه محتوایشان، تمایز می‌نهد و میان آنها یک ترتیب و نظم برقرار می‌سازد. فاعل شناسنده، این فرآیند را ادامه می‌دهد و از این طریق، یک توالی دقیق ذهنی را شکل می‌دهد. این توالی‌ها به نوبه خود، ساختمان‌هایی هستند که قالب آگاهیِ فاعل شناسنده از اشیاء تجربی معمولی را تشکیل می‌دهند. براوئر برای توضیح رویکرد خود، از مفهومی به نام توجه علّی (Casual Attention) استفاده می‌کند. از نظر او، فاعل شناسنده به برخی از تشابهات در میان آگاهی‌های متمایز خود پی می‌برد. سپس این تشابهات را با آگاهی اولیه خود که به گونه متوالی و مرتبط با یکدیگر و یا در طی یک زنجیره علّی حاصل شده است، اسلوب‌بندی می‌کند. به این طریق، فاعل شناسنده آگاهیِ خود را از جهانِ دارای نظم و ترتیب به دست می‌آورد. بنابراین، علم تجربی، عکس العمل ذهن نسبت به این آگاهی علّی است.

از نظر براوئر، در چنین روند پدیدارشناسانه‌ای است که ریاضیات و یا شهود پایه‌ای ریاضیات به وجود می‌آید. هنگامی که آگاهی با دو چیز متمایز از هم مواجه می‌شود، تمامی کیفیات را از آن دوگانگیِ به وجود آمده حذف می‌کند و نتیجه اینکه تنها دو–تا بودن و تمایز میان دو چیز مجزا از هم باقی می‌ماند. این شهود بنیادی از دوگانگی یا دوتایی–بودن (Two-ity)، همان شهود مبنایی ریاضیات است. اعداد و اشیاء متناهی، از دست‌کاری کردن و تکرار کردن این دوتاییِ خالی از هرگونه کیفیت به وجود می‌آیند. این دوتایی، اساس تمام اعداد حقیقی و مبنای پدیدار شناسانه هویاتِ حسابیِ (Arithmetical Identity) معمول است. بنابراین ریاضیات، فعالیتی غیر تجربی، مجرد و کاملاً مستقل است.

براوئر بیان پدیدارشناسانه خود را ادامه می‌دهد و به دومین عمل شهودگرایانه اشاره می‌کند که منجر به ایجاد هویات جدید ریاضی می‌شود. در این عمل شهودگرایانه، با دنباله‌های نامتناهی و پیش‌رونده از هویاتی که پیشتر ساخته شده‌اند و نیز فرض ویژگی‌هایی برای این هویات مواجه هستیم. در نتیجه این عمل است که به انواع (species) ریاضیاتی می‌رسیم. او همچنین مفاهیمی مثل « پیوستگی»، «هویت» و... را از جمله مفاهیم پایه در نظر می‌گیرد و آن‌ها را تحویل‌ناپذیر به دیگر مفاهیم می‌داند. در نتیجه، براوئر یک بیان کامل از ساخت‌گرایی پدیدارشناسانه ارائه می کند. برای براوئر، ریاضیات اساس و چهارچوب فعالیت‌های تجربی نیست بلکه فعالیتی مستقل و بدون هیچ‌گونه

نقش تجربی در آن است. در ادامه، پیش از بیان رویکرد هستی‌شناسانه براوئر، به بیان توضیحی مختصر در مورد مفهوم ساخت‌گرایی نزد او پرداخته خواهد شد.

ساخت‌گرایی براوئر

فلسفه شهودگرایی براوئر، اصولاً به عنوان روشی ساختی در ریاضیات مطرح است. براوئر در رساله دکتری خود با عنوان «مبانی ریاضیات» به بیان نظریات خود در این مورد پرداخته است. از نظر او، ریاضیات با ساخت‌هایی سر و کار دارد که به طور مستقیم به ادراک ذهن در می‌آیند. خود این فرآیند، فاقد هر گونه زبانی است و تنها توسط شهود مستقیم انجام می‌گیرد. از این رو احکام ریاضی، خارج از فرآیند ساختیِ ذهن، بی‌معنی هستند. اشیاء یا احکامی در ریاضیات معنا دارند که بتوان توسط فرآیندی شهودی به ساختن آن‌ها پرداخت. تنها برای این احکام می‌توان ارزش صدق در نظر گرفت. در نتیجه، اگر برای گزاره‌ای ریاضی هیچ گونه برهان ساختی، نه برای خودش و نه برای نقیضش، نباشد، نمی‌توان گفت که یا خود آن گزاره صادق است و یا نقیضش. ریاضیات، فرآیندی ذهنی است و در طی این فرآیند، اشیاء ریاضی ساخته می‌شوند. یعنی بدون این فرآیند ساختی، هیچ شیء ریاضی وجود نخواهد داشت. در مورد اعداد طبیعی می‌توان این‌گونه بیان کرد: اندیشیدن به یک واحد مجزا و سپس واحد مجزای دیگر و ترکیب آن دو و ادامه این فرآیند، می‌تواند ما را به لحاظ ساختی به اعداد طبیعی برساند. لزومی ندارد فرآیند یاد شده یک به یک انجام گیرد. برای مثال اگر عدد $۱۰۰۰^{۱۰۰۰}$ را بخواهیم به لحاظ ساختی بسازیم، شاید به سال‌ها زمان نیاز داشته باشیم. ولی کافی است که الگوریتمی ساختی داشته باشیم که بتواند ما را به آن شیء ریاضی برساند.

این نکته حائز اهمیت است که براوئر کارکرد شهود را تنها در ساختن اشیاء ریاضی و محدود به همین امر می‌داند. یعنی شهود باعث دستیابی به دانش ریاضی خاصی نمی‌شود. در فعالیت ریاضی مورد نظر براوئر، قوای دیگری نیز مانند قوه حافظه دخیل هستند.

مثال زیر می‌تواند به روشن‌تر شدن مفهوم ساختی - بودن که در فلسفه براوئر مفهومی تعریف نشده است کمک کند. فرض کنید A یک حکم ریاضی است که نه اثباتی برای خودش وجود دارد و نه برای نقیضش. حال p را این گونه تعریف می‌کنیم :

$$p \begin{cases} ۰ & \text{اگر } A \text{ صادق باشد} \\ ۱ & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

از آنجا که صدق یا کذب A معلوم نیست، هیچ گاه نمی‌توان با یک برهان ساختی p را معین کرد. چنین تعریفی اگر چه به ظاهر مقبول به نظر می‌رسد، از نظر ساخت‌گرایی قابل قبول نیست زیرا به هیچ طریق ساختی نمی‌توان مقدار p را مشخص کرد.

براوئر و هستی‌شناسی ریاضیات

همانند آنچه در فلسفه کانت مشاهده می‌شود، ریاضیات برای براوئر، دانشی است ترکیبی و پیشین (Synthetic Apriori) که بر شهود محض بنا شده است. ریاضیات پیشینی است زیرا حاصل اولین فعالیت‌های ذهن انسان است و در فرآیندی پدیدارشناسانه رخ می‌دهد. همچنین ریاضیات، دانشی ترکیبی است زیرا به ما معرفت جدیدی می‌دهد. ریاضیات از لحاظ شناخت‌شناسانه کاملاً از داده‌های حسی مستقل است و برای علوم تجربی به عنوان یک مبنای لازم تلقی می‌شود. استقلال ریاضیات از داده‌های تجربی به این دلیل است که فرآیند ساخت ریاضیات به

خود متکی است و هیچ‌گاه برای تایید یا ردّ آنچه در ریاضیات به دست می‌آید، به داده‌های تجربی رجوع نمی‌شود. از نظر براوئر، با رعایت فرآیند بیان شده برای ساخت اشیاء ریاضی از داشته‌های قبلیِ خود، هیچ‌گونه محدودیتی ندارد و اشیائی که ساخته می‌شوند، کاملاً مجردند و هیچ‌گونه تاثیری از داده‌های حسی نمی‌پذیرند.

هستی‌شناسی ریاضیات برای براوئر، نتیجه‌ای از رویکرد شناخت‌شناسانه او به فرآیند شکل‌گیری ریاضیات است. از نظر براوئر، هر شیئی که توسط فرآیند ساختی ریاضیات حاصل شود، وجود دارد. در حقیقت، براوئر وجود را به امکان ساخته شدن (Constructability) منوط کند، و یا با آن پیوند می‌زند. اشیاء ریاضی اگر ساخته نشده باشند وجود نیز نخواهند داشت (Dummet, 1975: 240-243).

انتقادات براوئر به ریاضیات کلاسیک

هر گونه نظر و عقیده‌ای برای بازبینی در ریاضیات، باید در ابتدا به ایرادهای وارد بر آنچه که پیش از این بازبینی وجود داشته است، پاسخ گوید و سپس تعیین کند که این اشتباهات یا پارادوکس‌ها در نتیجه کدام یک از اصول یا مفاهیم بنیادی حاصل شده‌اند. در نهایت، مشخص سازد که چگونه با برقراری پیشنهاد خود برای جایگزینی آن اصل یا اصولی که منجر به تناقض شده‌اند، مشکلات عنوان شده حذف می‌شوند.

مراحل کار براوئر دقیقاً مشابه همین روند یاد شده است. براوئر با تکیه بر مبانی فلسفی خاص خود، انتقاداتی بر ریاضیات کلاسیک وارد کرد و کوشید این ایرادات را با پایه‌ریزی ریاضیات شهودگرایانه حل کند. کار او را می‌توان به گونه‌ای بازنگری در مبانی ریاضیات بر طبق مبانی شهودگرایانه و ساخت‌گرایانه خود دانست. منظور از ریاضیات کلاسیک در اینجا، ریاضیات مدرنی است که در قرن نوزدهم و بیستم، و بدون اساس قرار دادن مفهوم «شهود» برای ریاضیات، به دست آمده است.

براوئر بر اساس فلسفه شهودگرایی خود توانست مشکلات موجود در مبنای نظری اعداد طبیعی، نظریه مجموعه‌ها و هستی‌شناسی اشیاء ریاضی را از میان بردارد. براوئر با تحلیل موقعیتی که در مبانی ریاضیات وجود داشت، نتیجه گرفت که کاربرد منطق به عنوان مبنای ریاضیات نامعتبر است بلکه این مبنا باید در ساختمان‌های فاقد زبان ذهنی و شهود زمان قرار داده شود. او همچنین بیان کرد که چیزی که برای ریاضیات ایجاد مشکل می‌کند، اصل طرد شق ثالث و کاربرد آن برای موارد نامتناهی است.

براوئر ریاضیات را فاقد زبان می‌دانست و به طور مبنایی، با رویکرد دیگر ریاضیدانان در مورد زبان ریاضیات مخالف بود. انتقادات او به زبان و منطق، بسیار اساسی و مبنایی بود. از نظر براوئر، ریاضیات علاوه بر صورت، محتوا نیز دارد. ولی این محتوا، نه اشیائی مستقل از ذهن بلکه ساخته‌های ذهن هستند و هیچ استدلال ریاضی نمی‌تواند وجود مستقل از ذهن آنها را فرض بگیرد. او هر آنچه از ریاضیات را که در نتیجه اعمال منطق کلاسیک بر داده‌های ریاضی به - دست آمده باشد قبول نمی‌کند زیرا به اعتبار یکی از اصول اساسی این منطق که همان اصل طرد شق ثالث است، باور ندارد. از نظر او نمی‌توان برهانی را که تنها شامل تناقض نباشد قبول کرد، زیرا هم اعتبار اصل طرد شقِّ ثالث را قبول ندارد و هم اینکه معتقد است از آن-جا که در چنین برهانی هیچ روشی برای ساختِ آنچه اثبات می‌شود وجود ندارد، نمی‌توان ادعا کرد که نتیجه مورد نظر حاصل شده است.(Blum, 2005: 7-8).

از نظر براوئر، ریاضیات فرآیندی است که در آگاهی شخص صورت می‌گیرد. پس ممکن است اعتبار آن دسته اصول منطقی و ریاضی که در فضای متناهی برقرار هستند، در فضای نامتناهی دیگر بر قرار نباشد.

از نظر براوئر، اصول این همانی، محال بودن تناقض و قیاس، هم در مورد فضای متناهی و هم نامتناهی اعتبار دارند ولی اصل طرد شق ثالث، تنها در فضاهای متناهی اعتبار دارد.

براوئر و ارتباط ریاضیات، زبان و منطق

براوئر در مقاله ۱۹۰۷ خود، دیدگاهش در مورد ارتباط میان ریاضیات، زبان و منطق را بیان کرده است (Brouwer, 1907). تمامی عقاید براوئر در مورد منطق شهودی، در مفهوم این ارتباط نهفته است. برای براوئر، ریاضیات محض اصولاً بر اساس ساخت‌های ذهنی مشخص قرار دارد. براوئر بیان می‌کند که تنها مبنای ممکن برای ریاضیات، باید در طی فرآیند ساخت و تحت الزام اینکه شهود، کدام ساخت را مجاز می‌داند و کدام یک را مجاز نمی‌داند، جستجو شود. براوئر نشان داده است که چگونه طی چنین فرآیندی، حساب آنالیز و توپولوژی ریاضیات می‌توانند ساخته شوند. براوئر هر اندیشه‌ای را که خود قسمی از ریاضیات نیست، کاربردی از ریاضیات می‌داند؛ به این دلیل که هرگاه ما آگاهانه به دو چیز مجزا می‌اندیشیم، با طرح همان مفهوم دوتایی مجزا این کار را انجام می‌دهیم که، همان‌طور که بیان شد، اساس ریاضیات است.

از نظر براوئر، با به کارگیری زبان می‌توان فرآیند ساختی ریاضیات را شرح داد ولی خود این فرآیند به اجزای زبانی بستگی ندارد و در نتیجه، هیچ امرِ صادقی در مورد این فرآیند ساختی ریاضیات، صدق خود را مدیون واقعیات زبانی نیست. برای مثال، اصول موضوعه می‌توانند برای توضیح یک ساخت ذهنی استفاده شوند ولی نمی‌توانند به آن ساخت ذهنی موجودیت ببخشند. به همین دلیل، برخی از اصول موضوعه مشخصی که در ریاضیات کلاسیک و مخصوصاً در برنامه منطق‌گرایانی چون فرگه و راسل مورد نظر است، توسط فلسفه شهودگرایی براوئر رد می‌شوند. برای مثال، اصل کمال برای اعداد حقیقی را در نظر بگیرید که می‌گوید: اگر یک مجموعه غیر تهی از اعداد حقیقی یک کران بالا داشت، آنگاه یک کوچکترین کران بالا دارد. در این مثال، ما هیچ روش کلی که به ما اجازه دهد به طور ذهنی یک کوچک ترین کران بالا بسازیم در اختیار نداریم؛ در حالیکه وجود این حد، توسط اصل کمال برای اعداد حقیقی ادعا می‌شود و به همین دلیل، از نظر فلسفه ریاضیات شهودی براوئر قابل قبول نیست (Van Atten, 2009:ch. 2.1).

از نظر براوئر، شهود ریاضیات امری مفهومی نیست و نمی‌تواند توسط زبان جایگزین شود. در حقیقت، هیچ شیء نمادینی نمی‌تواند محتوای لحظه آگاهی را گزارش دهد. براوئر در مورد زبان صوری برای ریاضیات این نظر را دارد که همراهی زبان صوری و ریاضیات مانند همراهی یک نقشه هوایی با فرآیند تحلیل جوی است. در این صورت، فرآیند صوری‌سازی ریاضیات اگر چه کاربرد فراوانی دارد ولی هیچ معنای بنیادی برای ریاضیات ارائه نمی‌دهد. براوئر می‌گوید که ما به طور عملی، هم برای در اشتراک گذاشتن نتایج با دیگران و هم برای یادآوری و بازسازی نتایج قبلی خودمان در ریاضیات به زبان نیازمندیم ولی تاکید می‌کند که هر چه استفاده ما از این زبان کمتر باشد بهتر است.

منطق در اندیشه براوئر، الگوهای مشخصی را برای ضبط فعالیت‌های ما در ساخت‌های ریاضیات سازماندهی می‌کند. با این بیان، منطق تعبیر، کاربردی از ریاضیات به زبان ریاضیات است. منطق الگوهایی را بررسی می‌کند که منجر به دستیابی به نتایج درست می‌شود. هدف منطق، برقراری الگوهایی کلی است که اگر در مورد ساخت‌های ریاضیات به کار روند و آن ساخت ریاضی اصلی حامل یک صدق ریاضی باشد، جمله‌ای که از اعمال این الگو بر آن حاصل می‌شود نیز حامل صدق باشد. منطق، صدق ساخت‌های ریاضیات

را از مقدمات استدلال به نتیجه استدلال منتقل می‌کند. ولی برخلاف منطق کلاسیک، از نظر براوئر آنچه که از مقدمات به نتیجه منتقل می‌گردد، یک توانایی ساخته شدن (Constructability) است نه نوعی از صدق که صرفاً از مقدمات به نتیجه تسری یابد. به بیان دیگر، در این حالت هر ساخت مشخص در ریاضیات می‌تواند بدون نیاز به ساخت دیگری ساخته شود و مانند دیگر ساخت‌های ریاضیات و مستقل از بقیه، وجود خواهد داشت.

نکته اساسی این است که براوئر، ماهیت منطق را توصیفی (Descriptive) می‌داند و به هیچ وجه برای آن حیثیت آفرینندگی (Creative) قائل نیست. او معتقد است که به وسیله منطق هرگز نمی‌توان صدق‌های ریاضی را به گونه‌ای معین کرد که توسط فرآیندی ساختی نتوان به آن دست یافت. از این روست که در توسعه ریاضیات شهودی، منطق هرگز نمی‌تواند یک نقش اساسی بازی کند. در حقیقت، در رویکرد براوئر به منطق و ریاضیات، منطق، تابع ریاضیات است نه اینکه ریاضیات، تابع منطق باشد. اینجاست که تفاوت در رویکرد به منطق در فلسفه شهودی براوئر، با رویکرد کلاسیک به منطق، که منطق را به عنوان اساس و مقدم بر هر چیز در نظر می‌گیرد، مشاهده می‌شود. از نظر براوئر، به این دلیل که منطق مانند هر اندیشه دیگری کاربردی از ریاضیات است، ریاضیات را پیش‌فرض خود می‌گیرد (Van Dalen, 2002 : 10-12).

رد اصل طرد شق ثالث

براوئر بارها به این مسئله اشاره می‌کند که یک اشتباه ریاضیات کلاسیک، ادعای وجود چیزهایی است که در واقع وجود ندارند. او دلیل این مسئله را به در نظر نگرفتن تفاوت میان اشیاء متناهی و نامتناهی نسبت می دهد. ریاضیات در ابتدا تنها به اشیاء و سیستم‌های متناهی مربوط بود که اصل طرد شق ثالث (Excluded Middle) در آنها برقرار و معتبر بود. از نظر براوئر، قاعده طرد شق ثالث، تنها در حالت متناهی فرمول‌بندی شده است و ما برخلاف دیگر قواعد منطق، در حالت نامتناهی مجاز به استفاده از این قاعده نیستیم(Brouwer, 1923 : 14).

براوئر در کارهای خود، قواعد منطق کلاسیک را قابل اعتماد (Reliable) نمی‌داند. دلیل او برای این امر، به مفهوم مورد نظر او و از ارتباط میان ریاضیات، زبان و منطق بر می‌گردد. براوئر بیان می‌کند که از آنجا که قواعد منطق روی اشیاء زبانی عمل می‌کنند و این اشیاء زبانی می‌توانند به طور مجزا از متنی ریاضی که در آن یک صدق ریاضی را توصیف می‌کنند به کار روند، ممکن است قواعد منطق را برای اشیاء زبانی به کار ببریم که این اشیاء به هیچ متنی از ریاضیات مربوط نباشند. در حقیقت، این قواعد منطقی از متنی که در آن می‌توانند به کار روند استقلال دارند ولی درستی خودشان به متن حساس است. به این معنی که هیچ تضمینی وجود ندارد که قواعد منطقی که در یک متن معتبر هستند، در یک متن دیگر نیز معتبر باشند.

براوئر در مقاله ۱۹۰۸ خود، یکی از نتایج رویکرد کلی خود به منطق را بیان می‌کند. این قاعده همان قاعده طرد شق ثالث یا **PEM** (مخفف عبارت Principle of Excluded Middle) است. به بیان براوئر، این قاعده که در منطق کلاسیک به عنوان یک قضیه یا توتولوژی و به صورت $(A \vee \neg A)$ بیان می‌شود، معتبر نیست. دلیل این اعتقاد او به شهودگرایی‌اش در مورد منطق برمی‌گردد. از نظر براوئر، اگر اصل طرد شقّ ثالث در منطق شهودی معتبر باشد، به این معنا است که ما برای هر حکمِ A روشی در اختیار داریم که یا به ما ساختی برای A می‌دهد و یا نشان می‌دهد که ارائه چنین ساختی غیر ممکن است ولی ما چنین روشی در ریاضیات نداریم. مسائلِ باز بسیاری در ریاضیات وجود دارد. برای مثال، براوئر بیان می‌کند که قابل حل بودن مسائلی مانند «آیا در بسط اعشاری عدد π، رقمی

وجود دارد که بیشتر از بقیه تکرار شده باشد؟» قطعی نیست. در حقیقت، این مسائل برای اعتبار اصل طرد شق ثالث، مثال نقض محسوب می‌شوند.

برای مثال حدس گلدباخ (Goldbach's Conjection) را در نظر بگیرید که بیان می‌کند: هر عدد زوجِ بزرگتر یا مساوی ۴، مجموع دو عدد فردِ اول است. این اصل را با حرف G نشان می‌دهیم. برای مثال ۱۸=۵+۱۳ ، ۶۸=۷+۶۱، ۳۰۰ =۱۴۹+۱۵۳و... . واضح است که ما با این روش تنها می‌توانیم، در صورت وجود، یک مثال نقض برای این اصل بیابیم ولی این روش چیزی را اثبات نمی‌کند. می‌دانیم که در حال حاضر هیچ استدلال و اثباتی برای این حدس یا برای اثبات کاذب بودن آن ارائه نشده است. با این شرایط، مسئله این است که آیا در این حالت می‌توان معتبر بودن کاربرد اصل طردِ شقّ ثالث برای این حدس را پذیرفت یا خیر. یعنی آیا می‌توان به درستی بیان کرد: $(G \vee \neg G)$؟ اگر بخواهیم چنین ادعایی کنیم باید ساختی داشته باشیم که مشخص کند کدام یک از این دو، G یا $\neg G$، دارای برهان است. ولی ما چنین ساختی در دست نداریم و هیچ اساسی برای پذیرفتن صدقِ $(G \vee \neg G)$ نداریم. براوئر از مثال‌هایی مانند این استفاده کرد تا نشان دهد برخی از قضایای ریاضیات کلاسیک معتبر نیستند. مثال‌های براوئر نشان می‌دهند که تا به حال، برخی از احکام ریاضی هیچ برهانی نداشته اند ولی امکان کشف چنین برهانی رد نشده است. یک فضای ریاضی که اصل طرد شقّ ثالث در آن معتبر باشد، باید متناهی باشد. در چنین فضایی، هر یک از ساخت‌ها متناهی است و می‌توان همه آن‌ها را بررسی کرد که آیا به نتیجه می‌رسند یا خیر. در نتیجه، در فضای متناهی از ریاضیات، مسئله باز وجود ندارد.

در حقیقت، آنچه که براوئر نشان می‌دهد اثبات نشدن گزاره‌ای در ریاضیات است نه اثبات نقیض آن. به عبارتی براوئر نشان می‌دهد که $\nvdash A$ ولی نشان نمی‌دهد که $\vdash \neg A$. از نظر براوئر این که اصل طرد شقّ ثالث معتبر نیست، به هیچ وجه به این معنا نیست که این اصل، غلط است. زیرا فرض کذب اصل طرد شقّ ثالث یعنی $\neg (A \vee \neg A)$ نتیجه می‌دهد که $(\neg A \& \neg\neg A)$ و نتیجه اخیر، یک تناقض (Contradiction) است. به همین منظور، در منطق شهودی برای جلوگیری از رسیدن به تناقض، نقیضِ نقیضِ اصل طرد شقّ ثالث، $\neg\neg(A \vee \neg A)$ ، صادق است. از اینجا براوئر نتیجه می‌گیرد که استفاده از اصل طرد شقّ ثالث، همیشه سازگار (Consistent) یا غیر متناقض است ولی نمی‌توان مدعی شد که همیشه به صدق منجر می‌شود. استدلالی که از این قاعده استفاده کند، اگر چه صدق نتیجه خود را به اثبات نمی‌رساند ولی سازگاری نتیجه خود را در پی دارد. به این معنی که ممکن است نتیجه چنین استدلالی صادق نباشد ولی حتماً با مقدمات خود سازگار است. ادعای اینکه تمامی مسائل ریاضیات قابل حل هستند، با این ادعا که هیچ مسئله غیر قابل حلّی در ریاضیات وجود ندارد، یکسان نیست. ادعای دوم نسبت به ادعای اولی ضعیف‌تر است. ادعای اولی، معادل عبارت $A \vee \neg A$ است و ادعای دوم را می‌توان به صورت $\neg\neg(A \vee \neg A)$ بیان کرد. از نظر براوئر و بر اساس فلسفه شهودگرایی او، ادعای دوم قابل اثبات است ولی ادعای اول معتبر نیست (Kolmogorov, 1925 :420-422).

نتیجه

براوئر رویکرد شناخت‌شناسانه و هستی‌شناسانه ویژه‌ای به ریاضیات و منطق دارد، و ریاضیات را مقدم بر منطق می‌شمارد. منطق شهودی به عنوان منطقی غیر کلاسیک، نتیجه رویکرد براوئر به منطق و انتقادات او به ریاضیات و منطق کلاسیک است. در سیستم‌های منطق شهودی، اصل طرد شقّ ثالث معتبر نیست و در نتیجه، بسیاری از قضایای منطق کلاسیک در آن‌ها برقرار

نیست. همچنین برهان خلف نیز به عنوان روشی برای اثبات قضایا که با فرض نقیض حکم و رسیدن به تناقض، درستی حکم را نتیجه می‌دهد، در این منطق معتبر شمرده نمی‌شود. این نتایج، همگی از اصول فلسفی حاکم بر دیدگاه‌های براوئر حاصل شده‌اند. مهم ترین دیدگاه‌های او را می‌توان شهودگرایی و ساخت-گرایی در ریاضیات دانست که خود، نتیجه رویکرد پدیدارشناسانه براوئر به ریاضیات است.

منابع

- اردشیر، محمد (۱۳۷٦) شهودگرایی براوئری، **نشر ریاضی** ، سال ۹ شماره ۱: ۱۹-۵.
- براوئر ، ل. ا. ی (۱۳۷٦) شهودگرایی و صورت-گرایی، ترجمه محمد اردشیر، **نشر ریاضی**، سال ۹، شماره ۱: ۳۵-۳۰.
- فان آتن، مارک (۱۳۸۷) **فلسفه براوئر**، ترجمه محمد اردشیر، تهران: هرمس.
- هاک سوزان (۱۳۸۲) **فلسفه منطق**، ترجمه سید محمد علی حجتی، طه، تهران.
- صدرزاده، مهرنوش (۱۳۷۹) مبانی فلسفی شهودگرایی از دیدگاه براوئر، پایان نامه کارشناسی ارشد، به راهنمایی دکتر محمد اردشیر، فلسفه علم دانشگاه شریف تهران.

-Blum, K, (2005) Construction, Solipsism, and Intuitionistic Mathematics, **Macalester Journal of Philosophy**, Vol. 14, Issue 1, Article 8.

-Bridges, D *(*2009*)* «**Constructive Mathematics**
http://plato.stanford.edu/entries/mathematics-constructive.

- -------- (1907) «**On the Foundations of Mathematics**», Thesis, Amsterdam; English translation in Heyting, ed., 1975: 11-101.

--------- (1908) «**The Unreliability of the Logical Principles**», English translation in Heyting, ed., 1975: 107-111.

--------- (1913) «Intuisionism and Formalism», **Bulletin of the American Mathematical Society**, Vol. 37, No. 1:55-64, Article electronically published on December 21, 1999.

-------- (1923) reprinted in 1954, «On the significance of the principle of excluded middle in mathematics, especially in function theory», Addenda and corrigenda, and Further addenda and corrigenda, English translation in van Heijenoort, ed., 1967: 334-345.

-------- (1948) «Consciousness, philosophy and mathematics», originally published (1948), reprinted in Benacerraf and Putnam, eds., 1983: 90-96.

-------- (1952) «Historical Background, Principles and Methods of Intuitionism», South African Journal, p. 139-146.

-Burgess, P. John (2009) **Philosophical Logic**, Princeton Foundation of Contemporary Philosophy, Princeton University Press.

-Dummett, M. (1975) «the Philosophical Basis of Intuitionistic Logic», printed in: *Studyies in Logic and the Foundation of Mathematics, Vol. 80*, North-Holland Publishing Company, Edited by: Rose, H. E., and Shepherdson, J. C., , pp. 5–40.

-Heyting, A (1968) *L. E. J. Brouwer, in Contemporary Philosophy, a Survey,* and Formalism», *Mathematics Magazine*, Vol. 52, 1979, p. 207-216.

-Tait, W. (2006) «Gödel's Interpretation of Intuitionism", **Philosophia Mathematica,** Series III, Volume14, Number2, Special Issue: Kurt Godel on Mathematics and Logic

-Troelstra, A. S., Van Dalen, D., (1988), **Constructivism in Mathematics: an Introduction,** Vol. 1, North -Holland.

-Van Atten,M. (2009) «The Development of Intuitionistic Logic», **Stanford**, First published Thu Jul 10, 2008; substantive revision Wed Apr 1, 2009 *http://plato.stanford.edu/entries/intuitionistic-logic-development.*

-------- (1999a) «The Role Of Language and Logic in Brouwer's Work», In **Logic in Action**, Springer, Vienna.

-------- (1999b) *a* **Bibliography of L. E. J. Brouwer**, Utrecht Logic Group Preprint, no. 176.

-------- (2002) «**Intuitionistic Logic**», Handbook of Philosophical Logic, 2nd Edition, Volume 5, edited by Gabbay, Dov M., Guenthner, F.

-Van Atten, M. (2002) «**Intuitionism, a Companion to Philosophical Logic**», Edited by: Jacquette, Dale, **Blackwell Companions to Philosophy**, Blackwell, Oxford.

Vol. 1: Logic and Foundation of Mathematics, R. Klibansky, 308-315.

--------(1971) **Intuitionism, an Introduction**, North-Holland publishing Company.

-Iemhoff, R. (2008) «Intuitionism in the Philosophy of Mathematics», *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, http://plato.stanford.edu/entries/intuitionism.

-Kleene, S. C. (1952) **Introduction to Mathematics**, North-Holland, Amesterdam.

-Kolmogorov, A. (1925) «on the Principle of the Excluded Middle», in Jean van Heijenoort, 1967. **A Source Book in Mathematical Logic**, 1879–1931. Harvard Univ. Press: 414–37.

-Kreisel, G. (1962) *Foundations of Intuitionistic Logic, Logic,* **Methodology and Philosophy of Science**, proceeding of the 1960 international congress, Edited by: Nagel, Ernest, Suppes, Patrick, Tarski, Alfred, Standford University Press.

-Moschovakis, J (2010) «Intuitionistic Logic», **in the Stanford Encyclopedia of Philosophy**, First published Wed Sep 1, 1999; http://plato.stanford.edu/entries/logic-intuitionistic.

-Placek, T. (1997) «On Brouwer's Criticism of Classical Logic and Mathematics", printed in: *Logic and Logical Philosophy*, Volume5.

-Posy, C. (2005) **Intuitionism and Philosophy**, *the Oxford Handbook of: Philosophy of Mathematics and Logic*, Edited by, Shapiro, Stewart, Oxford University Press.

-Snapper, E. (1979) «the Three Crises in Mathematics: Logicism, Intuiotionism