

ارزیابی شبیه سازی مستقیم عددی جریان لایه مرزی دو بُعدی و

غیر قابل تراکم با تفاضل محدود فشرده

محمدجواد مغربی^۱، مجید فیض آبادی فراهانی^۲ و احد زرغامی^۳

چکیده

معادله بی بعد شده ناویر- استوکس در فرم چرخشی، برای جریان لایه مرزی دو بُعدی صفحه‌ای، به روش مستقیم عددی حل شده است. با در نظر گرفتن پروفیل سرعت در ورودی دامنه محاسباتی، از ضخامت لایه مرزی به عنوان طول مشخصه و از سرعت یکنواخت محیط به عنوان سرعت مشخصه به منظور بی بعد سازی استفاده شده است. معادلات دیفرانسیل حاکم با استفاده از روش اختلاف محدود فشرده در جهات اصلی جریان و عمود بر جریان گسسته شده‌اند. از یک نگاهت جبری برای تبدیل دامنه فیزیکی به دامنه محاسباتی استفاده شده است. جهت توسعه محاسبات در دامنه زمان از روش رانج کوتای فشرده مرتبه سوم استفاده شده است. شرط مرزی خروجی با استفاده از مدل انتقالی تعیین شده است. نتایج شبیه سازی این نوع جریان، با حل بلازیوس مقایسه شده، که صحت کد را نشان می‌دهد. در این مطالعه مشخصه‌های جریان لایه مرزی آرام نیز جهت ارزیابی صحت کد، امتحان و با تقسیم کردن طول‌ها و سرعت‌ها به ترتیب با ضخامت لایه مرزی و سرعت یکنواخت محیط، پروفیل‌ها و کانتورهای سرعت و گردابه در دستگاه مختصات بی بعد رسم و خود تشابهی در آنها مشاهده شده است.

کلمات کلیدی: شبیه سازی مستقیم عددی، جریان لایه مرزی، تفاضلات محدود فشرده، معادلات ناویر- استوکس، خود تشابهی

مقدمه

تاکنون روش‌های مختلفی برای حل جریان لایه مرزی ارائه شده است، که تقریباً در اکثر این روشها با ساده سازی معادلات ناویر- استوکس همراه بوده است. حل عددی کامل معادلات ناویر- استوکس وابسته به زمان، شبیه سازی مستقیم عددی^۱ نامیده می‌شود، که به طور کلی در آن همه مقیاس‌های مهم جریان را بدون استفاده از مدل‌های آشفتگی محاسبه می‌کنند و هیچ‌گونه ساده سازی و یا مدل سازی در آن وارد نمی‌شود و به همان صورتی که تعریف شده، حل عددی می‌شود، که منتج به نتایج بسیار دقیقی است [۲].

پایه و اساس روش شبیه سازی مستقیم عددی در جریان لایه مرزی برای نخستین بار توسط اورزاگ و پترسون^۲ (۱۹۷۲) بنا نهاده شد، آنها برای شبیه سازی عددی مستقیم لایه مرزی در عدد رینولدز ۳۲، از روش طیفی^۳ استفاده کرده بودند [۳]. گام مهم بعدی توسط روگالو^۴ (۱۹۸۱) برداشته شد، او با استفاده از بسط و توسعه الگوریتم محاسباتی اورزاگ و پترسون، معادلات حاکم بر جریان

وقتی سیال در مجاورت یک جسم جامد حرکت می‌کند تأثیر شرط عدم لغزش به صورت تنش برشی در آن آشکار می‌شود سپس این اثر به داخل جریان نفوذ می‌کند، که اندازه نفوذ این اثر بستگی به عدد رینولدز جریان دارد. بر روی یک صفحه تخت اثر لزجت در $Re > 1000$ به لایه نازک در نزدیکی مرز به نام لایه مرزی محدود می‌شود که در این لایه سرعت در یک ضخامت کم از صفر تا اندازه سرعت در جریان پتانسیل خارج لایه مرزی تغییر می‌کند [۱].

مقاله در تاریخ ۸۷/۱/۷ دریافت و در تاریخ ۸۷/۹/۱۱ به تصویب نهایی رسید.

^۱ استادیار، دانشکده مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود

پست الکترونیکی javad@shahroodut.ac.it

^۲ دانشجوی کارشناسی ارشد مواد، دانشکده مکانیک، تبدیل انرژی،

دانشگاه صنعتی شاهرود

^۳ دانشجوی کارشناسی ارشد مواد، تبدیل انرژی، دانشکده مکانیک،

دانشگاه صنعتی شاهرود

تغییرات در چنین جریانی، فرکانسی، در مرتبه ۱۰ کیلو هرتز دارد که نیاز است معادلات در بعد زمان با استفاده از قدم های زمانی ۱۰۰ میکروثانیه گسسته سازی شوند. همچنین برای محاسبه DNS داخل لوله در عدد رینولدز ۵۰۰۰۰۰ به کامپیوتری احتیاج است که توان محاسباتی ۱۰ میلیون بار بیشتر از سریع ترین کامپیوترهای Cray موجود، داشته باشد. به این ترتیب احتیاج به مدل سازی جریان آشفته و استفاده از این مدل در انجام محاسبات تا سالها ادامه خواهد داشت و نیاز به تصحیح و طراحی مدل های بهتر همچنان احساس می شود [۱۱].

۲- معادلات دیفرانسیل حاکم

در این تحقیق فرم چرخشی معادلات ناویر - استوکس ارایه شده توسط مغربی را به صورت مستقیم و بدون استفاده از هر گونه مدل سازی و یا ساده سازی به صورت عددی حل می کنیم [۱۲].
فرم بی بعد معادله ناویر - استوکس برای جریانهای غیر قابل تراکم به صورت زیر می باشد:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} = -\nabla p + \frac{1}{\text{Re}} (\nabla^2 \mathbf{U}) \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0$$

با توجه به رابطه برداری مشخص زیر:

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} + (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) \quad (2)$$

برای مورد $\mathbf{A} = \mathbf{B} = \mathbf{U} = (U, V, W)$ داریم:

$$(\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} = \omega \times \mathbf{U} + \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}) \quad (3)$$

که در آن، $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \nabla \times \mathbf{U}$ ،
با در نظر گرفتن روابط (۱) و (۳) به رابطه (۴) خواهیم رسید:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = \mathbf{H} - \nabla \left(p + \frac{\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}}{2} \right) + \frac{1}{\text{Re}} (\nabla^2 \mathbf{U}) \quad (4)$$

که در آن، $\mathbf{H} = (H_1, H_2, H_3) = \mathbf{U} \times \omega$.

با ضرب طرفین معادله (۴) در بردار کرل $(\nabla \times)$ داریم:

$$\frac{\partial (\nabla \times \mathbf{U})}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{H} \quad (5)$$

$$-\nabla \times \nabla \left(p + \frac{\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}}{2} \right) + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 (\nabla \times \mathbf{U})$$

توربولانس را به روش مستقیم عددی محاسبه نمود و نتایج بدست آمده را با نتایج آزمایشگاهی و چندین روش توربولانس دیگر مقایسه نمود [۴]. در آن سالها به علت ضعف کامپیوترها جریان به صورت همگن و تنها در یک جهت، مورد مطالعه با این روش مورد مطالعه قرار می گرفت قرار می گرفت، و اجازه استفاده از روش مستقیم عددی را در جریان توربولانس در نزدیکی جداره، به کاربر نمی داد. در سال (۱۹۸۷) کیم و معین^۵ با شبیه سازی مستقیم عددی، جریان سیال را در داخل یک کانال با دیواره های موازی، مورد مطالعه قرار دادند، که پس از مقایسه عددی نتایج شبیه سازی با نتایج تجربی کرپلین و اکمن^۶ (۱۹۷۹) مطابقت بسیار خوبی داشت [۵و۶]. اسپالارت^۷ (۱۹۸۸) یک روش ابتکاری در DNS توانست، جریان لایه مرزی توربولانس را تحت گرادین فشار صفر و مطلوب محاسبه نماید [۷]. در سالهای اخیر از جمله مطالعات انجام شده توسط این روش می توان به مطالعه جریان مختلط توسط لی و معین^۸ (۱۹۹۴) و مطالعه بر روی پدیده جدایش در جریان لایه مرزی بر روی یک صفحه مسطح توسط نا و معین^۹ (۱۹۹۶) اشاره نمود [۸و۹].

اما مطالعه بر روی جریان لایه مرزی تراکم پذیر با استفاده از شبیه سازی مستقیم عددی نخستین بار توسط فریسن^{۱۰} آغاز شد، ولی مطالعات جدی تر، به خاطر پیچیدگی های آن تا سالها مسکوت مانده بود و امروزه یکی از شاخه های مطالعات دانشمندان و کاربردهای ابرکامپیوترها می باشد [۱۰].

با وجود دقت بالای این روش در مقایسه با مدل سازی های مرسوم، به دلیل محدودیتهای موجود در توان محاسباتی کامپیوترهای امروزی، محاسبات DNS تنها منحصر به بعضی جریانهای با هندسه ساده و اعداد رینولدز پایین است و بنابراین استفاده از DNS در جریان آشفته منحصر به مطالعه بنیادی و کاربرد در مدل سازی می باشد.

به عنوان مثال برای انجام محاسبات DNS برای یک جریان ساده در کانالی به ابعاد $1/10 \times 1/10 \times 1/10$ متر و در رینولدز بالا گردابه هایی به ابعاد $10 - 100$ میکرومتر تشکیل خواهند شد و بنابراین به شبکه محاسباتی با 10^6 تا 10^{12} گره احتیاج است که بتواند همه فرایندهای آشفتگی جریان را مشخص کند، از طرف دیگر سریع ترین

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 u = \frac{\partial^2}{\partial y^2} H_1 - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} H_2 + \frac{1}{Re} \nabla^4 U \quad (12)$$

این معادله برای پیشروی محاسبات در دامنه زمان مورد استفاده قرار می‌گیرد. مؤلفه سرعت در جهت y هم به کمک معادله پیوستگی به راحتی به دست می‌آید.

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x} \quad (13)$$

۳- شرایط مرزی

به دلیل این که معادلات ناویر-استوکس و پیوستگی برای متغیرهای محاسباتی حل می‌شوند شرایط مرزی بر روی متغیرهای محاسباتی اعمال می‌شوند. معادله (۱۲) یک معادله دیفرانسیل مرتبه چهار می‌باشد، در نتیجه نیاز به اعمال چهار شرط مرزی داریم. مقادیر u در مرز ورودی و مرز خروجی مجموعه محاسباتی مشخص می‌باشد. همچنین با توجه به معادله پیوستگی، $\partial u / \partial x$ هم در مرزهای ورودی و خروجی مجموعه محاسباتی معلوم است. این شرایط مرزی به شرایط دریشله^{۱۲} و نیومن^{۱۳} معروف می‌باشند.

در شبیه سازی، مؤلفه سرعت لحظه‌ای در جهت جریان اصلی در ورودی، می‌تواند به صورت یک پروفیل چند جمله‌ای به صورت معادله (۱۴) و یا پروفیل چند تک‌ای به صورت (۱۵) استفاده نمود.

$$U(y) = 0.332y - 0.00023y^4 + 1.998 \times 10^{-3}y^7 - 1.571 \times 10^{-7}y^{10} + 1.13 \times 10^{-9}y^{13} \quad (14)$$

$$U(y) = \begin{cases} 1.8y - 1.9683y^4 & (0 \leq y \leq \frac{4}{9}) \\ 1 - 0.81(1-y)^2 & (\frac{4}{9} \leq y \leq 1) \\ 1 & (y \geq 1) \end{cases} \quad (15)$$

در مرز خروجی هم از یک شرط مرزی جابجایی^{۱۴} استفاده شده است. در مرز خروجی نباید هیچ گونه برگشت جریان و یا وجود تأثیرات خروجی به داخل شبکه محاسباتی داشته باشیم. در این مرز از معادله جابجایی برای تولید شرط

از طرفی می‌دانیم که $\nabla(\text{scalar}) = 0$ می‌باشد. در نتیجه معادله (۵) به فرم معادله (۶) تبدیل خواهد شد:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{H} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega \quad (6)$$

با تکرار عمل ضرب بالا در معادله (۶) به معادله زیر خواهیم رسید:

$$\frac{\partial \nabla \times (\nabla \times \mathbf{U})}{\partial t} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{U}) + \frac{1}{Re} \nabla^2 (\nabla \times (\nabla \times \mathbf{U})) \quad (7)$$

با بکار بردن معادله پیوستگی $(\nabla \cdot \mathbf{U}) = 0$ و رابطه ریاضی مشخص^(۸):

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{U}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{U}) - \nabla^2 \mathbf{U} \quad (8)$$

به فرم محاسباتی (۹) خواهیم رسید:

$$\frac{\partial \nabla^2 \mathbf{U}}{\partial t} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) + \frac{1}{Re} \nabla^4 \mathbf{U} \quad (9)$$

که $\mathbf{H} = (H_1, H_2, H_3) = \mathbf{U} \times \omega$ ترم‌های غیر خطی هستند. عمده مزیت استفاده از این فرم معادلات ناویر-استوکس، اولاً کاهش تعداد متغیرهای مستقل و در نتیجه کاهش فضای محاسباتی مورد نیاز و ثانیاً عدم احتیاج به تعیین فشار در مرزهای مسئله می‌باشد. در عین حال در مقابل این دو مزیت، تغییر درجه معادله دیفرانسیل حاکم از دو به چهار را باید تجربه کرد.

در معادله (۹) بردار سرعت \mathbf{U} به دو قسمت جریان پایه^{۱۱} $(U_0(y), 0)$ و متغیرهای محاسباتی $(u(x, y, t), v(x, y, t))$ به فرم معادلات (۱۰) تجزیه می‌گردد:

$$\mathbf{U} = (U, V) = U\hat{i} + V\hat{j} \quad (10)$$

$$U(x, y, t) = u(x, y, t) + U_0(y)$$

$$V(x, y, t) = v(x, y, t)$$

همچنین با توجه به تعریف بردار H مقادیر H_1 و H_2 به صورت معادلات (۱۱) به دست می‌آید:

$$H_1 = V \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right) \quad (11)$$

$$H_2 = -U \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right)$$

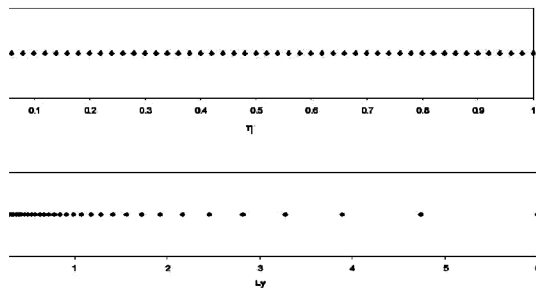
با اعمال آن همراه با معادلات (۱۰) در فرم محاسباتی، معادله ناویر-استوکس (۹) به معادله (۱۲) دست خواهیم یافت:

$0 \leq \eta \leq 1$ نگاشت می کند. فواصل گره ها در مجموعه محدود شده یک اندازه و یکنواخت می باشند ولی در مجموعه فیزیکی این فواصل متساوی نیستند و در ناحیه ای بیشتر متمرکزند.

$$y = (L_y y_0 \eta) / (y_0 + L_y (1 - \eta)) \quad (17)$$

که در این رابطه y_0 پارامتر نگاشت است و میزان کشیدگی را تعیین می کند.

در شکل ۱ می توانیم توزیع شبکه را بر روی شبکه کشیده شده با $y_0 = 0.5$, $L_y = 6$, $N_y = 50$ با نگاشت ذکر شده، مشاهده کنیم.



شکل ۱ مقایسه قلمروهای فیزیکی و محاسباتی

مشتقات در فواصل فیزیکی به وسیله قانون زنجیره ای به هم مرتبط می شوند. عبارتهای مشتق اول، دوم و چهارم در فواصل فیزیکی تابعی از مشتقات در دامنه محاسباتی به صورت زیر می باشد.

$$\begin{aligned} \therefore \frac{d}{dy} &= \eta_y \frac{d}{d\eta} \\ \therefore \frac{d^2}{dy^2} &= \eta_{yy} \frac{d}{d\eta} + \eta_y^2 \frac{d^2}{d\eta^2} \\ \therefore \frac{d^4}{dy^4} &= \eta_{yyy} \frac{d}{d\eta} + 6\eta_y^2 \eta_{yy} \frac{d^2}{d\eta^2} + 4\eta_y \eta_{yyy} + 3\eta_{yy}^2 \frac{d^2}{dy^2} + \eta_y^4 \frac{d^4}{d\eta^4} \end{aligned} \quad (18)$$

۵- مراحل انجام محاسبات

الگوریتم کاری برای حل معادله ناویر - استوکس با توجه به چهار شرط مرزی و یک شرط اولیه به صورت زیر است:

- با توجه به شرط اولیه مشخص برای u و شرایط مرزی معلوم برای u و v و $\partial u / \partial x$ ، طبق

مرزی دریشه برای هر دو مؤلفه سرعت استفاده می کنیم که معادله آن به صورت زیر می باشد:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -c \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (16)$$

در این معادله، مؤلفه های سرعت u و v جایگزین ψ می گردند. ضریب c برابر با سرعت کلی انتقال موج و یا سرعت متوسط جریان در جهت اصلی در مرز خروجی است. مقدار c بین صفر و یک می باشد. البته مقدار دقیق این پارامتر مشخص نیست و باید با تخمین مناسبی در مجموعه محاسباتی تعیین شود [۱۲].

شرط اولیه

شرط اولیه برای شبیه سازی جریان لایه مرزی همراه با اغتشاشات، نتیجه به دست آمده از جریان لایه مرزی دو بعدی در حالت پایدار زمانی می باشد که در آن شرط مرزی ورودی برابر با جریان اولیه است و هیچ گونه اغتشاشی نداریم. در لایه مرزی پایدار زمانی در گره های مختلف بعد از گذشت زمان، مقدار سرعت در آن دیگر تغییر نمی کند و مستقل از زمان و پایدار می گردد.

۴- شبکه سازی (محدود کردن دامنه y)

در جریان های توأم با تمرکز گرادینهای بزرگ، در نواحی خاص برای نشان دادن خواص جریان به دقت بیشتری نیاز است. به عنوان مثال، جریان سیال لزج در نزدیکی دیواره ها دارای گرادین بزرگی است. محاسبه ی دقیق گرادین جریان در این نواحی نیاز به تعداد زیادی نقطه در شبکه قلمرو حل دارد. به جای استفاده از شبکه ای با توزیع یکنواخت در قلمرو فیزیکی، نقاط شبکه را می توان در نواحی با گرادین بالا به صورت متراکم در آورد که در نتیجه آن، تعداد کل نقاط شبکه کاهش می یابد و راندمان بالا می رود.

در این پژوهش نگاشت جبری^{۱۵} با امکان ایجاد تراکم، به صورت معادله (۱۷) استفاده شده است. قابل ذکر است این شبکه برای محاسبات لایه مرزی مناسب است که به تراکم نقاط در نزدیکی سطوح جامد نیاز دارد. این عمل باعث صرفه جویی در هزینه محاسبات خواهد شد. این نگاشت جبری، دامنه فیزیکی $0 \leq y \leq L_y$ را به دامنه محاسباتی

۱۰- مشتق گیری و پیشروی محاسبات در دامنه ی

زمان

مشتمقات مادی با به کار بردن طرح اختلاف محدود فشرده استاندارد ارایه شده توسط لایله محاسبه شده است. لایله مشتق اول تابع $f(x)$ را به طور ضمنی مطابق معادله (۱۹) بیان کرده است [۱۴].

$$\alpha f'_{j-1} + f'_j + \alpha f'_{j+1} = \frac{\alpha + 2}{3\Delta x} (f_{j+1} - f_{j-1}) + \frac{4\alpha - 1}{12\Delta x} (f_{j+2} - f_{j-2}) \quad (19)$$

که در آن علامت پریم نمایانگر مشتق اول، J بیانگر شماره گره $(0 \leq j \leq J)$ و $\Delta x = L_x/J$ می باشد. اگر در معادله (۱۹)، $\alpha = 1/4$ یا $\alpha = 1/3$ قرار داده شود به طرحهایی با مرتبه خطای چهارم و ششم می رسیم.

در مرزها یعنی جایی که $j=0$ یا $j=J$ است، از یک طرح مرتبه سوم یک طرفه ضمنی استفاده شده است.

$$f'_0 + 2f'_1 = \frac{1}{2\Delta x} (-5f_0 + 4f_1 + f_2) \quad (20)$$

$$f'_j + 2f'_{j-1} = \frac{1}{2\Delta x} (5f_j - 4f_{j-1} - f_{j-2}) \quad (21)$$

در همسایگی مرزها یعنی جایی که $j=1$ یا $j=J-1$ است از معادله (۱۹) در حالتی که $\alpha = 1/4$ است، استفاده می شود.

همان طور که توسط لیلی بحث شده است، با قرار دادن $\alpha' = (16\alpha + 32)/(40\alpha - 1)$ به جای α در معادله (۱۹) برای گره های $j=2$ و $j=J-2$ می توان پایداری و

بقای عددی معادله $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} f(u)$ را تضمین نمود.

در شکل ۲ مقایسه بین نتایج عددی مشتق اول و مقدار حقیقی تابع $y = 2x + \cos(3x)$ را می توان ملاحظه نمود.

معادله پیوستگی، مقدار v برای داخل شبکه محاسبه می شود.

۲. با توجه به این که $\omega = \nabla \times \mathbf{U}$ است و برای

حالت دو بعدی $\omega_1 = 0$ و $\omega_2 = 0$ است، مقدار $\omega_3 = \omega = \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}$ محاسبه می شود.

۳. جمله غیرخطی \mathbf{H} مطابق تعریف برابر

$\mathbf{H} = \mathbf{U} \times \omega$ می باشد که برای حالت دو بعدی

$H_3 = 0$ است و مقادیر $H_1 = V(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y})$ و

$H_2 = -U(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y})$ محاسبه می شوند.

۴. ترم های غیرخطی در معادله ناویر- استوکس به

صورت $(\partial^2 H_1 / \partial y^2) - (\partial^2 H_2 / \partial x \partial y)$ می باشد و محاسبه می شوند.

۵. ترم های لزجتی که در معادله به صورت

$(1/Re)\nabla^4 U$ ظاهر شده اند، محاسبه می شوند.

دقت شود که با توجه به معادله پیوستگی، شرط

مرزی $\partial u / \partial x = -\partial v / \partial y$ محاسبه و در آن اعمال شود.

۶. قبل از مبادرت به تجدید مقدار u ، بایستی

شرایط مرزی ورودی و خروجی را محاسبه کنیم.

در مرز ورودی این شرط به صورت یک تابع که

در موقعیت های عرضی مختلف می تواند به

صورت تابعی از زمان تغییر کند معرفی می شود و

در مرز خروجی با استفاده از شرط جابجایی به

وجود می آید.

۷. بعد از محاسبه طرف راست معادله ناویر-

استوکس، با توجه به روش رانج کوتای مرتبه

سوم مقدار $\nabla^2 u$ محاسبه می شود.

۸. با مشخص شدن $\nabla^2 u$ ، طبق مقاله بارتلز با حل

معادله پواسون، مقدار u استخراج می شود

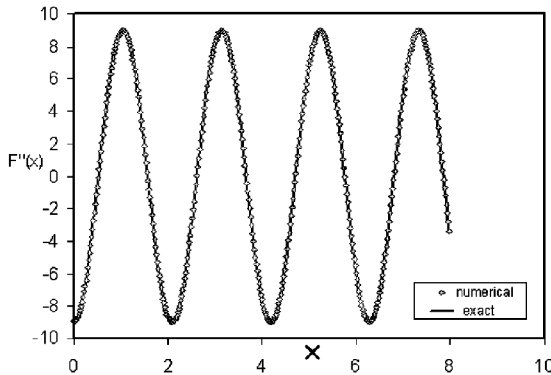
[۱۳].

۹. تمام مراحل ذکر شده در بالا برای یک گام، زمانی

است که از u تولید شده در مرحله قبل به عنوان

شرط اولیه جدید در مراحل زمانی بعدی استفاده

می شود.



شکل ۳ تقریب مشتق دوم تابع $y = 2x + \text{Cos}(3x)$

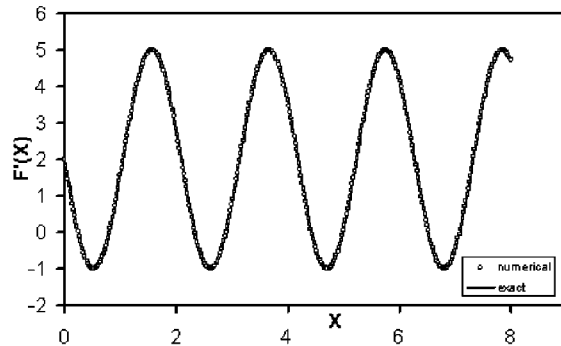
برای محاسبه مشتقات چهارم هم می توان اپراتور مشتق دوم را دو بار اعمال کرد، که در طرف راست معادله ناویر-استوکس و در قسمت ترم های لزجتی وجود دارد. یک طرح اختلاف زمانی رانج کوتای مرتبه سوم فشرده به وسیله رای بیان شده است که برای پیشرفت زمانی به کار برده می شود [۱۵]. برای پیشروی زمانی معادله ای به صورت معادله (۲۵)، مطابق با جدول (۱) می توان فرایند را انجام داد.

جدول ۱ طرح پیشروی زمانی رانج کوتای مرتبه سوم

زمان	اولین موقعیت	دومین موقعیت
t^n	u^n	$R(u^n)$
$t' = t^n + c_1 \Delta t$	$u' = u^n + c_1 \Delta t R$	$R' = R(u')$
$t'' = t' + (c_2 + d_2) \Delta t$	$u'' = u' + (c_2 R' + d_2 R) \Delta t$	$R'' = R(u'')$
$t^{n+1} = t^n + \Delta t$	$u^{n+1} = u^n + (c_3 R'' + d_3 R') \Delta t$	

$$\frac{\partial u}{\partial t} = R(u) \quad (25)$$

برای پیشروی زمانی معادله مدل فوق به اندازه Δt ، طرف راست معادله باید در سه زیر- زمان محاسبه گردد. در هر یک از این مراحل زمانی، زمان به صورت $(c_i + d_i) \Delta t$ تقسیم شده است و u به وسیله یک ترکیب خطی از R



شکل ۲ تقریب مشتق اول تابع $y = 2x + \text{Cos}(3x)$

طبق مقاله لیله معادله (۲۲) مشتق دوم تابع $f(x)$ را معرفی می کند که یک طرح اختلاف محدود فشرده و با دقت مرتبه چهارم است.

$$\alpha f''_{j-1} + f''_j + \alpha f''_{j+1} = \frac{4(1-\alpha)}{3\Delta x^2} (f_{j-1} - 2f_j + f_{j+1}) + \frac{10\alpha - 1}{12\Delta x^2} (f_{j+2} - 2f_j + f_{j-2}) \quad (22)$$

که در آن $\alpha = 1/4$ است.

در مرزها از یک طرف مرتبه سوم یک طرفه ضمنی استفاده شده است.

$$f''_0 + 11f''_1 = \frac{1}{\Delta x^2} (13f_0 - 27f_1 + 15f_2 - f_3) \quad (23)$$

$$f''_J + 11f''_{J-1} = \frac{1}{\Delta x^2} (13f_J - 27f_{J-1} + 15f_{J-2} - f_{J-3}) \quad (24)$$

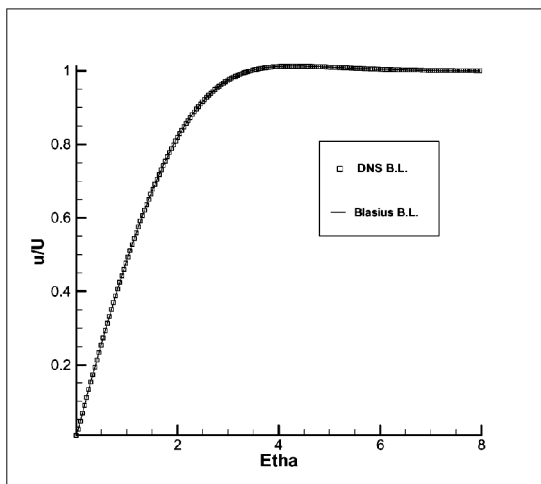
نزدیک مرزها یعنی جایی که $z = J - 1$ و $z = 1$ طرح اختلاف محدوده فشرده مرتبه دوم استفاده شده است که با جایگزینی $\alpha = 1/10$ در معادله (۲۲) به دست می آید.

در شکل ۳ مقایسه بین نتایج عددی مشتق دوم و مقدار حقیقی تابع $y = 2x + \text{Cos}(3x)$ را می توان ملاحظه نمود.

۷- نتایج حل DNS برای جریان لایه مرزی

دو بُعدی معادله بلازیوس

بلازیوس در سال ۱۹۰۸ حل لایه مرزی لایه‌ای روی یک صفحه تخت را پیدا کرد. ایشان با توجه به تشابهی که بین پروفیل‌های سرعت در کلیه مقاطع لایه مرزی وجود داشت، توانست با استفاده از یک متغیر نظیر h به جای دو متغیر x و y معادلات لایه مرزی را به یک معادله دیفرانسیل معمولی تبدیل کند. معادله حاصله را نمی توان به شکل بسته حل نمود؛ بلازیوس آن را با استفاده از بسط سری نمایی حول $\eta = 0$ ، که با بسط مجانبی برای $\eta \rightarrow \infty$ هماهنگ بود، حل کرد. همین معادله بعداً با دقت بیشتر مجدداً با استفاده از روش‌های عددی توسط هوارت^{۱۶} حل شده است، او نتایج را تا ۵ رقم اعشار بیان کرده است [۱۶]. با ترسیم u/U بر حسب η با توجه به نتایج هوارت و مقایسه آن با نتایج حل مستقیم عددی، در شکل ۵ صحت حل استفاده شده در این تحقیق آشکار می‌شود.



شکل ۵ مقایسه بین حل بلازیوس با روش DNS

گذر زمانی

برای شبیه‌سازی جریان لایه مرزی، بدون اغتشاشات ورودی انتظار داریم که سرعت لحظه‌ای، در هر نقطه‌ای از دامنه، به یک حالت پایدار برسد. این موضوع کاملاً و به وضوح در شکل‌های ۶ و ۷ نشان داده شده است.

زیر- زمان حال و R در زیر- زمان گذشته محاسبه می‌گردد. بعد از گذشت مرحله سوم، زمان برابر Δt و مقدار u محاسبه شده برابر مقدار u بعد از گذر از یک Δt زمانی است.

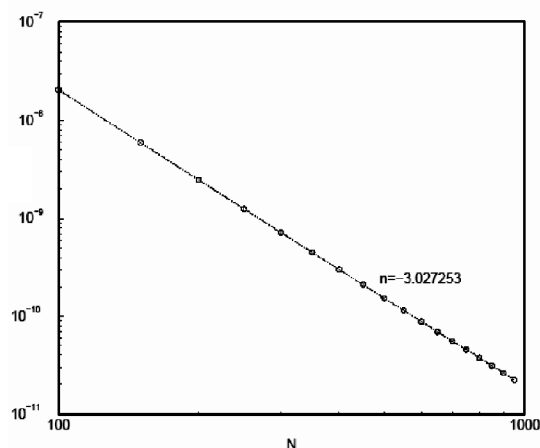
برای محاسبه ضرایب c و d می‌توان از یک سری تیلور استفاده نمود که نتیجه آن به صورت زیر است.

$$\begin{aligned} c_1 &= 8/15 & d_1 &= 0 \\ c_2 &= 5/12 & d_2 &= -17/60 \\ c_3 &= 3/4 & d_3 &= -5/12 \end{aligned}$$

تست زیر برای تعیین دقت طرح مذکور انجام شده است. $u(t) = e^{-t}$ همراه با شرط اولیه $u(0) = 1$ یک حل تحلیلی برای معادله (۲۶) است.

$$\frac{du}{dt} = -u(t) \quad (26)$$

ماکزیمم خطا بین نتایج عددی و حل دقیق در شکل ۴ رسم شده است که به روشنی نشان دهنده صحیح بودن دقت مرتبه سوم این طرح می‌باشد.

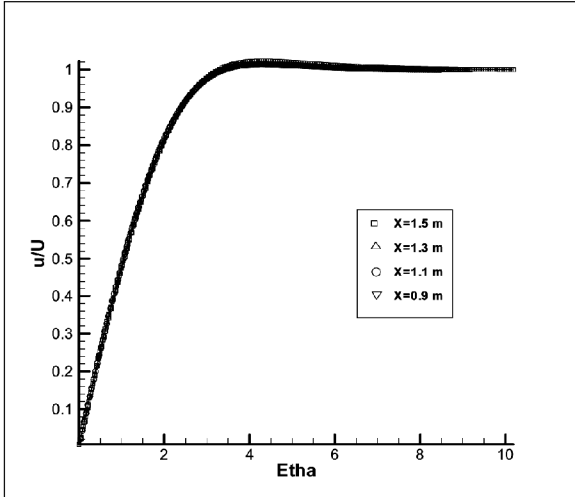


شکل ۴ مرتبه دقت طرح پیشروی در زمان برای

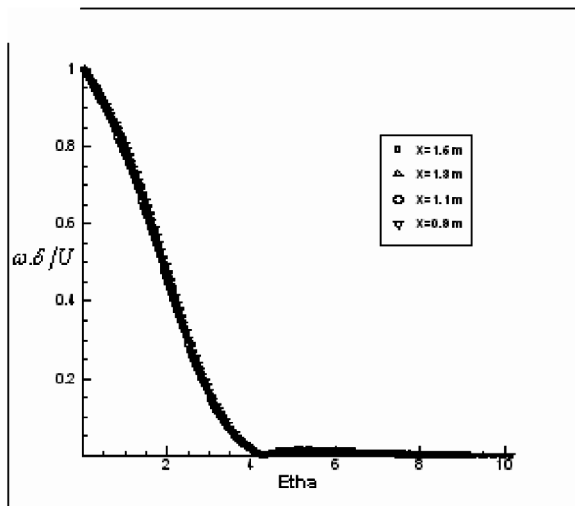
$$[12]. u(0) = 1 \text{ با } \frac{du}{dt} = -u(t)$$

خودتشابهی

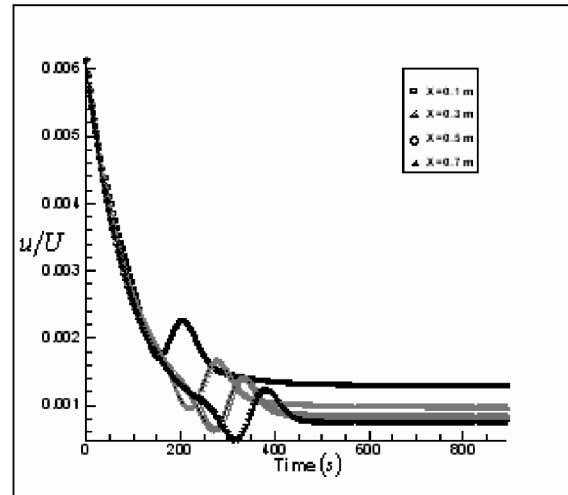
رفتار خودتشابهی سرعت و گردابه جریان لایه مرزی آرام در شکل های ۸ و ۹ برای نقاط مختلف نشان داده شده است.



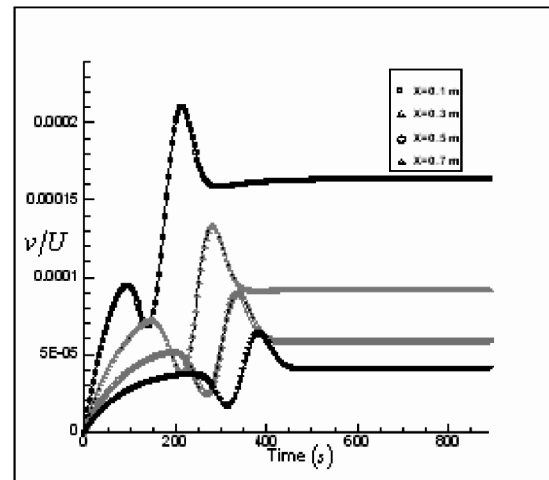
شکل ۸ پروفیل سرعت u در مختصات خود تشابهی برای شبیه سازی جریان لایه مرزی بدون اغتشاش ورودی در چهار فاصله مساوی جریان



شکل ۹ پروفیل گردابه ω در مختصات خود تشابهی برای شبیه سازی جریان لایه مرزی بدون اغتشاش ورودی در چهار فاصله مساوی جریان



شکل ۶ گذر زمانی مؤلفه افقی سرعت، u ، در چهار فاصله مساوی برای شبیه سازی جریان لایه مرزی دو بُعدی بدون اغتشاش ورودی

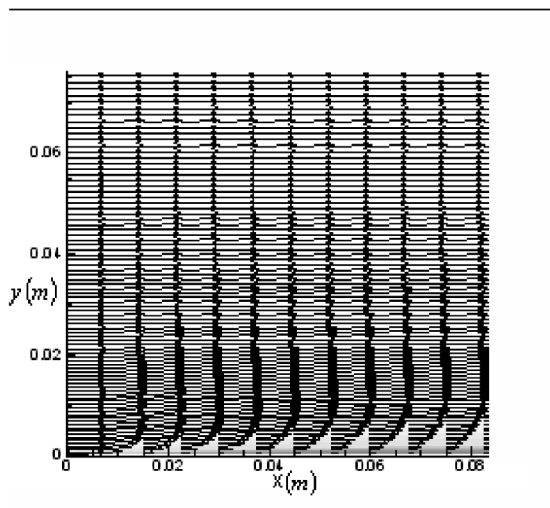


شکل ۷ گذر زمانی مؤلفه عمودی سرعت، v ، در چهار فاصله مساوی برای شبیه سازی جریان لایه مرزی دو بُعدی بدون اغتشاش ورودی

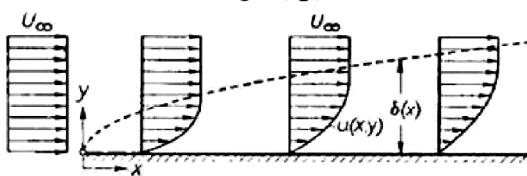
پنتون^{۱۷} (۱۹۸۴) در کتاب خود در این مورد بحث جالبی را آورده است، که به طور خلاصه می توان گفت که در گرادین های موافق، جریان می تواند به سمت دیوار حرکت کند [۱۷].

رشد ضخامت لایه مرزی

در شکلهای ۱۲ و ۱۳ رشد ضخامت جریان لایه مرزی توسعه یافته مکانی با توجه به حل DNS و نمای شماتیک حاصل از نتایج شلختینگ^{۱۸} مقایسه گردیده است [۱۸].



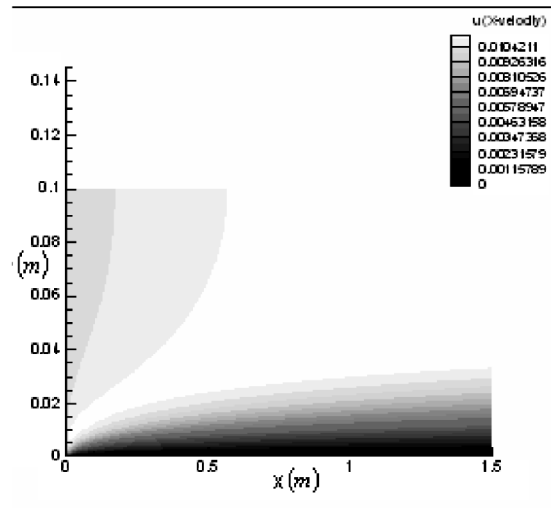
شکل ۱۲ نمای رشد جریان لایه مرزی توسعه یافته مکانی مطابق با حل DNS



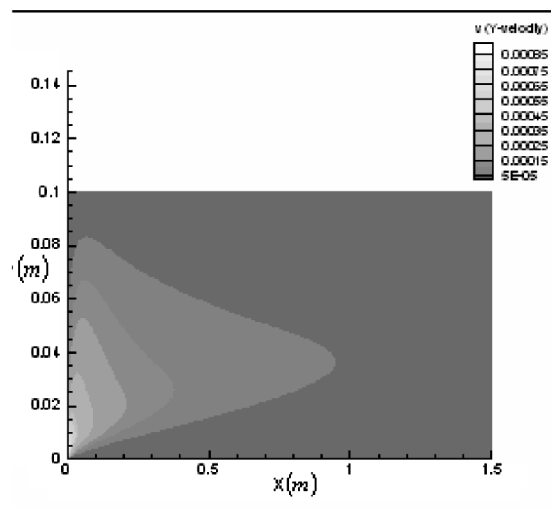
شکل ۱۳ نمای شماتیک جریان لایه مرزی توسعه یافته مکانی [۱۸]

۸- نتیجه گیری

در این تحقیق به بررسی جریان لایه مرزی صفحه ای غیر قابل تراکم به کمک شبیه سازی مستقیم عددی معادله ناویر-استوکس در فرم چرخشی پرداخته شد. این روش با حل عددی بلازیوس، انجام شده توسط هوارت، مقایسه شده است. پروفیل ها و کانتورهای سرعت در مقاطع مختلف،



شکل ۱۰ کانتور مؤلفه افقی سرعت، u ، برای جریان لایه مرزی در کل دامنه مطابق با حل DNS بدون اغتشاش ورودی



شکل ۱۱ کانتور مؤلفه عمودی سرعت، v ، برای جریان لایه مرزی در کل دامنه مطابق با حل DNS بدون اغتشاش ورودی

کانتور مؤلفه های سرعت

از نکات قابل توجه، که در کانتور مؤلفه عمودی سرعت، v ، نشان داده شده است، آن است که، v در لبه مرز صفر نمی باشد. این مسئله به علت جابجایی جریان خارجی است.

[5] Kim J., Moin P., and Moser R., "Turbulence statistics in fully developed channel flow at low reynolds number", Journal of Fluid Mech., Vol. 177, 1981, pp. 133-166.

[6] kreplin H. and Eckelmann H., "Behaviour of the three fluctuating velocity components in the wall region of a turbulent channel flow", Physics of Fluids, Vol. 22, 1979, pp. 1233-1239.

[7] Spalart R., "Direct simulation of a turbulent boundary layer up to $Re=1410$ ", Journal of Fluid Mech., Vol. 187, 1988, pp. 61-98.

[8] Le H., Moin P. and Kim J., "Direct numerical simulation of turbulent flow over a backward-facing step", Journal of Fluid Mech, Vol. 330, 1997, pp. 349-374.

[9] Na Y. and Moin P., "Direct numerical simulation of turbulent boundary layers with adverse pressure gradient and separation", Rep. TF-68, Thermosci. Div., Dept. Mech. Eng., Stanford, 1996.

[10] Feiereisen W.J., Reynolds W.C., and Ferziger J.H., "Numerical simulation of a compressible, homogeneous turbulent shear flow", Rep. TF-13, Thermosci. Div., Dept. Mech. Eng., Stanford, 1981.

[11] Reynolds W.C., "The Potential and Limitations of Direct and Large Eddy Simulations", Journal of Lumley, Turbulence at the Crossroads, New York., Springer, 1990, pp. 313-343

[12] Maghrebi M.J., *A Study of Evolution of Intense Focal Structures in Spatially-Developing Three-Dimensional Planar Wake*, PhD thesis, Department of Mechanical Engineering, Monash University, Melbourne, Australia, 1999.

[13] Bartles RH. and Stewart G.W., "Solution of the Matrix Equation $AX+XB=C$ ", Communications of the ACM, Vol.15, No. 9, 1972.

[14] Lele S.K., "Compact Finite Difference Scheme with Spectral-Like Resolution", Journal of Computational Physics, Vol. 103, 1992, pp.16-12.

[15] Wray A. and Hussaini M.Y., "Numerical Experiments in Boundary Layer Stability", Proc. R. Soc. Lond. A, Vol. 392, 1984, pp 373-389.

[16] Howarth L., "On the solution of the Laminar Boundary - Layer Equation", Proceedings of the Royal Society of London, A164, 1983, pp. 547-479

[17] Panton R.L., *Incompressible Flow*, Wiley, New York, 1984.

[18] Schlichting H., and Gersten K., *Boundary Layer Theory*, Springer-Verlag, 8th Edition, 2005.

بدون هیچ گونه اغتشاش ورودی بررسی شد، همچنین پدیده خود تشابهی در پروفیل سرعت و گردابه در جریان لایه مرزی نشان داده شده است. حال با توجه به صحت نتایج به دست آمده توسط این روش در جریان آرام، با استفاده از رایانه‌های سریع‌تر، می‌توان گام در مرحله بعدی یعنی بررسی دقیق جریان مغشوش نهاد، همچنین با تغییر شرایط مرزی و اعمال آن در معادلات به بررسی هندسه‌های پیچیده‌تر مختلف مبادرت نمود.

۹- پی نوشت

- ¹ Direct Numerical Simulation (DNS)
- ² orszag and patterson
- ³ spectral methods
- ⁴ rogallo
- ⁵ kim and moin
- ⁶ kreplin and eckelmann
- ⁷ spalart
- ⁸ le and moin
- ⁹ na and moin
- ¹⁰ feiereisen
- ¹¹ base flow
- ¹² dirichlit boundary condition
- ¹³ neumann boundary condition
- ¹⁴ convective outflow boundary condition
- ¹⁵ algebraic mapping
- ¹⁶ owarth
- ¹⁷ panton
- ¹⁸ schlichting

مراجع

[1] White F.M., *Viscous Fluid Flow*, 3rd Edition, McGraw-Hill, New York, 2000.

[2] Mathieu J. and Scott J., *An Introduction to Turbulent Flow*, Cambridge University Press, 2000.

[3] Orszag S.A. and Patterson G.S., *Numerical simulation of three-dimensional homogeneous isotropic turbulence*, Phys. Rev. Lett., Vol. 28, 1972, PP.76-79,.

[4] Rogallo R.S., *Numerical experiments in homogeneous turbulence*, NASA TM 81315, 1981.