



دانشگاه گواران

نشریه پژوهش‌های حفاظت آب و خاک

جلد بیست و پنجم، شماره دوم، ۱۳۹۷

<http://jwsc.gau.ac.ir>

DOI: 10.22069/jwsc.2018.13878.2862

## تصمیم‌گیری تخصیص آب در شرایط عدم قطعیت با استفاده از بهینه‌سازی چندهدفه همتای استوار

### امید نصیری قیداری<sup>۱</sup> و \* صفر معروفی<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup> دانشجوی دکتری مهندسی منابع آب، گروه علوم و مهندسی آب، دانشگاه بوعلی سینا،

آستاد گروه علوم و مهندسی آب، دانشگاه بوعلی سینا

تاریخ دریافت: ۹۶/۴/۲؛ تاریخ پذیرش: ۹۷/۱/۲۶

#### چکیده

**سابقه و هدف:** نظر به وجود عدم قطعیت در داده‌های مرتبط با مسائل منابع آبی، ضرورت طراحی سیستم بهینه منابع آب که از اطمینان‌پذیری بالایی در شرایط وقوع عدم قطعیت برخوردار باشد، بیش از پیش احساس می‌گردد. ماهیت چندبعدی مسائل تخصیص بهینه آب نیز منجر شده که لحاظ نمودن اهداف متضاد چندگانه درون مدل‌های بهینه‌سازی اجتناب‌ناپذیر باشد. هدف از این پژوهش ارائه یک مدل بهینه‌سازی کمی - کیفی تخصیص آب است که ضمن برقراری تعادل میان اهداف اقتصادی و زیست‌محیطی، در برابر عدم قطعیت‌های موجود، استوار باقی بماند.

**مواد و روش‌ها:** با کمک اهداف بیشینه نمودن درآمد کل سیستم و کمینه نمودن بار آلودگی ورودی به رودخانه، مدل قطعی پژوهش ساخته شده و در مطالعه موردی سیستم رودخانه‌ای دز - کارون به کار گرفته شد. با مد نظر قراردادن عدم قطعیت جریان رودخانه و تقاضاهای آبی و به کارگیری رویکرد بهینه‌سازی استوار برتسیماس و سیم، مدل قطعی به یک مدل بهینه‌سازی چندهدفه استوار ارتقاء یافت. حساسیت مدل استوار نسبت به تغییرات سطوح عدم قطعیت و نیز احتمال تخطی قید مختلف مورد بررسی قرار گرفت. حل مسأله از طریق روش اسپیلون محدودیت انجام شد و ارزیابی مدل استوار از طریق مقایسه نتایج آن با مدل قطعی صورت پذیرفت. نقطه زانوی جواب‌های نامغلوب به عنوان جواب انتخابی از میان مجموعه جواب‌های بهینه، مورد استفاده قرار گرفت.

**یافته‌ها:** نتایج حاصل از به کارگیری روش توسعه یافته در تخصیص بهینه منابع آب مطالعه موردی این پژوهش بیانگر کارایی و توانایی آن در حل سریع و دقیق مسأله بود. مقایسه جواب بهینه نقاط زانو نشان داد که مقاوم‌سازی مدل بهینه‌سازی در برابر عدم قطعیت‌ها به صورت لحاظ نمودن سطح عدم قطعیت و احتمال تخطی قیود ۰/۱ به منظور جلوگیری از شکست در تأمین آب، ملزم به کاهش بهره‌برداری از آب رودخانه از ۸۳۰۱/۵ به ۷۲۹۱/۲ میلیون مترمکعب در سال و تعدیل درآمد اقتصادی حاصل سیستم از ۸۰۸،۶۳۶،۱ به ۶۹۳،۳۶۵،۱ میلیون ریال در سال در مقایسه با مدل قطعی می‌باشد. این شرایط موجب بهبود وضعیت بار آلودگی تولیدی از ۹۴۹،۵۳ به ۵۰۵،۴۸ تن در سال خواهد شد. نتایج نشان داد که رویکرد استوار مورد استفاده در این مطالعه قادر است بدون افزودن پیچیدگی به مدل قطعی، امکان ایمن‌سازی نتایج حاصل در برابر عدم قطعیت‌ها را فراهم آورد و تصمیم‌گیر می‌تواند با تعیین سطح

\* مسئول مکاتبه: marofisafar59@gmail.com

عدم قطعیت و مقدار احتمال تخطی قید، درجه استواری مدل تخصیص منابع آب را انتخاب نموده و امکان سازش میان مقادیر اهداف و سطح اطمینان‌پذیری سیستم را فراهم آورد.

**نتیجه‌گیری:** نتایج بیانگر رضایت‌بخش بودن، قابلیت اطمینان بالا و انعطاف‌پذیری مدل استوار پیشنهادی این پژوهش می‌باشد. بر این اساس، مدل خطی ارائه شده در این مطالعه ضمن کاربری ساده، می‌تواند به‌عنوان یک ابزار تصمیم‌گیری کارآ جهت تخصیص بهینه منابع آب مورد استفاده قرار گیرد.

**واژه‌های کلیدی:** تخصیص آب، روش اپسیلون محدودیت، عدم قطعیت، نقطه زانو، همتای استوار

### مقدمه

رشد سریع جمعیت، لزوم استانداردهای بالاتر زندگی و آلودگی شدید آب ناشی از گسترش فعالیت‌های کشاورزی و صنعتی منجر به افزایش تقاضا برای آب شده است که این امر اختلافات اجتماعی و زیست‌محیطی در سطح جهانی را به دنبال داشته است. تخصیص بهینه منابع آب رودخانه می‌تواند به‌عنوان یکی از گزینه‌های کارا برای رفع مشکل تقاضای روزافزون آب و تأمین ناکافی نیازهای آبی مطرح باشد (۲۰).

به‌دلیل ماهیت چندبعدی و پیچیده مسائل مدیریت منابع آب، استفاده از بهینه‌سازی چندهدفه در مطالب مرتبط با آن مانند بحث تخصیص آب به شکل قابل‌توجهی مدنظر قرار گرفته است (۷). برای مثال، بابل و همکاران (۲۰۰۵) یک مدل چندهدفه برای تخصیص آب در تایلند ارائه نمودند که هدف آن بیشینه نمودن رضایت کل نیازهای آبی و نیز سود اقتصادی خالص کل حاصل سیستم بود (۳). آنقیلری و همکاران (۲۰۱۳) نیز یک مدل چندهدفه برای حل اختلاف بین بخش کشاورزی و تولید برقابی در حوضه آلباین ایتالیا توسعه دادند (۱). توابع هدف مدل ایشان کمینه نمودن کمبود تقاضای آبیاری و بیشینه نمودن تولید برقابی بود. با وجود استفاده قابل‌توجه از بهینه‌سازی چندهدفه و لحاظ نمودن اهداف مختلف در مسئله تخصیص آب، به‌دلیل دشواری‌های کمی‌سازی اهداف زیست‌محیطی، به این هدف کم‌تر توجه شده است (۱۷).

علاوه بر مسأله لحاظ نمودن اهداف زیست‌محیطی در مسأله تخصیص آب، مشکل دیگری نیز در مدل بهینه‌سازی مطرح می‌باشد و آن چالش مربوط به مشخص نبودن مقدار دقیق برخی داده‌های ورودی مسأله بهینه‌سازی می‌باشد. در مدل‌سازی قطعی، فرض بر این است که مقادیر همه متغیرهای مسأله به‌طور دقیق مشخص می‌باشد. تحت شرایط وجود عدم قطعیت در داده‌ها، مدل‌سازی قطعی مسأله به جواب غیربهینه منجر خواهد شد و بنابراین دخیل نمودن عدم قطعیت‌های مسأله و مدل‌سازی غیرقطعی، امری اجتناب‌ناپذیر می‌باشد.

طی دهه‌های اخیر، رویکردهای مختلفی برای مواجهه با عدم قطعیت در داده‌های ورودی مسائل بهینه‌سازی منابع آبی و تخصیص آب مورد استفاده قرار گرفته است که از جمله آن‌ها می‌توان به استفاده از مفاهیم فازی، برنامه‌ریزی تصادفی و روش‌های مقید به شانس اشاره نمود. همایونی‌فر و رستگاری‌پور (۱۳۸۹) به تخصیص بهینه آب سد لتیان با به‌کارگیری مدل بهینه‌سازی دومرحله‌ای نادقیق و برنامه‌ریزی فازی بازه‌ای پرداختند (۱۵). در پژوهش هوانگ و همکاران (۲۰۰۹) نیز جهت در نظر گرفتن عدم قطعیت‌های موجود در مسأله، از ترکیب برنامه‌ریزی تصادفی، مجموعه‌های فازی و برنامه‌ریزی مقید به شانس استفاده شد (۱۸). در روش‌های مزبور فرض می‌شود که تابع عضویت فازی و یا تابع توزیع احتمالاتی داده‌های غیرقطعی معلوم می‌باشد. به‌دلیل آن‌که این توابع داده‌ها دقیقاً معلوم نیست، این فرض غیرواقعی است (۱۶).

اصلی بهینه‌سازی فرم خطی داشته باشد، فرمول‌نویسی استوار آن مسأله، فرم غیرخطی خواهد داشت.

برتسیماس و سیم (۲۰۰۴) روش بهینه‌سازی همتای استواری را ارائه نمودند که در آن فرمول‌نویسی مدل همتای استوار یک مسأله خطی، هم‌چنان خطی باقی‌مانده و بنابراین غیرخطی نمی‌گردد (۶). به‌رغم استفاده وسیع از رویکرد ایشان در سایر علوم (لی و اِراپرتیتو، ۲۰۰۸؛ محقر و همکاران، ۲۰۰۹؛ صادقی و خاکسار آستانه، ۲۰۱۴؛ سنخایی و همکاران ۲۰۱۶؛ ارجمنندی و همکاران، ۲۰۱۶) این روش در مسائل منابع آبی کم‌تر مورد توجه قرار گرفته است (۲، ۱۹، ۲۲، ۲۵ و ۲۶). از جمله مطالعات صورت گرفته در مباحث منابع آبی، می‌توان به پژوهش چانگ و همکاران (۲۰۰۹) جهت طراحی یک سیستم تأمین آب در شرایط عدم قطعیت و صبوحی صابونی و مردانی (۲۰۱۳) برای طراحی شبکه عرضه آب در حوضه زاینده‌رود اشاره نمود که نتایج این دو پژوهش بیانگر آن است که رویکرد مورد استفاده ضمن کارایی مناسب، پیچیدگی مدل بهینه‌سازی را افزایش نمی‌دهد (۸ و ۲۴).

تاکنون استفاده ترکیبی از رویکرد بهینه‌سازی چندهدفه و بهینه‌سازی همتای استوار در مسأله تخصیص بهینه آب مورد استفاده قرار نگرفته است. بهینه‌سازی چندهدفه به‌منظور مدنظر قرار دادن اهداف متضاد اقتصادی و زیست‌محیطی و بهینه‌سازی همتای استوار جهت لحاظ‌نمودن عدم قطعیت‌های مهم مسأله تخصیص آب استفاده می‌گردد. به‌نظر می‌رسد استفاده از این رویکرد ترکیبی (بهینه‌سازی چندهدفه همتای استوار) بتواند امکان ارائه جبهه جواب‌های استوار را فراهم آورد. این جواب‌ها می‌توانند در مقابل تغییرات داده‌های مسأله همچنان استوار و شدنی باقی بمانند و بنابراین از قابلیت اتکای بالاتری برخوردار باشند. سیستم رودخانه‌ای دز- کارون به‌عنوان مطالعه موردی جهت بررسی کارایی مدل توسعه یافته، در نظر گرفته شده است. جهت انتخاب جواب ترجیحی مسأله، از نقطه زانوی جبهه جواب‌های نامغلوب استفاده

رویکرد دیگری که جهت مقابله با عدم قطعیت داده‌ها در مسائل بهینه‌سازی می‌توان به‌کار گرفت، استفاده از روش بهینه‌سازی استوار می‌باشد. این روش چارچوبی را مهیا می‌نماید که جواب‌های مدل غیرقطعی در برابر وقوع تغییرات پارامترها، استوار و بهینه باقی‌مانده و مسأله غیرشدنی نمی‌شود. بهینه‌سازی استوار شامل دو رویکرد احتمالاتی و غیراحتمالاتی می‌باشد. رویکرد احتمالاتی آن که توسط مولوی و همکاران (۱۹۹۵) ارائه شده، به روش «مبتنی بر سناریو» معروف است (۲۳) روش ایشان برخی مشکلات روش برنامه‌ریزی تصادفی مانند الزام به استفاده از تابع توزیع احتمال، مضافاً پیچیدگی محاسباتی و دشواری ایجاد نمونه معرف از سناریو با استفاده از تابع توزیع احتمال را داراست (۱۶).

روش‌های غیراحتمالاتی بهینه‌سازی استوار، رویکردهای مدرن بهینه‌سازی استوار هستند که «بهینه‌سازی همتای استوار» نیز نامیده می‌شوند. در فرمول‌بندی این روش‌ها، عدم قطعیت توسط تابع توزیع احتمال بیان نمی‌شود. به‌عبارت دیگر، در این روش‌ها نیازی به شناسایی تابع توزیع احتمال داده غیرقطعی نیست و در آن‌ها ابتدا فرم اصلی (قطعی) مسأله نوشته می‌شود و سپس فرمول‌نویسی استوار (غیرقطعی) بر آن اعمال می‌شود.

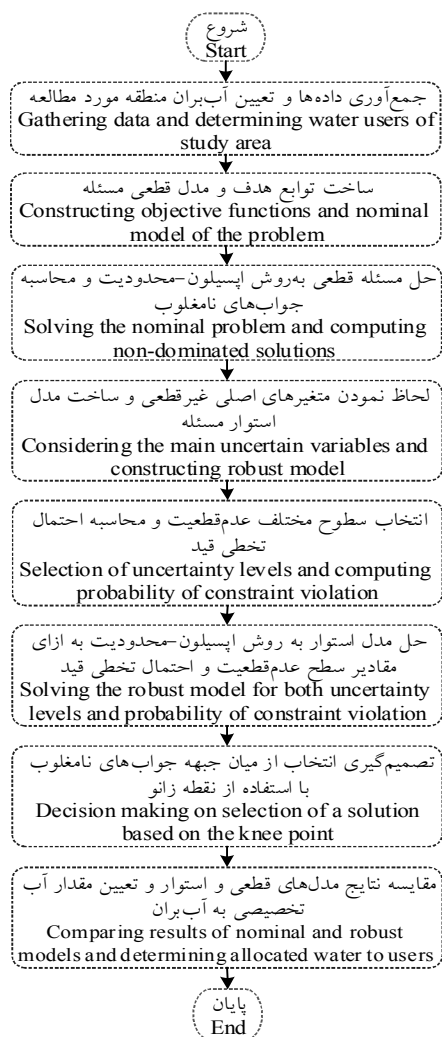
یکی از اولین پژوهش‌ها در زمینه بهینه‌سازی همتای استوار توسط سویستر (۱۹۷۳) صورت گرفت (۲۷). در مدل محافظه‌کارانه ایشان همه انحراف‌های ممکن مقادیر داده‌های غیرقطعی در نظر گرفته می‌شد و بازنویسی فرمول مسأله قطعی (اصلی) به‌نحوی بود که به‌ازای وقوع همه انحراف‌های ممکن در مقدار داده‌ها، مسأله بهینه‌سازی هم‌چنان شدنی باشد. به مرور روش‌های بهینه‌سازی همتای استوار جدیدتری در پژوهش‌ها (القآوری و لبرت، ۱۹۹۷؛ القآوری و همکاران، ۱۹۹۸؛ بن-تال و نمیروفسکی، ۱۹۹۹؛ بن-تال نمیروفسکی، ۲۰۰۰) ارائه شد (۴، ۵، ۱۲ و ۱۳) در این روش‌ها به‌رغم پیشرفت‌های حاصل، چنان‌چه مسأله

مسأله تخصیص آب ارائه می‌گردد. با به‌کارگیری روش بهینه‌سازی همتای استوار معرفی شده بر روی مدل قطعی، مدل استوار (غیرقطعی) این پژوهش توسعه می‌یابد. نتایج مدل‌های قطعی و غیرقطعی چندهدفه به‌صورت جبهه‌ای از جواب‌های بهینه بوده که تصمیم‌گیری در خصوص انتخاب یک جواب از میان جواب‌های موجود نیز در بخش مواد و روش‌ها مورد بحث قرار می‌گیرد. تشریح منطقه مورد مطالعه و تشریح روش‌شناسی پژوهش نیز در انتهای بخش مواد و روش‌ها صورت می‌پذیرد. شکل ۱ فلوچارت مراحل انجام این پژوهش را نمایش می‌دهد.

می‌شود. حساسیت مدل چندهدفه استوار ارائه شده به سطوح عدم قطعیت و احتمال تخطی قیود مختلف مورد بررسی قرار می‌گیرد. خطی بودن مدل ارائه شده می‌تواند به سهولت اجرا و تصمیم‌گیری منجر شود.

### مواد و روش‌ها

به‌منظور توسعه مدل بهینه‌سازی چندهدفه همتای استوار، ابتدا به‌طور مختصر مفاهیم «بهینه‌سازی چندهدفه اپسیلون-محدودیت» و سپس روش «بهینه‌سازی همتای استوار» برتسیماس و سیم تشریح می‌گردد. در ادامه با در نظر گرفتن درآمد اقتصادی و آلودگی زیست‌محیطی به‌عنوان دو تابع هدف مسأله، فرمول‌نویسی مدل قطعی



شکل ۱- فلوچارت مراحل مورد استفاده جهت تصمیم‌گیری تخصیص آب در شرایط عدم قطعیت.  
Figure 1. A flowchart of the water allocation decision making under uncertainty.



$$\varepsilon_w = f_w^N + \left[ \frac{e}{c-1} \right] (f_w^M - f_w^N) \quad e=0,1,2,\dots,(c-1). \quad (8)$$

که در آن،  $f_w^M$  و  $f_w^N$  به ترتیب مقادیر کمینه و بیشینه  $w$  امین تابع هدف هستند و  $e$  بیانگر تعداد  $\varepsilon_w$  می باشد که برای ایجاد جواب های بهینه نامغلوب استفاده شده است.

**بهینه سازی همتای استوار:** پیش تر عنوان شد که در روش بهینه سازی همتای استوار نیازی به مدنظر قرار دادن تابع توزیع احتمال متغیرهای قطعی نیست. در میان فرمول بندی های مختلف همتای استوار، برتسیماس و سیم (۲۰۰۴) روشی را ارائه نمودند که همتای استوار مدل بهینه سازی خطی، همچنان خطی باقی می ماند (۶). فرمول بندی مدل خطی می تواند به صورت ذیل صورت پذیرد:

$$\text{Min } c'x \quad (9)$$

s.t.

$$a_i x \leq b_i \quad \forall i \quad (10)$$

$$x \geq 0 \quad (11)$$

که در آن،  $i$  امین محدودیت  $a_i x \leq b_i$  در نظر گرفته شده و  $J_i$  به عنوان مجموعه ضرایب غیرقطعی  $(a_{ij})$  در  $i$  امین محدودیت  $(j \in J_i, \tilde{a}_{ij})$  مدنظر قرار می گیرد. فرض می شود هر پارامتر غیرقطعی  $\tilde{a}_{ij}$  می تواند در بازه  $[a_{ij} - \hat{a}_{ij}, a_{ij} + \hat{a}_{ij}]$  که  $\hat{a}_{ij}$  انحراف در هر پارامتر غیرقطعی  $\tilde{a}_{ij}$  و  $a_{ij}$  مقدار قطعی پارامتر غیرقطعی است، تغییر کند که  $\hat{a}_{ij} = \eta_{ij} a_{ij}$  بوده و  $\eta_{ij}$  بیانگر سطح عدم قطعیت است که درون بازه  $[1, \eta]$  قرار دارد. با معرفی  $\Gamma_i$  برای هر  $i$  که بودجه عدم قطعیت نامیده می شود و می تواند در بازه  $[0, |J_i|]$  تغییر کند، تعدیل

بهینه سازی چندهدفه اپسیلون محدودیت: حل مسائل بهینه سازی چندهدفه مقادیری را به عنوان جواب نهایی بهینه سازی معرفی می نماید که منعکس کننده سازش میان تمام اهداف می باشد. مدل چندهدفه متداول می تواند به صورت ذیل نوشته شود:

$$\text{Min } f(x) = [f_1(x), f_2(x), \dots, f_q(x)] \quad (1)$$

s.t.

$$g_r(x) \leq 0, \quad r=1,2,\dots,y \quad (2)$$

$$x_j \geq 0, \quad j=1,2,\dots,v \quad (3)$$

که در آن،  $[f_1(x), f_2(x), \dots, f_q(x)]$  مجموعه ای از توابع هدف،  $x_j$   $j$  امین متغیر تصمیم و  $g_r(x)$   $r$  امین محدودیت تابع است. در روش بهینه سازی چندهدفه اپسیلون محدودیت، یک تابع هدف  $(f_k)$  بهینه شده و سایر اهداف مورد بررسی  $(f_w, w \in [1, q], w \neq k)$  به مقادیر حد بالا و پایین محدود می شوند. حالت محدودیت وار مسأله فوق می تواند به صورت ذیل نوشته شود (۱۴):

$$\text{Min } f_k(x) \quad (4)$$

s.t.

$$f_w(x) \leq \varepsilon_w, \quad w=1,\dots,q, \quad w \neq k \quad (5)$$

$$g_r(x) \leq 0, \quad r=1,2,\dots,y \quad (6)$$

$$x_j \geq 0, \quad j=1,2,\dots,v \quad (7)$$

که در آن،  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{k-1}, \varepsilon_{k+1}, \dots, \varepsilon_w)$  مربوط به حد بالا و پایین سایر اهداف (بهینه نشده) و  $k$  به عنوان تابع هدف مورد بررسی (انتخاب شده) می باشد. جواب های بهینه نامغلوب می تواند با مدنظر قرار دادن مقادیر مختلف  $\varepsilon_w$  مطابق رابطه ۸ محاسبه گردد.

$$\lambda_i + \mu_{ij} \geq \hat{a}_{ij} x_j, \forall i, j \in J \quad (17)$$

$$\lambda_i \geq 0, \forall i \quad (18)$$

$$\mu_{ij} \geq 0, \forall i, j \in J \quad (19)$$

$$x_j \geq 0, \forall j \quad (20)$$

که در آن،  $\lambda_i$  و  $\mu_{ij}$  متغیرهای کمکی مورد نیاز مربوط به فرمول‌بندی همتای استوار هستند. چنانچه کم‌تر از  $\Gamma_i$  پارامتر از مقدار قطعی‌شان تغییر کنند، شدنی بودن جواب تضمین شده می‌باشد. اگر بیش از  $\Gamma_i$  پارامتر دچار تغییر شود، جواب استوار (بر اساس معادله ذیل) هم‌چنان با احتمال بالایی شدنی باقی خواهد ماند:

$$P\left(\sum_j \tilde{a}_{ij} x_j^* > b_i\right) \leq B_i(n, \Gamma_i) \quad (21)$$

که رابطه فوق‌الذکر بیانگر احتمالی است که در اثر وقوع عدم قطعیت در بیش از  $\Gamma_i$  پارامتر، قید  $i$  ام رعایت نشده و بنابراین دچار تخطی شود. این احتمال تخطی قید با  $\alpha$  نمایش داده می‌شود. نحوه محاسبه  $\Gamma_i$  و همچنین احتمال شدنی باقی ماندن مدل در برتسیماس و سیم (۲۰۰۴) تشریح شده است (۶).

**مدل بهینه‌سازی چندهدفه تخصیص آب:** فرمول‌نویسی مدل بهینه‌سازی قطعی این پژوهش شامل اهداف پیشینه‌سازی سود کل آب‌بران و کمینه نمودن بار آلودگی تخلیه شده به رودخانه، به صورت معادله ذیل بیان می‌گردد:

نمودن سطح محافظت مدل و بررسی میزان استواری سیستم در مقابل شکست، امکان‌پذیر می‌شود. هنگامی که  $\Gamma_i = 0$  است، عدم قطعیت صرف‌نظر خواهد شد و هنگامی که  $\Gamma_i = |J_i|$  باشد، محدودیت  $i$  به طور کامل در برابر عدم قطعیت مقاوم خواهد بود. وقتی که  $\Gamma_i \in [0, |J_i|]$  باشد، سازشی میان میزان استواری مطلوب و بهینگی مهیا خواهد بود. برتسیماس و سیم (۲۰۰۴) نشان دادند می‌توان رابطه ۱۱-۹ را به صورت ذیل نوشت (۶):

$$\text{Min } c'x \quad (12)$$

s.t.

$$\sum_j a_{ij} x_j + \max_{\substack{S_i \cup \{i\} \\ |S_i| = \Gamma_i}} \left\{ \sum_{j \in S_i} \hat{a}_{ij} x_j + (\Gamma_i - |S_i|) \hat{a}_{ii} x_i \right\} \leq b_i \quad \forall i \quad (13)$$

$$x \geq 0 \quad (14)$$

بر پایه روش ایشان، با در نظر گرفتن  $x^*$  به عنوان جواب بهینه رابطه ۱۳، تابع محافظت (تابع ذیل):

$$\beta_i(x^*, \Gamma_i) = \max_{\Omega} \left\{ \sum_{j \in S_i} \hat{a}_{ij} x_j^* + (\Gamma_i - |S_i|) \hat{a}_{ii} x_i^* \right\}$$

می‌تواند به صورت بهینه‌سازی خطی لحاظ گردد. بنابراین، جواب استوار می‌تواند بدون افزایش پیچیدگی‌های مسأله بهینه‌سازی، به صورت خطی حل شود. در نهایت، مدل همتای استوار می‌تواند به صورت رابطه ذیل بیان شود:

$$\text{Min } c'x \quad (15)$$

s.t.

$$\sum_j a_{ij} x_j + \lambda_i \Gamma_i + \sum_{j \in J} \mu_{ij} \leq b_i \quad \forall i \quad (16)$$

استوار می‌گردد (۶). به منظور تحقق این امر، عدم قطعیت تقاضای آب و نیز آب در دسترس رودخانه مدنظر قرار گرفت و معادله‌هایی از مدل قطعی که شامل این پارامترها می‌باشند بازنویسی شد. نتیجتاً مدل قطعی به مدل همتای استوار تخصیص آب تبدیل شد. فرمول‌بندی مدل غیرقطعی به شرح ذیل حاصل گردید:

$$\text{Max } f_1(x) = \sum_u \sum_c P_{uc} B_{uc} \sum_m a_{umc} \quad (27)$$

$$\text{Min } f_2(x) = \sum_u \sum_m \sum_c (l_{um} C_{um} a_{umc}) \quad (28)$$

s.t.

$$\sum_u \sum_c a_{umc} + \lambda_1 \Gamma_1 + \mu_{1m} \leq q_m \quad \forall m \quad (29)$$

$$\lambda_1 + \mu_{1m} \geq \eta_q q_m \quad \forall m \quad (30)$$

$$a q_m + \lambda_2 \Gamma_2 + \mu_{2m} \leq \sum_u \sum_c a_{umc} \quad \forall m \quad (31)$$

$$\lambda_2 + \mu_{2m} \geq a \eta_q q_m \quad \forall m \quad (32)$$

$$a_{umc} + \lambda_3 \Gamma_3 + \mu_{3umc} \leq D_{umc} \quad \forall u, m, c \quad (33)$$

$$\lambda_3 + \mu_{3umc} \geq \eta_D D_{umc} \quad \forall u, m, c \quad (34)$$

$$b D_{umc} + \lambda_4 \Gamma_4 + \mu_{4umc} \leq a_{umc} \quad \forall u, m, c \quad (35)$$

$$\lambda_4 + \mu_{4umc} \geq b \eta_D D_{umc} \quad \forall u, m, c \quad (36)$$

$$\sum_u \sum_c DI_{umc} \leq \sum_u T_{um} \quad \forall m \quad (37)$$

که در آن،  $\eta_D$  و  $\eta_q$  به ترتیب سطوح عدم قطعیت،  $\lambda_i$  و  $\mu_i$  به عنوان متغیرهای کمکی برای فرمول‌بندی استوار و پارامتر  $\Gamma_i$  برای کنترل سطح محافظه‌کاری استفاده شده است.

$$\text{Max } f_1(x) = \sum_u \sum_c P_{uc} B_{uc} \sum_m a_{umc} \quad (22)$$

$$\text{Min } f_2(x) = \sum_u \sum_m \sum_c (l_{um} C_{um} a_{umc}) \quad (23)$$

s.t.

$$a q_m \leq \sum_u \sum_c a_{umc} \leq q_m \quad \forall m \quad (24)$$

$$b D_{umc} \leq a_{umc} \leq D_{umc} \quad \forall u, m, c \quad (25)$$

$$\sum_u \sum_c DI_{umc} \leq \sum_u T_{um} \quad \forall m \quad (26)$$

که در آن‌ها،  $u$  تعداد آب‌برها،  $c$  تعداد گیاهان کشت‌شده توسط هر آب‌بر،  $m$  تعداد ماه‌ها،  $P$  بهره‌وری گیاه کشت‌شده  $c$  مربوط به آب‌بر  $u$  ( $\text{kg/m}^3$ )،  $a_{umc}$  آب تخصیصی به آب‌بر  $u$  در ماه  $m$  مربوط به گیاه  $c$  (میلیون مترمکعب)،  $C_{um}$  کیفیت زه‌آب بازگشتی متغیر کیفی  $TDS$  ( $\text{mg/l}$ ) مربوط به آب‌بر  $u$  در ماه  $m$ ،  $B$  سود کل خالص گیاه  $c$  آب‌بر  $u$  (ریال بر کیلوگرم)،  $D_{ijc}$  تقاضای آبی گیاه  $c$  ام آب‌بر  $u$  ام در دوره زمانی  $m$  (میلیون مترمکعب)،  $l_{um}$  مقدار ضریب آب برگشتی به رودخانه آب‌بر  $u$  ام در دوره زمانی  $m$  جریان رودخانه در دوره زمانی  $m$  (میلیون مترمکعب)،  $T_{um}$  مقدار مجوز تخلیه بار آلودگی آب‌بر  $u$  ام در ماه  $m$  (تن در ماه)،  $DI_{umc}$  مقدار بار آلودگی تخلیه‌شده توسط گیاه  $c$  ام آب‌بر  $u$  ام در ماه  $m$  (تن)،  $a$  و  $b$  به ترتیب ضرایبی جهت مشخص نمودن کران‌های پایین تقاضای آبی و جریان رودخانه می‌باشند.

توسعه مدل چندهدفه همتای استوار تخصیص آب: به‌کارگیری رویکرد بهینه‌سازی استوار برتسیماس و سیم (۲۰۰۴) بر روی مدل بهینه‌سازی چندهدفه تخصیص آب (مدل قطعی)، منجر به ایجاد مدل چندهدفه همتای

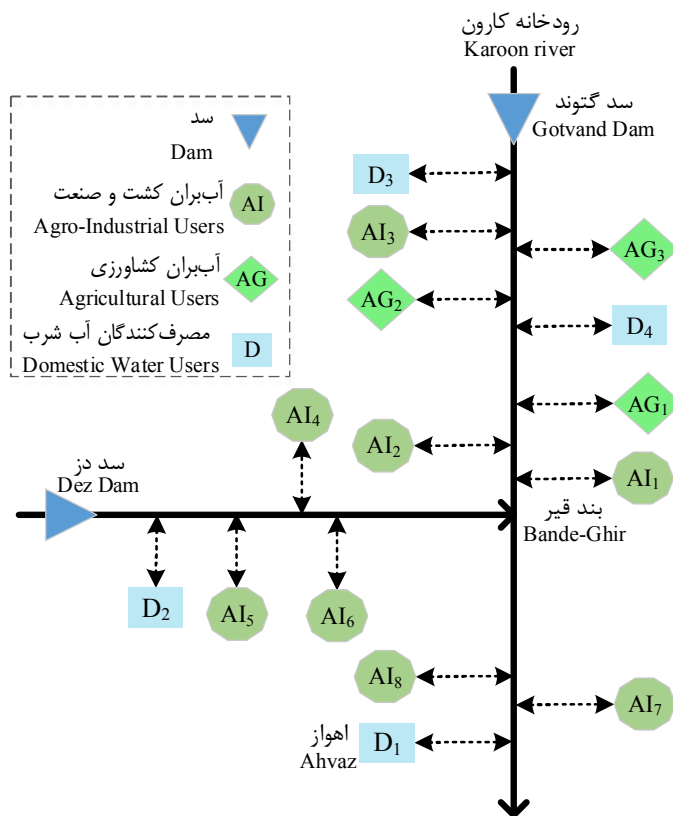
برای مصارف کشاورزی و کشت و صنعت ۰/۳ و مصارف شرب ۰/۵ در نظر گرفته شد و از داده‌های ماهانه متوسط درازمدت استفاده شد. شاخص کیفی مورد استفاده در پژوهش  $TDS$  می‌باشد.

جدول ۱ مقادیر نیاز آبی سالانه مصرف‌کنندگان مختلف، جدول الگوی کشت آب‌بران کشاورزی و جدول مقدار متوسط غلظت کل جامد محلول در جریان برگشتی آب‌بران منطقه مورد مطالعه این پژوهش را نشان می‌دهد. نیشکر تنها گیاه تحت کشت آب‌بران کشت و صنعت بوده و گندم بیش‌ترین سهم کشت را در میان گیاهان مختلف آب‌بران کشاورزی داراست. در میان آب‌بران مختلف کشاورزی و کشت و صنعت، بیش‌ترین مقدار تقاضای آبی ماهانه مربوط به آب‌بر  $AI_2$  با مقدار  $582/4$  میلیون مترمکعب در ماه و کم‌ترین تقاضای آبی ماهانه مربوط به آب‌بر  $AG_1$  با مقدار  $1/4$  میلیون مترمکعب در ماه می‌باشد.

روش‌شناسی پژوهش: در این مطالعه مدل چندهدفه استوار به‌ازای چهار سطح عدم‌قطعیت شامل  $\eta=0/20$ ،  $\eta=0/10$ ،  $\eta=0/05$  و نیز سه احتمال تخطی قیود شامل  $\alpha=0/1$ ،  $\alpha=0/3$  و  $\alpha=0/7$  برای جریان رودخانه و تقاضای آبی، اجرا گردید و از این طریق حساسیت مدل استوار تحت شرایط مختلف عدم‌قطعیت، مورد بررسی قرار گرفت. مدل قطعی مسأله به‌عنوان مبنایی جهت ارزیابی مدل چندهدفه همتای استوار (مدل غیرقطعی) قرار گرفت. با عنایت به وجود دو هدف در مسأله، از روش «اپسیلون محدودیت» که یکی از روش‌های متداول و مناسب حل مسائل بهینه‌سازی چندهدفه بوده و قادر به ارائه مجموعه جواب‌های نامغلوب است، استفاده شد. نرم‌افزارهای GAMS و MATLAB جهت فرمول‌نویسی مسأله، مورد استفاده قرار گرفتند.

انتخاب از میان جواب‌های نامغلوب: حل مسائل بهینه‌سازی چندهدفه به جبهه جواب‌های نامغلوب منجر می‌گردد، ولی در نهایت تصمیم‌گیر باید یکی از جواب‌های ممکن را انتخاب نموده و به‌کار گیرد. مناسب‌ترین جواب از میان جواب‌های بهینه نامغلوب، جوابی است که بهبود کوچک در یک تابع هدف به افت شدید در توابع هدف دیگر منجر شود که بر این اساس حرکت در آن مسیر، مطلوب نخواهد بود. این جواب‌ها به‌عنوان «نقطه زانو (Knee point)» شناخته می‌شود و با بیش‌ترین احتمال برای تصمیم‌گیر از جذابیت بیش‌تری برخوردار می‌باشد. انتخاب این نقطه در مسأله بهینه‌سازی، غالباً جواب ترجیحی سازشی مسأله خواهد بود (۱۱). اهمیت زانوها قبلاً توسط پژوهشگران مختلف مورد تأکید قرار گرفته است (۹، ۱۰ و ۲۱). در این پژوهش از رویکرد زاویه-خم (Bend-Angle) ارائه شده توسط دب و گوپتا (۲۰۱۱) جهت محاسبه این نقطه استفاده شده است (۱۱).

منطقه مورد مطالعه: شکل ۲، اجزاء منطقه مورد مطالعه این پژوهش که بخشی از سیستم رودخانه‌ای کارون-دز شامل حدفاصل بین سد گتوند تا بند قیر، سد دز تا بند قیر و همچنین بند قیر تا شهر اهواز است را به‌صورت شماتیک نشان می‌دهد. رودخانه‌های کارون و دز نقش حیاتی در تأمین نیاز آبی بخش‌های مختلف منطقه دارند. افزایش برداشت از این رودخانه‌ها و تخلیه زه‌آب به آن‌ها، آلودگی آب این رودخانه را افزایش داده است. پس از اتصال رودخانه کارون به رودخانه دز، بستر آن عریض شده و حالت پیچانی می‌یابد. در این پژوهش مفروض است که نیاز آب شرب و زیست‌محیطی به‌صورت کامل تأمین گردند و نسبت جریان برگشتی به آب تخصیص‌یافته



شکل ۲- نمایشی از اجزاء مختلف منطقه مورد مطالعه.

Figure 2. Representation of different parts of study area.

جدول ۱- نیاز آبی آببران مختلف مطالعه موردی این پژوهش (میلیون مترمکعب در ماه).

Table 1. Demands of different water users of study area (MCM/month).

شماره ماه (از مهر تا شهریور) Number (October to September)												آببر Water user
12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	
60.6	68.4	64.1	42.1	60.3	45.5	35.9	18.7	3.7	4.4	9.6	36.4	AI <sub>1</sub>
488.8	582.4	576.4	351	423.8	356.2	202.8	70.6	20.5	23.1	47.2	315.4	AI <sub>2</sub>
168.2	202.8	201.8	117	163.8	127.4	37.7	37.7	28	22.8	37.7	98.8	AI <sub>3</sub>
452.4	481.8	445.6	495.8	222	416	367.1	241.8	177.2	159.1	170.6	356.2	AI <sub>4</sub>
115.7	139.9	102.3	148.2	56.4	88.1	86.6	78.5	42	20	28.6	69.9	AI <sub>5</sub>
136	118	131.5	172.6	74.1	126.4	109.7	105.3	70.7	37.6	51.5	100.4	AI <sub>6</sub>
101.7	109.2	95.2	127.4	44.2	86.8	72	58	13.7	20.2	30.4	61.4	AI <sub>7</sub>
46	44.7	38.1	48.9	17.9	33.3	31.7	29.1	4.3	11.2	16.4	25.5	AI <sub>8</sub>
58	69.2	64.1	41.9	60.1	47.6	30.2	20.5	1.4	1.8	7.5	28.6	AG <sub>1</sub>
54.6	66.3	64.1	42.1	63.7	45.5	44.7	17.7	9.3	8.6	12.5	31.2	AG <sub>2</sub>
65.8	86.3	80.1	49.4	67.6	61.1	40.3	20.3	6.5	5.5	12.5	46.8	AG <sub>3</sub>
12.2	12.2	12.2	12.2	12.2	11.4	11.4	11.8	11.8	11.8	11.8	11.8	D <sub>1</sub>
65.5	67.7	67.7	67.7	67.7	67.7	65.5	65.5	65.5	65.5	65.5	65.5	D <sub>2</sub>
20.4	20.4	20.4	20.4	20.4	20.4	19.1	19.8	19.8	19.8	19.8	20.4	D <sub>3</sub>
1.3	1.3	1.3	1.3	1.3	1.3	1.2	1.3	1.3	1.3	1.3	1.3	D <sub>4</sub>

جدول ۲- الگوی کشت آب‌بران کشاورزی منطقه مورد مطالعه (درصد).

Table 2. Cropping pattern of agricultural water users in the study area (Percent).

گیاه Crop											آب‌بر Water User
سایر گیاهان Other crops	غلات Cereal	نیشکر Sugarcane	پیاز Union	دانه‌های روغنی Oilseed	ذرت Corn	چغندر قند Sugar beet	مرکبات Citrus	گندم Wheat	یونجه Alfalfa	حبوبات Grain	
12.8	8.0	0	16.1	0.8	1.7	0	1.8	43.2	3.0	12.5	AG <sub>1</sub>
7.1	4.2	22.8	9.8	0.3	1.7	0	0.4	43.3	0.7	9.7	AG <sub>2</sub>
6.2	4.2	8.5	13.9	1.3	1.2	3.8	3.5	44.4	1.8	11.4	AG <sub>3</sub>

جدول ۳- متوسط غلظت کل جامد محلول در جریان بازگشتی آب‌بران (میلی‌گرم در لیتر).

Table 3. The average concentration of TDS in return flows of users (mg/l).

شماره ماه (از مهر تا شهریور) Number (October to September)												آب‌بر Water user
12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	
582	582	582	2619	2619	2619	582	582	582	582	582	582	AI <sub>1</sub>
1527	1527	1527	6108	6108	6108	1527	1527	1527	1527	1527	1527	AI <sub>2</sub>
1405	1405	1405	4635	4635	4635	598	598	598	1811	1811	1811	AI <sub>3</sub>
1088	1088	1088	4355	4355	4355	1088	1088	1088	1088	1088	1088	AI <sub>4</sub>
1088	1088	1088	4355	4355	4355	1088	1088	1088	1088	1088	1088	AI <sub>5</sub>
628	628	628	3099	3099	3099	811	811	811	767	767	767	AI <sub>6</sub>
5079	5079	5079	9266	9266	9266	6780	6780	6780	4035	4035	4035	AI <sub>7</sub>
1527	1527	1527	6108	6108	6108	1527	1527	1527	1527	1527	1527	AI <sub>8</sub>
582	582	582	2619	2619	2619	582	582	582	582	582	582	AG <sub>1</sub>
1596	1596	1596	6384	6384	6384	851	851	851	1451	1451	1451	AG <sub>2</sub>
1006	1006	1006	4025	4025	4025	921.6	921.6	921.6	907	907	907	AG <sub>3</sub>
1596	1596	1596	1596	1596	1596	851	851	851	1451	1451	1451	D <sub>1</sub>
1527	1527	1527	1527	1527	1527	1527	1527	1527	1527	1527	1527	D <sub>2</sub>
1088	1088	1088	1088	1088	1088	1088	1088	1088	1088	1088	1088	D <sub>3</sub>
450	450	450	450	450	450	450	450	450	450	450	450	D <sub>4</sub>

### نتایج و بحث

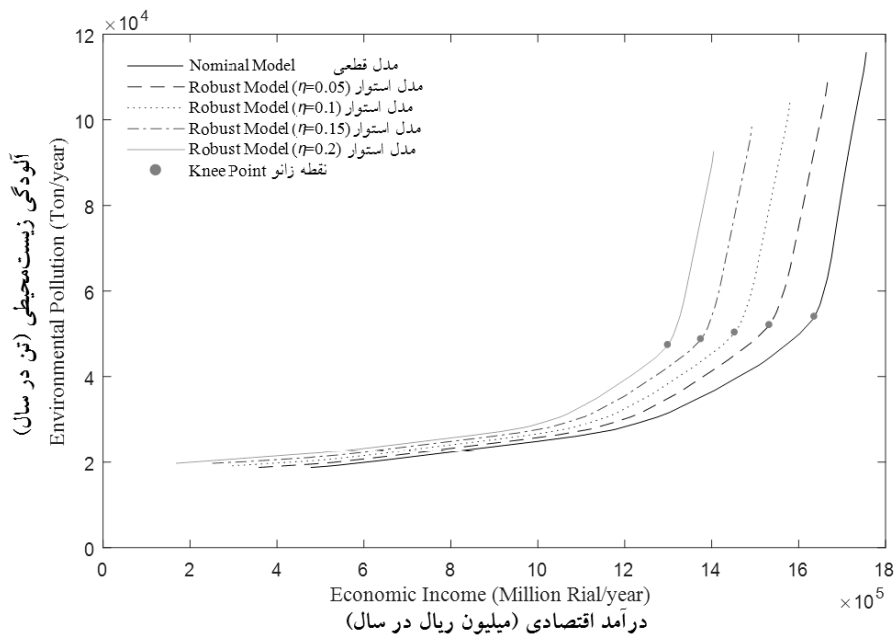
خطی باقی ماند که نتیجتاً دستیابی به جواب‌های دقیق و بهینه مسأله با بار محاسباتی ناچیز و پیچیدگی کم فراهم گردید. دیگر برتری این روش در هنگام لحاظ نمودن عدم قطعیت‌های مسأله، عدم استفاده از تابع توزیع احتمال متغیرهای غیرقطعی در مدل‌سازی

بررسی اثر سطوح عدم قطعیت: استفاده از روش برتسیماس و سیم جهت ایمن‌سازی مدل در برابر عدم قطعیت‌ها اگرچه فرمول‌بندی مدل قطعی را دچار تغییراتی نمود، ولی مدل استوار توسعه‌یافته هم‌چنان

استوار مربوطه در سمت چپ نمودار مدل قطعی شکل گرفته‌اند. علت این امر آن است که با افزایش  $\eta$ ، میزان محافظه‌کاری مدل‌ها بیش‌تر شده است و در شرایط عدم قطعیت، مدل به نتایجی با درآمد اقتصادی قابل اتکاتر (که کم‌تر از درآمد اقتصادی حاصل از مدل قطعی می‌باشد) و همچنین تولید بار آلودگی کم‌تر منجر شده است. بنابراین با انتخاب سطح عدم قطعیت توسط تصمیم‌گیرنده، می‌توان میان قابلیت اطمینان به سیستم (درجه استواری مدل) و سطح تحقق اهداف اقتصادی و زیست‌محیطی سازش برقرار نمود. در این شکل همچنین نقاط زانو هر جبهه نامغلوب (که جواب ترجیحی سازشی مسأله می‌باشد) در قسمت انحنای جبهه که تقریباً در بخش میانی هر منحنی قرار دارد، ملاحظه می‌شود. به تبع جبهه‌های نامغلوب، نقاط زانو نیز با افزایش سطوح عدم قطعیت به سمت چپ نمودار مدل قطعی منتقل شده‌اند.

مسأله بود. حل مسأله بهینه‌سازی چندهدفه به جبهه نامغلوب ختم می‌شود ولی استفاده ترکیبی از رویکرد همتای استوار و بهینه‌سازی چندهدفه در این پژوهش منجر به جبهه بهینه نامغلوب استوار شد که به دلیل مدنظر قرار دادن عدم قطعیت‌های مسأله، از قابلیت اتکای بالاتری برخوردار است.

به منظور بررسی اثر سطوح مختلف عدم قطعیت بر روی جواب‌های مسأله، نتایج مدل در حالت قطعی به همراه نتایج مدل غیرقطعی با در نظر گرفتن چهار سطح عدم قطعیت برای جریان رودخانه  $(\eta_q)$  و تقاضای آبی  $(\eta_D)$  شامل مقادیر  $(\eta = 0.05, \eta = 0.1, \eta = 0.15, \eta = 0.2)$  در شکل ۳ نمایش داده شده است. همان‌گونه که در این شکل ملاحظه می‌گردد، جبهه نامغلوب مدل قطعی در سمت راست نمودارها قرار گرفته است و هرچه سطح عدم قطعیت بیش‌تر شده است، جبهه‌های نامغلوب



شکل ۳- نتایج جبهه نامغلوب و نقاط زانو مدل قطعی و استوار در سطوح مختلف استواری.

Figure 3. Results of Non-dominated fronts and knee points of nominal and different robust models.

اگرچه با افزایش سطوح عدم قطعیت مقادیر هر دو تابع هدف با کاهش مواجه شده‌اند، با این حال تابع هدف اقتصادی در مقایسه با تابع هدف زیست‌محیطی با کاهش بیش‌تری مواجه شده است (جدول ۴). در حالت  $\eta=0/05$  مقدار تابع هدف اقتصادی از ۱,۶۳۶,۵۲۳ به ۱,۵۳۳,۱۲۹ میلیون ریال در سال (۶/۳ درصد کاهش) و مقدار تابع هدف زیست‌محیطی از ۵۳,۹۴۹ به ۵۲,۰۰۵ تن در سال (۳/۶ درصد کاهش) رسیده است. همچنین با مدنظر قرار دادن سطح عدم قطعیت ۲۰ درصد ( $\eta=0/2$  و  $\Gamma=1$ )، مدل استوار با ۲۰/۶ درصد کاهش در مقدار تابع هدف اقتصادی و ۱۲/۳ درصد بهبود در مقدار تابع هدف زیست‌محیطی مواجه خواهد شد. تحت این شرایط نتایج حاصل از مدل استوار به‌ازای همه موارد ممکن از مجموعه غیرقطعی، همواره شدنی باقی خواهد ماند. به‌عبارت دیگر با استفاده از نتایج مدل استوار، حتی چنان‌چه نیاز آبی و جریان آب رودخانه دچار ۲۰ درصد تغییر شوند، هم‌چنان امکان تأمین آب تخصیصی به آب‌بران وجود خواهد داشت و سیستم تأمین آب تخصیص‌یافته با شکست مواجه نخواهد شد.

جدول ۵ مقدار آب تخصیصی به آب‌بران مختلف منطقه مورد مطالعه در نقطه زانوی مدل قطعی و جدول ۶ نیز این مقادیر را برای مدل همتای استوار با سطح عدم قطعیت ۰/۱ نمایش می‌دهد. مقایسه این دو جدول نشان می‌دهد که نتیجه لحاظ نمودن عدم قطعیت‌ها، کاهش محدوده شدنی بودن قیود بوده و در نتیجه مدل استوار در مقایسه با مدل قطعی بازه کوچک‌تری از جواب را شامل شده است. بنابراین امکان استفاده از مقادیر بالاتر آب تخصیصی مدل استوار، محدودتر شده و به جواب‌های محافظه‌کارانه‌تری منجر شده است. این در حالی است که جواب نقطه زانوی مدل قطعی ممکن است در شرایط وقوع عدم قطعیت با چالش همراه شده و شدنی نباشد، ولی آب تخصیصی به آب‌بران در مدل همتای استوار تحت شرایط وجود عدم قطعیت نیز از قابلیت اتکا و اطمینان بالایی برخوردار است.

جدول ۴ مقدار توابع هدف و میزان تغییرات آن را در حالت قطعی و غیرقطعی با سطوح عدم قطعیت مختلف در نقطه زانو برای حالتی که  $\Gamma=1$  می‌باشد، نشان می‌دهد. در نقطه زانوی مدل قطعی، مقدار تابع هدف اقتصادی ۱,۶۳۶,۵۲۳ میلیون ریال در سال و مقدار تابع هدف زیست‌محیطی ۵۳,۹۴۹ تن در سال می‌باشد. با افزایش سطح عدم قطعیت، مقدار توابع هدف (درآمد اقتصادی و بار آلودگی ورودی به رودخانه) کاهش یافته است. به‌عنوان نمونه هنگامی که  $\eta=0/05$  باشد، مقدار تابع هدف اقتصادی ۱,۵۳۳,۱۲۹ میلیون ریال در سال و مقدار تابع هدف زیست‌محیطی ۵۲,۹۴۹ تن در سال بوده، که به‌ترتیب ۶ و ۴ درصد کاهش را نشان می‌دهند. تصمیم‌گیری بر اساس مدل قطعی (بدون مدنظر قرار دادن عدم قطعیت‌ها) می‌تواند منجر به عدم تحقق تأمین مقدار آب تخصیص‌یافته گردیده و بنابراین احتمال شکست در تأمین آب، وجود خواهد داشت.

جدول ۴ همچنین نشان می‌دهد که چنان‌چه مدل استوار با شرایط احتمال وقوع عدم قطعیت بالا ( $\Gamma=1$  و  $\eta=0/2$ ) مدنظر قرار گیرد، درجه محافظه‌کاری و استواری مدل نسبت به عدم قطعیت بالا خواهد بود و سود اقتصادی قابل اطمینان که دسترسی به آن امکان‌پذیر است، معادل ۱,۲۹۹,۷۱۹ میلیون ریال خواهد شد. بنابراین عملاً با لحاظ نمودن این سطح عدم قطعیت، دستیابی به سود اقتصادی مدل قطعی (۱,۶۳۶,۵۲۳ میلیون ریال) دور از انتظار می‌باشد. در عین حال تخصیص آب در این شرایط منجر به کاهش مقدار بار آلودگی تولیدی از ۵۳,۹۴۹ به ۴۷,۳۹۹ تن در سال در مقایسه با مدل قطعی می‌شود. علت این کاهش در بار آلودگی، آن است که با تخصیص کم‌تر آب، رودخانه به نسبت کم‌تر مورد بهره‌برداری قرار گرفته و همچنین زه‌آب برگشتی کم‌تری به رودخانه رهاسازی می‌گردد.



جدول ۴- مقدار توابع هدف و تغییرات آن در نقاط زانوی مسائل قطعی و استوار.

**Table 4. The objective functions values and its changes for nominal and robust problems at the knee points.**

تابع زیست محیطی Environmental Obj. Func.		تابع اقتصادی Economic Obj. Func.		سطح عدم قطعیت Uncertainty Level	مدل Model
کاهش نسبت به مدل قطعی (%) Decrease related to nominal model (%)	مقدار Value (Ton/year)	کاهش نسبت به مدل قطعی (%) Decrease related to nominal model (%)	مقدار Value (Million Rial/year)		
-	53,949	-	1,636,523	-	قطعی Nominal
3.6	52,005	6.3	1,533,129	$\eta=0.05$	استوار Robust
6.8	50,255	11.2	1,453,479	$\eta=0.10$	
9.7	48,700	15.9	1,375,732	$\eta=0.15$	
12.3	47,337	20.6	1,299,719	$\eta=0.20$	

جدول ۵- آب تخصیصی به آب بران در نقطه زانوی مدل قطعی.

**Table 5. Allocated water to water users at the knee point of nominal model.**

شماره ماه (مهر تا شهریور) Month Number (October to September)												آب بر Water user
12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	
49.69	56.77	55.13	35.79	51.26	36.40	22.26	12.16	2.89	3.52	7.68	30.94	AI <sub>1</sub>
342.16	407.68	403.48	277.29	317.85	284.96	117.62	49.42	14.35	17.79	37.76	220.78	AI <sub>2</sub>
68.96	42.59	119.06	40.95	32.76	25.48	7.92	8.67	8.40	4.56	16.97	21.74	AI <sub>3</sub>
285.01	317.99	334.20	352.02	146.52	278.72	256.97	183.77	35.44	108.19	122.83	256.46	AI <sub>4</sub>
93.72	117.52	79.79	59.28	11.28	17.62	17.32	19.63	8.40	7.40	23.74	58.02	AI <sub>5</sub>
27.20	24.78	26.30	138.08	62.24	103.65	92.15	22.11	17.68	7.52	11.33	20.08	AI <sub>6</sub>
85.43	57.88	39.98	44.59	26.08	42.53	58.32	48.72	11.51	15.15	22.50	50.35	AI <sub>7</sub>
10.12	9.39	7.62	9.78	3.76	26.64	26.31	23.28	0.86	2.24	3.33	5.23	AI <sub>8</sub>
47.56	29.06	32.05	16.76	30.05	20.47	12.08	9.23	0.31	1.44	6.15	22.88	AG <sub>1</sub>
19.11	14.59	19.29	8.42	12.74	9.10	36.65	12.92	1.93	1.75	2.58	6.52	AG <sub>2</sub>
23.03	52.64	27.23	21.74	22.98	40.04	19.34	6.70	1.37	1.93	3.88	26.68	AG <sub>3</sub>

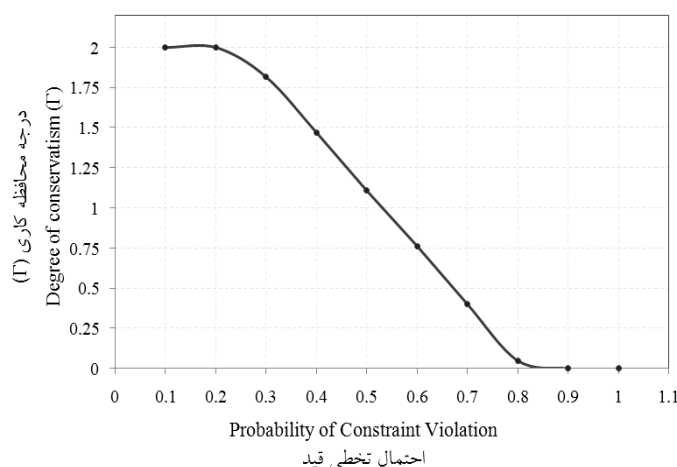
جدول ۶- آب تخصیصی ماهانه آب بران در نقطه زانو در سطح استواری  $\eta = 0.1$  (هنگامی که  $\alpha=0.1$  است).

**Table 6. Monthly allocated water to water users at knee point at robustness level of  $\eta = 0.1$  (When  $\alpha=0.1$ ).**

شماره ماه (مهر تا شهریور) Month Number (October to September)												آب بر Water user
12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	
41.81	47.20	49.36	32.84	44.02	34.13	20.10	10.66	2.44	3.17	6.72	24.39	AI <sub>1</sub>
356.82	390.21	374.66	235.17	254.28	242.22	111.54	43.77	13.94	16.86	33.04	220.78	AI <sub>2</sub>
67.28	46.64	108.97	43.29	37.67	28.03	11.31	9.43	8.96	6.16	16.97	24.70	AI <sub>3</sub>
275.96	289.08	298.55	332.19	115.44	83.20	256.97	166.84	38.98	111.37	110.89	220.84	AI <sub>4</sub>
76.36	99.33	68.54	45.94	11.84	18.50	21.65	18.06	10.08	6.80	21.16	48.93	AI <sub>5</sub>
32.64	29.50	26.30	126.00	51.87	85.95	76.79	23.17	18.38	7.90	11.85	26.10	AI <sub>6</sub>
71.19	68.80	48.55	53.51	26.52	45.14	47.52	43.50	9.59	12.52	18.54	46.05	AI <sub>7</sub>
10.58	8.94	7.62	11.25	3.94	24.98	22.82	20.66	0.90	2.58	3.28	5.36	AI <sub>8</sub>
34.80	27.68	30.13	16.76	27.65	19.04	12.99	10.05	0.35	1.31	5.40	19.45	AG <sub>1</sub>
22.66	15.91	21.15	9.68	15.29	11.38	31.29	10.62	1.86	1.81	2.50	6.24	AG <sub>2</sub>
24.35	51.78	27.23	21.74	22.98	40.04	18.94	6.09	1.30	1.76	3.50	25.74	AG <sub>3</sub>

تخطی قید ۱۰ درصد می‌باشد ( $\alpha=0/1$ )، این اطمینان در مورد جواب مسأله وجود دارد که قیود مسأله حداقل در ۹۰ درصد مواقع شدنی باقی می‌مانند. در این حالت مقدار گاما ۲ می‌باشد. در حالت کلی هرچه احتمال تخطی قید کم‌تر باشد، درجه محافظه‌کاری سیستم بالاتر است.

بررسی اثر احتمال تخطی قید: شکل ۴ مقادیر پارامتر گاما ( $\Gamma$ ) که بیانگر درجه محافظه‌کاری است را به صورت تابعی از احتمال تخطی قید ( $\alpha$ ) نمایش می‌دهد. هنگامی که  $\Gamma = 0$  است (شرایط قطعی)، عدم قطعیت پارامترها مدنظر قرار داده نمی‌شود (احتمال تخطی قیود ۱۰۰ درصد بوده و  $\alpha=1$  خواهد بود) و در شرایط غیرقطعی مانند هنگامی که احتمال



شکل ۴- مقدار گاما (درجه محافظه‌کاری) بر اساس احتمال تخطی قید.

Figure 4. The value of Gama (degree of conservatism) based on probability of constraint violation.

(افزایش استواری مدل)، مقدار تابع هدف اقتصادی در نقطه زانو از ۱،۶۳۶،۵۲۳ به ۱،۳۶۵،۶۹۳ میلیون ریال در سال و مقدار تابع هدف زیست‌محیطی نیز از ۵۳،۹۴۹ به ۴۸،۵۰۵ تن در سال کاهش می‌یابد. بنابراین کاهش احتمال تخطی قید، نتایجی با درآمد اقتصادی کم‌تر، توأم با بار آلودگی کم‌تری را در بر داشته است.

به منظور نمایش تأثیر احتمال تخطی قید مختلف بر میزان استواری مدل، سیستم برای سه احتمال تخطی قید مختلف که شامل احتمال ۰/۱، ۰/۳ و ۰/۷ می‌باشند، مورد بررسی قرار گرفت. جدول ۷ مقادیر بهینه توابع هدف مورد بررسی در نقطه زانو تحت احتمال تخطی‌های مختلف در هنگامی که سطح عدم قطعیت  $\eta=0/1$  است را نشان می‌دهد. بر این اساس با کاهش احتمال تخطی قیود از ۱ به ۰/۱

جدول ۷- مقادیر توابع هدف در نقاط زانوی مدل‌های قطعی و استوار تحت احتمال تخطی مختلف.

**Table 7. The values of objective functions at knee points of nominal and robust models with different Probability of violation.**

توابع هدف Objective Functions		احتمال تخطی قید Violation probability of constraint	مدل Model
زیست‌محیطی Environmental (Ton/year)	اقتصادی Economic (Million Rial/year)		
53,949	1,636,523	1	قطعی Nominal
52,394	1,553,808	0.7	
49,283	1,423,321	0.3	استوار Robust
48,505	1,365,693	0.1	

جدول ۸- آب تخصیصی سالانه به آب‌بران در نقطه زانوی مدل‌های قطعی و استوار با احتمال تخطی مختلف.

**Table 8. The annual allocated water to users at knee points of nominal and robust models with different probability of violation.**

جمع کل Total Sum	آب تخصیصی سالانه به آب‌بران Annual allocated water to users (MCM/year)										احتمال تخطی Violation probability	مدل Model	
	AG <sub>3</sub>	AG <sub>2</sub>	AG <sub>1</sub>	AI <sub>8</sub>	AI <sub>7</sub>	AI <sub>6</sub>	AI <sub>5</sub>	AI <sub>4</sub>	AI <sub>3</sub>	AI <sub>2</sub>			AI <sub>1</sub>
8301.5	247.6	145.6	228.0	128.6	553.1	553.1	513.7	2678.1	398.1	2491.1	364.5	1	قطعی Nominal
7649.7	245.9	149.4	210.1	124.0	493.8	523.8	460.5	2375.9	407.1	2332.9	326.4	0.7	
7452.0	238.8	156.3	198.8	122.5	488.2	507.5	446.5	2293.0	417.8	2268.4	314.2	0.3	استوار Robust
7291.2	228.6	166.0	188.7	121.5	476.9	495.4	421.8	2236.7	441.1	2208.3	306.1	0.1	

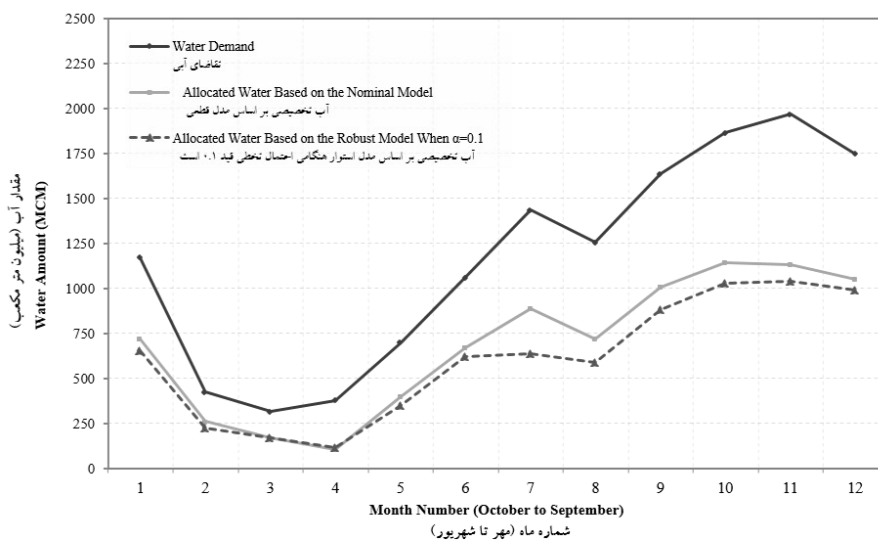
سال و نیز آذرماه اتفاق افتاده است. علت این که به غالب کشت و صنعت‌های نیشکر در حالت مدل قطعی (با قابلیت اتکای کم‌تر) آب بیش‌تری تخصیص داده شده است، سود اقتصادی بالاتر آن می‌باشد ولی به دلیل تولید بار آلودگی بیش‌تر، با مدنظر قراردادن عدم قطعیت‌ها و افزایش سطح استواری مدل، مقدار آب تخصیصی با کاهش مواجه شده است. ضمناً علت این که در مدل قطعی مقدار آب کم‌تری به آب‌بر AI<sub>3</sub> اختصاص یافته، می‌تواند کیفیت آب مناسب‌تر بالادست رودخانه، نیاز آبی کم و همین‌طور عملکرد محصول به نسبت کم این آب‌بر باشد. همچنین دلیل

جدول ۸ آب تخصیصی سالانه به آب‌بران مختلف در نقطه زانو تحت احتمال تخطی‌های مختلف در هنگامی که سطح عدم قطعیت  $\eta = 0/1$  است را نشان می‌دهد. همان‌گونه که مشاهده می‌شود، با افزایش استواری مدل (کاهش احتمال تخطی قید)، آب تخصیصی به آب‌بران AI<sub>1</sub>، AI<sub>2</sub>، AI<sub>4</sub>، AI<sub>5</sub>، AI<sub>6</sub>، AI<sub>7</sub>، AI<sub>8</sub>، AG<sub>1</sub> و AG<sub>3</sub> کاهش و آب تخصیصی به آب‌بران AI<sub>3</sub> و AG<sub>2</sub> افزایش یافته است. با مقایسه ارقام این جدول با جدول‌های ۵ و ۶، چنین استنتاج می‌گردد که این افزایش برای AI<sub>3</sub> در همه ماه‌ها به جز تیر، شهریور و آبان و برای AG<sub>2</sub> در ماه‌های نیمه اول

کاهش یافته است و بنابراین مقاوم‌سازی مدل بهینه‌سازی در برابر عدم قطعیت‌های مسأله نشان می‌دهد که برای دسترسی به تأمین آب مطمئن و جلوگیری از شکست در تأمین آب نیازمند تعدیل آب تخصیصی به آب‌بران بر مبنای مدل همتای استوار است. بر این اساس تصمیم‌گیر می‌تواند با انتخاب سطح عدم قطعیت و احتمال تخطی قید، درجه استواری و محافظه‌کاری مدل در برابر عدم قطعیت‌ها را انتخاب نماید.

تخصیص مقدار آب کم‌تر به آب‌بر  $AG_2$  در مدل قطعی، می‌تواند به میزان زه‌آب بازگشتی آن و نیز عملکرد محصول به نسبت کم آن مرتبط باشد.

جدول ۸ همچنین نشان می‌دهد که با افزایش سطح استواری مدل، امکان بهره‌برداری از مقدار آب کم‌تری فراهم شده است و حجم آب قابل اتکای مورد استفاده کم‌تر می‌شود. به‌عنوان مثال مقدار کل آب مورد استفاده توسط آب‌بران در حالت مدل قطعی از میزان  $8301/5$  به  $7291/2$  میلیون مترمکعب در سال کاهش در مدل استوار با احتمال تخطی قیود  $0/1$



شکل ۵- مقدار تقاضای آب و آب تخصیصی در مدل قطعی و استوار ( $\alpha=0/1$ ) طی ماه‌های مختلف.

Figure 5. Monthly demands and allocated water based on nominal and robust problems when  $\alpha=0.1$ .

پیوسته است. در مورد مدل استوار با احتمال تخطی قیود  $0/1$  نیز بیش‌ترین نسبت کم‌آب‌باری مربوط به ماه دی با  $70/2$  درصد کاهش در مقایسه با تقاضا می‌باشد و ماه اسفند با  $41/4$  درصد کاهش، کم‌ترین میزان کاهش تأمین نیاز آبی نسبت به تقاضا را داراست. در این شکل همچنین تفاوت میان آب تخصیصی مدل قطعی و غیرقطعی قابل مشاهده است. مقایسه این دو نتایج نشان می‌دهد که به‌جز دی‌ماه که مقدار مجموع

مقایسه آب تخصیصی در ماه‌های مختلف در مدل قطعی و استوار با احتمال تخطی  $\alpha=0/1$  در هنگامی که  $\eta=0/1$  است نسبت به تقاضای موجود در شکل ۵ نمایش داده شده است. همان‌گونه که مشاهده می‌شود، در مورد مدل بیش‌ترین نسبت کم‌آب‌باری در ماه دی با  $72/7$  درصد کاهش نسبت به تقاضا و کم‌ترین درصد کاهش نسبت به تقاضای آبی موجود در ماه اسفند با  $37$  درصد کاهش نسبت به تقاضا به وقوع

اهداف چندگانه و دستیابی به جواب دقیق مسأله، رویکرد مناسبی جهت حل مسأله تخصیص بهینه منابع آب می‌باشد. نتایج نشان داد در شرایط وقوع عدم قطعیت، مقدار کل آب تخصیصی به آبران با کاهش مواجه می‌شود. یافته‌های پژوهش بیانگر آن بود که با افزایش میزان استواری مدل، دستیابی به درآمد اقتصادی با محدودیت بیش‌تری مواجه شده است، ولی از طرفی تولید بار آلودگی ورودی به رودخانه با کاهش همراه می‌شود. نتایج پژوهش بیانگر آن است که تحت شرایط مدل‌سازی استوار با احتمال تخطی قیود  $0/1$ ، بیش‌ترین مقدار کم‌آبایی در دی‌ماه و کم‌ترین مقدار کم‌آبایی در اسفندماه اتفاق می‌افتد. مدل چندهدفه همتای استوار توسعه‌یافته در این پژوهش تصمیم‌گیر را قادر می‌سازد تا ضمن فراهم آوردن امکان سازش میان اهداف اقتصادی، زیست‌محیطی و میزان قابلیت اطمینان مدل، بسته به درجه محافظه‌کاری مورد نظر جواب‌های مسأله تخصیص بهینه منابع آب با دقت مطلوب و کاربری ساده انتخاب نماید.

آب تخصیصی به مدل غیرقطعی بیش‌تر بوده، در بقیه ماه‌ها مقدار مجموع آب تخصیصی ماهانه در مدل همتای استوار کم‌تر از مقدار آب تخصیصی در مدل قطعی می‌باشد. بیش‌ترین نسبت کاهش آب تخصیصی در مدل استوار در مقایسه با مدل قطعی در ماه فروردین با  $27/9$  درصد کاهش اتفاق افتاده است.

### نتیجه‌گیری کلی

در این پژوهش مدلی جدید برای تصمیم‌گیری در خصوص تخصیص آب در شرایط وجود عدم قطعیت و نیز وجود اهداف متضاد ارائه گردید. این مهم به کمک استفاده تلفیقی از روش بهینه‌سازی چندهدفه اپسیلون محدودیت و روش بهینه‌سازی همتای استوار، میسر شد. بررسی انجام گرفته بیانگر آن بود که بهینه‌سازی همتای استوار مورد استفاده در این پژوهش به دلیل عدم افزایش پیچیدگی مسأله اصلی و همچنین عدم الزام به استفاده از تابع توزیع احتمال، روشی مناسب جهت یافتن جواب بهینه درون مجموعه غیرقطعی بوده و روش بهینه‌سازی چندهدفه اپسیلون محدودیت به دلیل توانایی مدنظر قرار دادن توأم

### منابع

1. Anghileri, D., Castelletti, A., Pianosi, F., Soncini-Sessa, R., and Weber, E. 2012. Optimizing watershed management by coordinated operation of storing facilities. *J. Water Resour. Plan. Manage.* 139: 5. 492-500.
2. Ardjmand, E., Weckman, G.R., Young, W.A., Sanei Bajgiran, O., and Aminipour, B. 2016. A robust optimisation model for production planning and pricing under demand uncertainty. *Inter. J. Prod. Res.* 54: 13. 1-21.
3. Babel, M., Gupta, A.D., and Nayak, D. 2005. A model for optimal allocation of water to competing demands. *Water Resources Management.* 19: 6. 693-712.
4. Ben-Tal, A., and Nemirovski, A. 1999. Robust solutions of uncertain linear programs. *Operations Research Letters.* 25: 1. 1-13.
5. Ben-Tal, A., and Nemirovski, A. 2000. Robust solutions of linear programming problems contaminated with uncertain data. *Mathematical Programming.* 88: 3. 411-424.
6. Bertsimas, D., and Sim, M. 2004. The price of robustness. *Operations Research.* 52: 1. 35-53.
7. Cai, X., Lasdon, L., and Michelsen, A.M. 2004. Group decision making in water resources planning using multiple objective analysis. *J. Water Resour. Plan. Manage.* 130: 1. 4-14.
8. Chung, G., Lansey, K., and Bayraksan, G. 2009. Reliable water supply system design under uncertainty. *Environmental Modelling & Software.* 24: 4. 449-462.

9. Das, I. 1999. On characterizing the “knee” of the Pareto curve based on normal-boundary intersection. *Structural Optimization*. 18: 2. 107-115.
10. Deb, K. 2003. Multi-objective evolutionary algorithms: Introducing bias among Pareto-optimal solutions. P 263-292, In: A. Ghosh and S. Tsutsu (eds), *Advances in evolutionary computing*, Springer, Berlin.
11. Deb, K., and Gupta, S. 2011. Understanding knee points in bicriteria problems and their implications as preferred solution principles. *Engineering Optimization*. 43: 11. 1175-1204.
12. El Ghaoui, L., and Lebret, H. 1997. Robust solutions to least-squares problems with uncertain data. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*. 18: 4. 1035-1064.
13. El Ghaoui, L., Oustry, F., and Lebret, H. 1998. Robust solutions to uncertain semidefinite programs. *SIAM Journal on Optimization* 9: 1. 33-52.
14. Haimes, Y.Y. 1971. On a bicriterion formulation of the problems of integrated system identification and system optimization. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*. 1: 3. 296-297.
15. Homayounifar, M., and Rastegaripour, F. 2010. Water allocation of Latian dam between agricultural products under uncertainty. *J. Agric. Econ. Dev.* 24: 2. 259-267. (In Persian)
16. Housh, M., Ostfeld, A., and Shamir, U. 2011. Optimal multiyear management of a water supply system under uncertainty: Robust counterpart approach. *Water Resources Research*. 47: 10. 1-15.
17. Li, M., and Guo, P. 2014. A multi-objective optimal allocation model for irrigation water resources under multiple uncertainties. *Applied Mathematical Modelling*. 38: 19. 4897-4911.
18. Li, Y., Huang, G.H., Huang, Y., and Zhou, H. 2009. A multistage fuzzy-stochastic programming model for supporting sustainable water-resources allocation and management. *Environmental Modelling & Software*. 24: 7. 786-797.
19. Li, Z., and Ierapetritou, M.G. 2008. Robust optimization for process scheduling under uncertainty. *Industrial & Engineering Chemistry Research*. 47: 12. 4148-4157.
20. Maqsood, I., Huang, G.H., and Yeomans, J.S. 2005. An interval-parameter fuzzy two-stage stochastic program for water resources management under uncertainty. *Europ. J. Oper. Res.* 167: 1. 208-225.
21. Miettinen, K. 1999. *Nonlinear multiobjective optimization*. volume 12, International Series in Operations Research and Management Science, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Netherlands. 120p.
22. Mohaghar, A., Mehregan, M.R., and Naz-Abadi, M.R. 2009. Applying robust optimization to solve product mix problem in automotive industries. *J. Ind. Manage.* 1: 2. 139-152. (In Persian)
23. Mulvey, J.M., Vanderbei, R.J., and Zenios, S.A. 1995. Robust optimization of large-scale systems. *Operations Research* 43: 2. 264-281.
24. Sabouhi, M., and Mardani, M. 2013. Optimal allocation strategies of irrigation water and coastal land of Nekooabad irrigation network under uncertainty. 7: 13. 109-119. (In Persian)
25. Sadeghi, H., and Khaksar Astaneh, S. 2014. Provide an optimum model for renewable energy development in Iran; robust optimization approach. *Iranian Energy Economics*. 3: 11. 159-195. (In Persian)
26. Sakhaii, M., Tavakkoli-Moghaddam, R., Bagheri, M., and Vatani, B. 2016. A robust optimization approach for an integrated dynamic cellular manufacturing system and production planning with unreliable machines. *Applied Mathematical Modelling*, 40: 1. 169-191.
27. Soyster, A.L. 1973. Convex programming with set-inclusive constraints and applications to inexact linear programming. *Operations Research*. 21: 5. 1154-1157.



## Water allocation decision making under uncertainty condition using robust counterpart programming and multiple objectives

O. Nasiri-Gheidari<sup>1</sup> and \*S. Marofi<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Ph.D. Student of Water Resource Engineering, Bu-Ali Sina University,

<sup>2</sup>Professor, Dept. of Water Science and Engineering, Bu-Ali Sina University

Received: 06.23.2017; Accepted: 04.15.2018

### Abstract

**Background and Objectives:** Considering the existence of uncertainty in the data of water resource problems, it has become more essential to design a reliable water resource allocation model under uncertainty condition. Due to multi-dimensional nature of optimal water allocation problem, considering multiple conflicting objectives within the optimization models is inevitable. The aim of this study is to provide a quantity-quality optimization model which not only balances the economic and environmental objectives, but also remains robust under uncertainty conditions.

**Materials and Methods:** The nominal model of the study was constructed aimed at maximizing the income of the entire system and minimizing pollution load entered to the river. It was applied to the Dez-Karoon river system as a case study. Considering the uncertainties of river flow and water demands, the nominal model was promoted to a robust multi-objective optimization model using the Bertsimas and Sim's approach. The sensitivity of the robust model to changes in uncertainty levels and the probability of constraint violation was investigated. The  $\epsilon$ -constraint method was used to solve the problem and the nominal model was applied to assess the results of the developed model. Among optimal solutions set, Knee point of the Pareto front was chosen as the final solution.

**Results:** Results from the application of the developed method for optimal water resource allocation in this case study revealed its efficiency and ability to solve the problem quickly and accurately. Comparison of the optimal solution of knee points showed that hedging the optimization model against uncertainties by considering the uncertainty level and violation probability of 0.1, requires the decrease in operating the river water from 8301.5 to 7291.2 MCM/year and adjustment of the economic income from 1,636,808 to 1,365,693 million Rial/year in comparison to the nominal model. Under such a condition in which prevents the failure of supplying water under a given level of risk, the pollution load discharged into the river will decrease from 53,949 to 48,505 ton/ year. The results indicated that without adding extra complexity into the nominal model, it can be immunized against uncertainties using the robust approach. By determination of the uncertainty level and the probability of constraint violation, the decision maker is able to select the robustness level of the water resource allocation model and therefore, explore tradeoff among the values of the objectives and reliability of the system.

**Conclusion:** The results demonstrate the satisfactory, high reliability and flexibility of the proposed robust model. Accordingly, the linear model provided in this study may be used as a user-friendly tool in the decision making process for optimal allocation of water resources.

**Keywords:**  $\epsilon$ -Constraint method, Knee point, Robust counterpart, Water allocation, Uncertainty

---

\* Corresponding Author; Email: marofisafar59@gmail.com

