Archive of SID

بازنمایی‌های چندگانه: فرایندی مهم در یاددهی و یادگیری کسرها

فرزانه نوروزی لرکی[1]، شهرناز بخشعلی زاده[2] و زینب قربانی سی سخت[3]

چکیده: تحقیق حاضر، با هدف بررسی نقش آموزش مبتنی بر بازنمایی‌های چندگانه و اثرات آن روی درک دانش‌آموزان از کسرها، و عملکردشان در حل مسائل شامل کسر اجرا گردید. شرکت کنندگان در این مطالعه ۴۰ دانش‌آموز دختر بودند که در دو مدرسه ابتدایی و در دو کلاس پایه چهارم درس می‌خواندند. روش تحقیق استفاده شده در این تحقیق، تلفیقی از دو روش کمّی و کیفی بود. در روش کمّی از طرح شبه تجربی استفاده شد و دانش‌آموزان یک مدرسه به عنوان گروه کنترل و دانش‌آموزان مدرسه دیگر به عنوان گروه آزمایش در نظر گرفته شدند. به دانش‌آموزان گروه کنترل، مفاهیم شامل کسر با یک رویکرد آموزشی سنتی آموزش داده شد و به دانش‌آموزان گروه آزمایش، همان مفاهیم با رویکرد آموزشی مبتنی بر بازنمایی‌های چندگانه آموزش داده شد. اثر آموزش مبتنی بر بازنمایی‌های چندگانه روی درک دانش آموزان از کسرها، با یک پیش آزمون و پس آزمون (که قبل و بعد از شروع فرایند آموزش، از هر دو گروه به عمل آمد)، ارزیابی شد. همچنین، برای بررسی عمیق‌تر فرایند درک و تفکر دانش آموزان، و عملکرد آن ها هنگام حل مسائل شامل کسر، ۶ مصاحبه با ۶ دانش‌آموز (۳ نفر از هر گروه) انجام شد. علاوه بر این، پس از گذشت حدود چهار ماه از زمانی که مفاهیم شامل کسرها به دانش آموزان آموزش داده شده بود آزمونی تحت عنوان آزمون پایداری یادگیری، از دانش‌آموزان دو گروه به عمل آمد. یافته‌های مطالعه نشان داد، که دانش‌آموزان گروه آزمایش، عملکرد بهتری از خود نشان داده بودند و درک مفهومی‌شان از کسرها توسعه یافته بود. یافته‌ها، همچنین نشان داد که یادگیری دانش آموزان گروه آزمایش از مفهوم کسر، نسبت به یادگیری دانش‌آموزان گروه کنترل پایدارتر بود.

کلمات کلیدی: بازنمایی‌های چندگانه، درک مفهومی، کسر، ریاضیات ابتدایی

۱ - مقدمه

بسیاری از آموزشگران ریاضی (برای مثال: کانتربوری، استیوارت، هیول، و هزیمان)، روی این ادعا که «یکی از دشوارترین مفاهیم ریاضیات مدرسه‌ای در همه سطوح تحصیلی مفهوم کسر می‌باشد» توافق دارند [۱-۵]. مهم نیست که کدام رویکرد آموزشی باید در کلاس درس ریاضی اجرا شود، بلکه آنچه مهم است این است که، هدف اولیه آموزش ریاضیات باید کمک به دانش آموزان در شکل‌گیری درک مفهومی آن‌ها از مفاهیم ریاضی، در همه سطوح تحصیلی به ویژه در دوره ابتدایی، باشد. همان‌گونه که، شورای ملی معلمان ریاضی آمریکا NCTM نیز، تأکید کرده است، هدف آموزش ریاضیات در پایه‌های سوم تا پنجم باید، تمرکز روی ساختن درک مفهومی دانش‌آموزان از مفاهیم دشوار ریاضی، مانند کسرها، باشد [۵]. یکی از این رویکردها که پژوهشگران زیادی روی به کارگیری آن در فرآیند یاددهی مفاهیم پیچیده ریاضی، از قبیل کسرها، تأکید فراوان کرده‌اند، رویکرد آموزشی مبتنی بر «بازنمایی‌های چندگانه[1]» است. هیت، معتقد است که آموزشگران ریاضی، در همه سطوح تحصیلی، تمرکز اصلی آموزش را روی استفاده از بازنمایی‌های جبری قرار می‌دهند و معمولاً بازنمایی‌های شهودی و هندسی را به شمار نمی‌آورند. دلیل این کار آن‌ها این است که فکر می‌کنند بازنمایی‌های جبری، رسمی و دیگر بازنمایی‌ها غیر رسمی هستند. شاید برخی از مشکلات دانش‌آموزان در یادگیری مفاهیم پیچیده ریاضی، از قبیل کسرها، نتیجه همین محدود کردن بازنمایی‌ها در هنگام یاددهی آن مفاهیم باشند. تمایل برای باقی ماندن در یک نوع سیستم ارائه‌ای، منجر به سطحی شدن درک دانش‌آموزان از مفاهیم

تاریخ دریافت مقاله ۸۹/۰۱/۲۹ ، تاریخ تصویب نهایی ۸۹/۰۴/۱۴

[1] **استادیار**، دانشکده علوم پایه، دانشگاه شهید رجائی، (نویسنده مسئول)، پست الکترونیکی: fnowroozi@srttu.edu

[2] **کارشناس ارشد**، سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزش و پرورش

[3] **دانشجوی کارشناسی ارشد**، دانشکده علوم پایه، دانشگاه شهید رجائی

www.SID.ir

Archive of SID

ریاضی و تولید خطا در وضعیت‌های حل مسأله خواهد شد [۶].

اکسا[۲] (۱۹۹۷)، به نقل از کانتربوری[۳]، بیان می‌کند که استفاده از تنوعی از فعالیت‌ها و رویکردهای آموزشی غیرسنتی، در یاددهی کسر، به یادگیری و درک مفهومی دانش‌آموزان از کسرها کمک خواهد کرد [۱]. برای مثال، هر یک از مفاهیم مرتبط با کسر را می‌توان، با به کارگیری تنوعی از مدل‌های بازنمایی (نظیر مدل‌های ملموس، نمودارها و تصاویر، نمادهای نوشتاری، و زبان نوشتاری یا شفاهی) به دانش‌آموزان معرفی کرد. از این رو در مقاله حاضر سعی شده تا نقش بازنمایی‌های چندگانه، در فرایند یاددهی و یادگیری مفاهیم شامل کسر و اثرات آن روی یادگیری و درک دانش‌آموزان پایه چهارم ابتدایی، از این مفاهیم مورد بررسی قرار بگیرد.

۲- مبانی نظری

۲-۱ بازنمایی‌های چندگانه

نظریه بازنمایی‌های چندگانه در درک مفاهیم ریاضی، با کارهای دینس[۴]، که متأثر از نظریه پیاژه بود اهمیت پیدا کرد. در کارهای دینس، مفهوم بازنمایی‌های چندگانه با عنوان «اصل تغییرپذیری تصورات[۵]» نام برده شده است که به معنای ارائه یک ساختار مفهومی در قالب تنوعی از بازنمایی‌های معادل است، به طوری که کودکان بتوانند توسط آن‌ها به جوهره ریاضی یک مفهوم انتزاعی دست پیدا کنند [۷]. دینس، معتقد بود که بچه‌ها در زندگی روزانه-شان با مفاهیم انتزاعی ریاضی آشنا نمی‌شوند؛ از این رو این مفاهیم باید در محدوده‌ای از تجربیات عینی و ملموس به آنها معرفی شوند. دینس، ضمن تأکید بسیار بر به‌کارگیری مواد عینی و ملموس در یاددهی مفاهیم و روابط ریاضی، همچنین تأکید کرد که استفاده صرف از مواد عینی در فعالیت‌های ریاضی، می‌تواند یک معلولیت در هنگام مفهوم سازی از این فعالیت‌ها ایجاد کند. او معتقد بود که مجردسازی نیز باید در کار با بچه‌ها در نظر گرفته شود؛ زیرا هنگامی که نمادها به کارگرفته شوند، مفاهیم ریاضی می‌توانند از مصداق‌های عینی‌شان رها شوند و خود ابزاری برای خلق نمادهای جدید گردند [۷].

کاربرد بازنمایی‌های چندگانه در یادگیری ریاضیات عمیقاً توسط جان ویر[۶] بررسی شده است. جان ویر، معتقد است که یک بازنمایی ممکن است ترکیبی از نوشته‌ای روی کاغذ، یک شئ فیزیکی، یا آرایشی منظم و ساختار یافته از یک ایده در ذهن شخص باشد. او بر طبق این عقیده‌اش، بازنمایی‌ها را به دو صورت بیرونی و درونی در نظر گرفت و بیان کرد که، بازنمایی‌های بیرونی به عنوان محرک‌های عمل کننده روی حواس پنجگانه، یا تجسم‌های ایده‌ها و مفاهیم تعریف می‌شوند. در حالی که، بازنمایی‌های درونی به عنوان مدل‌های ذهنی یا شناختی، طرح‌واره‌ها، تصورات، و اشیای ذهنی تعیین می‌شوند که ملموس نبوده و مستقیماً دیده نمی‌شوند [۷و۸].

آموزشگران ریاضی مدل‌های مختلفی برای به کارگیری بازنمایی‌های چندگانه در آموزش مفاهیم و روابط ریاضی پیشنهاد داده‌اند. یکی از این مدل‌ها، مدلی است که توسط لش[۷] پیشنهاد شده است، و بر اساس نظریه‌های پیاژه، برونر، و دینس ساخته شده است. این مدل براین نکته تأکید می کند که، درک عمیق ایده‌های ریاضی، در توانایی برای ارائه کردن این ایده‌ها، در پنج شیوه مختلف، و توانایی ساختن اتصالات میان شیوه‌ها، بازتاب داده می‌شود [۷]. این پنج شیوه متمایز از بازنمایی‌ها که در یادگیری و حل مسأله ریاضی رخ می‌دهند، عبارتند از:

۱- وضعیت‌های دنیای واقعی: که در آن دانش در اطراف رویدادهای دنیای واقعی سازماندهی می‌شود.

۲- ابزار دست‌ورزی: عناصری هستند که به تنهایی معنای خاصی ندارند؛ اما بر اساس اعمالی که انجام می‌دهند معنا پیدا می‌کنند و عینیت‌شان در وضعیت‌های زندگی واقعی دیده می‌شود.

۳- تصاویر یا نمودارها: عبارتند از مدل‌های شکلی غیر متحرک (ساکن)

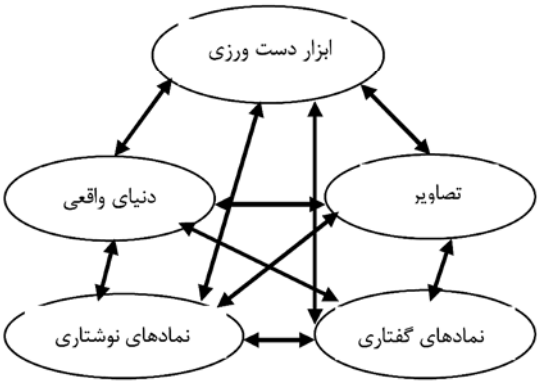
۴- نمادهای گفتاری: برای مثال، می‌تواند زبان روزمره باشد.

۵- نمادهای نوشتاری: که از طریق آن جملات و عبارات معنای خاصی می‌گیرند [۷].

مدل لش (شکل۱)، فقط شامل پنج نوع متمایز از شیوه‌های

www.SID.ir

Archive of SID



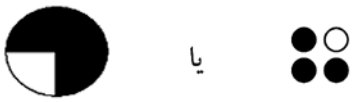
شکل۱ مدل لش ازبازنمایی‌های چندگانه [۹]

بازنمایی نیست؛ بلکه شامل ترجمه‌های[۸] میان آن‌ها نیز می‌باشد. و این ترجمه‌ها به این منظور است که یک دانش‌آموز برای توسعه درک عمیق‌تر مفاهیم، لازم است بین یک بازنمایی و بازنمایی دیگر ارتباط برقرار کند [۲]. در سال ۲۰۰۰ میلادی، شورای ملی معلمان ریاضی آمریکا (NCTM)، سند خود تحت عنوان «اصول و استانداردها برای ریاضیات مدرسه» را منتشر ساخت که شامل یک استاندارد فرایندی جدید بنام «بازنمایی‌ها» بود، و بر اهمیت استفاده از بازنمایی‌های چندگانه در یاددهی و یادگیری مفاهیم و روابط ریاضی تأکید می‌کرد و آن را یکی از مؤلفه‌های اصلی برنامه درسی ریاضی به حساب آورد. NCTM، مفهوم بازنمایی را به عنوان «عمل بیان یک مفهوم یا رابطه ریاضی در برخی از شکل‌ها، علاوه بر شکل خودش» تعریف کرده است [۵]. این تعریف، تعاریف مربوط به بازنمایی‌های بیرونی و درونی را تلفیق می‌کند. بازنمایی‌های درونی در ذهن یادگیرنده اتفاق می افتند و می‌توانند به مدل‌های شناختی، طرحواره‌ها، مفاهیم، یا اشیای ذهنی ارجاع داده شوند. بازنمایی‌های بیرونی تجسماتی از ایده‌ها یا مفاهیم ریاضی هستند مانند نمادهای جبری، جداول، نمودارها و اشکال، بیانات کلامی، و مواد ملموس [۱۰]. NCTM همچنین، بیان کرده است که توجه کردن به بازنمایی‌های مختلف به دانش‌آموزان کمک خواهد کرد تا یک مسأله را از منظرهای مختلفی ببینند. این بازنمایی‌ها، از طریق متمرکز شدن روی جنبه‌های ضروری مسأله ، به واضح شدن، مجسم کردن، یا گسترش دادن یک ایده ریاضی کمک می‌کنند، همچنین به عنوان ابزاری برای تفکر درباره حل مسائل عمل کرده، و به دانش‌آموزان کمک می‌کنند تا تفکرشان را با دیگران رد و بدل نمایند [۵].

۲-۲ مفهوم کسر

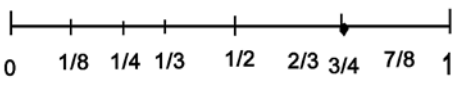
کسرها را می‌توان متناسب با بافتی که در آن استفاده می شوند به معانی مختلفی تعبیر کرد. کرن[۹]، مفهوم کسر را درون پنج زیر ساختار اصلی ارائه کرد که عبارتند از: رابطهٔ جزء- کل[۱۰]، اندازه[۱۱]، عملگر[۱۲]، خارج قسمت[۱۳]، و نسبت[۱۴]. او، از بین این زیر ساختارها، زیر ساختار جزء- کل را مبنا و اساس چهار زیر ساختار دیگر قرار داد و بر اهمیت آن بسیار تأکید کرد [۲]. در ادامه هر یک از این زیرساختارها به اختصار شرح داده می شوند.

۱- رابطهٔ جزء– کل: کرن، جزءبندی را به فرایند تقسیم یک واحد به قسمت‌هایی با اندازه مساوی ارجاع داده است [۲]. برای مثال، کسر $\frac{۳}{۴}$، می‌تواند سه برش خورده شده از یک کیک که در چهار تکه مساوی بریده شده است باشد یا ۳ تخم مرغ از بسته‌ای که ۴ تخم مرغ دارد را نشان دهد (شکل۲).



شکل۲ نمایش‌های مربوط به کسر $\frac{۳}{۴}$ در زیرساختار جزء – کل

۲- اندازه: در این زیر ساختار، به تعبیر کسر، به عنوان مکان یک عدد روی محور اعداد ارجاع داده می‌شود [۲]. برای مثال، منظور از $\frac{۳}{۴}$، یعنی نقطه سیاه نشان داده شده روی محور اعداد زیر:



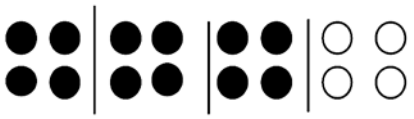
شکل۳ نمایش مربوط به کسر $\frac{۳}{۴}$ در زیرساختار اندازه

www.SID.ir

Archive of SID

هانولا[15]، و اسمیت[16]، معتقدند که فهم دقیق کسر در این زیر ساختار، به دانش‌آموزان کمک خواهد کرد که خاصیت چگال بودن اعداد گویا، که بنا بر آن بین هر دو کسر تعداد نامتناهی کسر وجود دارد، را درک کنند و به این تفاوت اصلی بین اعداد گویا و اعداد طبیعی، پی ببرند [۱۱].

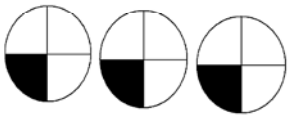
۳- عملگر: بهر[17] و همکاران در این بافت، کسر را به عنوان یک تبدیل[18] تعریف کرده اند. از دیدگاه لامون[19]، عملگر کسری، تبدیلی است که طولی را بلند یا کوتاه نموده، تعدادی را کم یا زیاد می‌کند، و شکل مسطح هندسی را چند برابر بزرگتر یا کوچکتر می‌کند [۲و۱۱]. برای مثال، $\frac{۳}{۴}$، به عنوان عملگر ممکن است به صورت نتیجه سه- چهارم از تعدادی کمیت، درک شود، مثلاً ، $\frac{۳}{۴}$، از شانزده شئ می‌شود ۱۲ و می‌توان آن را به صورت زیر نمایش داد:



شکل۴ نمایش $\frac{۳}{۴}$ در زیرساختار عملگر

۴- خارج قسمت: تمرکز این زیر ساختار از کسر، بر عملیات است. به عبارت دیگر، در زیر ساختار خارج قسمت، کسر می‌تواند به عنوان نتیجه یک تقسیم در نظر گرفته شود، یعنی کسر $\frac{x}{y}$ ، تقسیم x بر y است که x و y اعدادی طبیعی اند [۲و۱۱]. در این بافت، کسر $\frac{۳}{۴}$، را می‌توان به عنوان خارج قسمت ۴÷۳، یا نتیجه تقسیم ۳ کیک میان ۴ نفر تفسیر کرد، که در این صورت هر کیک به ۴ قسمت مساوی تقسیم می‌شود و از هر کدام، یک قسمت، به هر نفر می رسد و در نتیجه سهم هر نفر از کل ۳ کیک برابر است با:

$$\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۴}=\frac{۳}{۴}$$



شکل ۵ نمایش $\frac{۳}{۴}$ در زیرساختار خارج قسمت

۵- نسبت: در این زیرساختار، کسر، رابطه بین دو کمیت را بیان می‌کند و در نتیجه به عنوان یک شاخص مقایسه‌ای عمل می‌کند و اغلب نمایشگر یک عدد نیست [۲و۱۱]. در این بافت، $\frac{۳}{۴}$ را می‌توان به عنوان نسبت پسران به دختران در یک مدرسه تفسیر کرد به طوری که، در مقابل هر ۳ پسر، ۴ دختر وجود دارد.

در مطالعه حاضر، زیرساختار جزء- کل، به عنوان زیر ساختار اصلی، و زیرساختارهای خارج قسمت و عملگر به عنوان زیرساختارهای فرعی، در فعالیت‌های مربوط به آموزش مفاهیم شامل کسر در نظر گرفته شده‌اند.

۳- روش و اهداف تحقیق

هدف کلی در این تحقیق، بررسی اثر آموزش مبتنی بر بازنمایی‌های چندگانه روی درک دانش‌آموزان پایه چهارم ابتدایی از مفاهیم شامل کسر می‌باشد. اهداف جزئی تحقیق عبارتند از:

۱- تعیین اثر یک رویکرد آموزشی مبتنی بر بازنمایی‌های چندگانه روی عملکرد دانش آموزان پایه چهارم در حل مسائل شامل کسر.

۲- تعیین اثر یک رویکرد آموزشی مبتنی بر بازنمایی‌های چندگانه روی پایداری یادگیری دانش‌آموزان پایه چهارم از مفاهیم شامل کسر.

۳- تعیین بدفهمی‌های ممکن که در زمینه‌ی کسرها وجود دارد و اثر رویکرد آموزشی مبتنی بر بازنمایی‌های چندگانه در رفع این بدفهمی‌ها.

سؤالات پژوهش به شرح زیر است:

۱- رویکرد آموزشی مبتنی بر بازنمایی‌های چندگانه، روی عملکرد دانش‌آموزان پایه چهارم در حل مسائل شامل کسر چه تأثیری دارد ؟

۲- دانش‌آموزان پایه‌ی چهارم ابتدایی، چه بدفهمی‌هایی در زمینه‌ی کسرها دارند و آیا یک رویکرد آموزشی مبتنی بر

www.SID.ir

Archive of SID

بازنمایی‌های چندگانه می‌تواند به رفع این بدفهمی‌ها کمک کند؟

برای پاسخ به این سؤالات دو فرضیه در نظر گرفته شده است:

۱- دانش‌آموزانی که با رویکرد آموزشی مبتنی بر بازنمایی‌های چندگانه آموزش می‌بینند نسبت به دانش آموزانی که با رویکرد سنتی آموزش داده می‌شوند، درک مفهومی بالاتری از مفاهیم شامل کسر دارند.

۲- یادگیری دانش‌آموزانی که با رویکرد آموزشی مبتنی بر بازنمایی‌های چندگانه آموزش می‌بینند نسبت به دانش آموزانی که با رویکرد سنتی آموزش داده می‌شوند، پایدارتر است.

روش تحقیق در این مطالعه تلفیقی از دو روش کیفی و کمّی است. سؤالات تحقیق به صورت کیفی تجزیه و تحلیل شده، پاسخ داده می‌شوند، و برای آزمودن فرضیه‌های تحقیق از روش تحقیق کمّی (شبه تجربی)، استفاده می‌شود.

نمونه، نمونه گیری وحجم روش نمونه :

به علت محدود بودن جامعه آماری این تحقیق (۴۳ نفر)، در ابتدا کل جامعه به عنوان نمونه در نظر گرفته شد. به عبارت دیگر، جامعه سرشماری شد. از آن جا که جامعه، شامل دو کلاس پایه چهارم (دو کلاس ۲۲ و ۲۱ نفره) بود، به طور تصادفی، یک کلاس به عنوان گروه کنترل (کلاس ۲۲ نفری) و یک کلاس به عنوان گروه تجربی (کلاس ۲۱ نفری) در نظر گرفته شد. در شروع فرایند آموزش، دو نفر از دانش‌آموزان گروه کنترل که به دلایلی، قبلاً مفاهیم شامل کسر را به طور خصوصی آموزش دیده بودند، بدون این که خودشان اطلاع داشته باشند از نمونه این تحقیق کنار گذاشته شدند. یک نفر هم از دانش‌آموزان گروه آزمایش در هنگام برگزاری پس آزمون در جلسه امتحان حاضر نشد. بنابراین نمونه تحقیق، به ۴۰ نفر تقلیل یافت و برگه‌های پیش و پس آزمون آن‌ها، مورد بررسی قرار گرفت.

فرایند تحقیق

در ابتدای فرایند آموزش، به منظور سنجش میزان دانش اولیه دانش‌آموزان از مفهوم کسر که در پایه‌های قبلی آموخته بودند، یک پیش آزمون کتبی (با سؤالات مفهومی)، از هر دو گروه به عمل آمد. سپس، آموزش مفاهیم شامل کسر (مفهوم کسر، تساوی کسرها، ساده کردن کسرها، مقایسه کسرها، و جمع و تفریق کسرها)، توسط معلم (محقق) آغاز شد. فرایند تدریس، حدود ۱۳ جلسه طول کشید و مدت زمان هر جلسه ۴۵ دقیقه بود. در گروه کنترل مفاهیم با رویکردی سنتی تدریس می‌شد، به این صورت که بازنمایی‌های مختلف هر مفهوم (فیزیکی، تصویری، و نمادین یا جبری) به دانش‌آموزان معرفی می‌شد؛ اما به صورت گسسته و جدا از هم. به عبارت دیگر، هیچ‌گونه اتصالی بین این بازنمایی‌ها برقرار نمی‌شد. پس از معرفی مفهوم مورد نظر تا پایان جلسه، فقط روی بازنمایی جبری تأکید می‌شد و مثال‌هایی که به دانش‌آموزان ارائه می‌گردید فقط با بازنمایی جبری حل می‌شدند. در گروه آزمایش، با ارائه مفهوم در قالب یک مسأله، در حین حل مسأله، علاوه بر این که مفهوم مربوط به هر فعالیت را می‌ساختند، بازنمایی‌های مختلف آن مفهوم و ارتباط بین این بازنمایی‌ها را نیز می‌دیدند، و تا پایان جلسه، مثال‌هایی که به دانش‌آموزان ارائه می‌گشت با بازنمایی‌های مختلف حل می‌شدند. لازم به ذکر است که تمامی مسائل مربوط به این فعالیت‌ها، به دانش آموزان گروه کنترل نیز ارائه می‌شد، با این تفاوت که، در این گروه، پس از آموزش هر مفهوم، مسائل به دانش‌آموزان ارائه شده و آن‌ها در گروه‌های کوچک روی مسأله داده شده کار می‌کردند. نمونه‌ای از این فعالیت‌ها، مربوط به مفهوم مقایسه کسرها، که به دانش‌آموزان گروه آزمایش، ارائه شد به این صورت بود:

«سارا و زهرا دو پیتزای بزرگ خریدند. سارا $\frac{۱}{۴}$ از پیتزای خود را خورد و زهرا $\frac{۳}{۸}$ از پیتزایش را خورد. به نظر شما کدام یک از آنها پیتزای بیشتری خورده است؟ استدلال خود را توضیح دهید. (از پیتزاهای مقوایی که در اختیار دارید، می‌توانید برای پیدا کردن پاسخ‌تان استفاده کنید).»

در پایان آموزش مفاهیم توسط معلم (محقق)، پس آزمونی کتبی با سؤالات مفهومی، از دانش‌آموزان هر دو گروه به عمل آمد، و پس از آن، سه دانش‌آموز از هر گروه برای شرکت در مصاحبه‌های فردی انتخاب شدند. حدوداً چهار ماه پس از آموزش مفاهیم شامل کسر نیز، به منظور بررسی

www.SID.ir

Archive of SID

میزان پایداری یادگیری در دانش‌آموزان هر یک از دو گروه، آزمونی به نام آزمون پایداری یادگیری، از آن‌ها به عمل آمد که سؤالات آن با سؤالات پس آزمون یکسان بود.

ابزار گردآوری داده‌ها (اطلاعات):

۱- مشاهده: معلم (محقق) در طی فرایند یاددهی و یادگیری در کلاس‌های درس هر دو گروه، از روال کار دانش‌آموزان هر دو گروه و طرز برخورد آن‌ها در موقعیت‌های حل مسأله، مشاهده به عمل آورد، و سپس از نتایج این مشاهدات، به عنوان ملاکی برای پاسخ به سؤالات این تحقیق استفاده کرد.

۲- آزمون‌های کتبی: آزمون‌های کتبی، شامل سؤالات و مسائلی بودند که مفاهیم شامل کسر را در برداشتند و از میان سؤالات تیمز، سؤالات مقالات معتبر، و سؤالات محقق ساخته انتخاب شده بودند. این آزمون‌ها، قبل و بعد از فرایند یاددهی مفاهیم کسر، در دو شکل پیش آزمون و پس آزمون، و چهار ماه بعد از آموزش در شکل آزمون پایداری، از آزمودنی‌های هر دو گروه به عمل آمد.

۳- مصاحبه: مصاحبه‌ها که به منظور بررسی عمیق‌تر فرایند تفکر و درک دانش‌آموزان از مفاهیم شامل کسر طراحی شده بودند، با شش نفر از دانش‌آموزان دو گروه و به صورت فردی انجام شدند و در هر یک از آن‌ها ابتدا چند سؤال نگرشی نسبت به کسر از دانش‌آموزان پرسیده شد سپس، پنج مسأله کسر در اختیار آن‌ها قرار گرفت. پس از اتمام وقت مربوط به هر مسأله، یک سری سؤال راجع به همان مسأله از هر دانش‌آموز پرسیده شد.

روایی و پایایی ابزار: برای بررسی میزان روایی آزمون‌های کتبی در این تحقیق، از روایی محتوایی و صوری استفاده شد. پس از تدوین آزمون‌ها به صورت آزمایشی، این دو آزمون از گروهی از دانش‌آموزان پایه چهارم ابتدایی به عمل آمد، و پس از بررسی نتایج آن، و مشورت با صاحب نظران، و هشت تن از معلمین پایه سوم و چهارم ابتدایی، برخی از سؤالات نا مناسب حذف شدند. پس از آن، پیش‌آزمون و پس آزمون نهایی برای ارائه به دانش‌آموزان دو گروه مورد مطالعه تدوین شد، که پیش آزمون شامل ۱۳ سؤال بود؛ اما پس آزمون به علت حجم زیاد محتوا شامل ۲۲ سؤال بود و در دو مرحله از دانش‌آموزان هر دو گروه به عمل آمد. برای بررسی پایایی آزمون‌های این تحقیق، نیز از ضریب آلفای کرونباخ استفاده شده است. مقدار آلفای کرونباخ محاسبه شده در پیش آزمون ۰/۷۱ و در پس آزمون ۹/. به دست آمد که این مقادیر از نظر آماری معنادارند و نشان‌گر این مطلب هستند که آزمون‌ها، برای سنجش میزان درک مفهومی دانش‌آموزان، از دقت کافی برخوردار هستند.

روش تجزیه و تحلیل داده‌ها: برای تجزیه و تحلیل داده‌های مربوط به آزمون‌های کتبی، از آزمون t گروه‌های مستقل استفاده شد و داده‌های به دست آمده از مصاحبه‌ها و مشاهدات نیز به صورت کیفی بررسی و مقایسه شدند.

۴- نتایج و بحث

۴-۱ نتایج کمّی

برای آزمودن فرضیه شماره ۱ این تحقیق، آزمون t نمونه‌های مستقل روی داده‌های مربوط به آزمون‌های کتبی دو گروه (پیش و پس آزمون)، اجرا شد. نتایج مربوط به این آزمون در جدول شماره ۱ نشان داده شده است. با توجه به جدول۱ مشاهده می‌شود که در پیش آزمون، t =۰/۸۱۹ و p =۰/۴۱۸ است که این مقادیر از نظر آماری معنادار نیستند، و می‌توان گفت که دانش‌آموزان هر دو گروه، درک مفهومی یکسانی از مفاهیم پیش نیاز دارند؛ اما در پس آزمون، t = ۳/۳۸۵ و p =۰/۰۰۲، از نظر آماری معنادار هستند. بنابراین می‌توان گفت که در پس آزمون، از نظر آماری تفاوت معناداری بین میانگین‌های دو گروه وجود دارد و دانش‌آموزان گروه آزمایش، که با رویکرد آموزشی مبتنی بر بازنمایی‌های چندگانه آموزش دیده‌اند؛ درک مفهومی‌شان از مفاهیم شامل کسر توسعه یافته است. به عبارتی دیگر، فرض صفر رد می‌شود و فرضیه شماره ۱ تحقیق مورد تأیید قرار می‌گیرد.

به منظور بررسی میزان پایداری یادگیری در دانش‌آموزان دو گروه، روی داده‌های به دست آمده از آزمون پایداری یادگیری دو گروه، آزمون t نمونه‌های مستقل اجرا شد. نتایج این آزمون در جدول ۲ نمایش داده شده است. با توجه به جدول ۲، مشاهده می‌شود که t =۴/۲۱۴ و p =۰/۰۰۰، و این مقادیر هم از نظر آماری معنادار هستند؛

www.SID.ir

Archive of SID

جدول ۱ آزمون t نمونه‌های مستقل در پیش آزمون و پس آزمون

	آزمون لیونز برای برابری واریانس‌ها		آزمون t برای برابری میانگین‌ها						
	f	sig	t	درجه آزادی df	Sig (2-Taild)	اختلاف میانگین	خطای انحراف استاندارد	٪۹۵ فاصله‌ی اطمینان از واریانس	
								حد پایین	حد بالا
پیش آزمون	۰/۱۴۴	۰/۷۰۶	۰/۸۱۹	۳۸	۰/۴۱۸	۰/۸۲۵۰	۱/۰۰۷۴	-۱/۲۱۴۴	۲/۸۶۴۴
پس آزمون	۰/۰۸۹	۰/۷۶۸	۳/۳۸۵	۳۸	۰/۰۰۲	۲/۹۷۵۰	۰/۸۷۸۸	۱/۱۹۶۱	۴/۷۵۳۹

جدول۲ آزمون t نمونه‌های مستقل در آزمون پایداری یادگیری

	آزمون لیونز برای برابری واریانس‌ها		آزمون t برای برابری میانگین‌ها						
	f	sig	t	درجه آزادی df	sig (2-Taild)	اختلاف میانگین	خطای انحراف استاندارد	٪۹۵ فاصله‌ی اطمینان از واریانس	
								حد پایین	حد بالا
آزمون پایداری یادگیری	۰/۶۶۷	۰/۴۲۰	۴/۲۱۴	۳۴	۰/۰۰۰	۳/۸۰۵۶	۰/۹۰۳۱	۱/۹۷۰۲	۵/۶۴۰۹

بنابراین می‌توان گفت که، دانش‌آموزان گروه آزمایش، که با رویکرد آموزشی مبتنی بر بازنمایی‌های چندگانه آموزش دیده‌اند، یادگیری‌شان از مفاهیم کسر پایدارتر بوده است. به عبارتی دیگر، فرضیه شماره ۲ تحقیق نیز تأیید می‌شود.

۴-۱ تحلیل کیفی

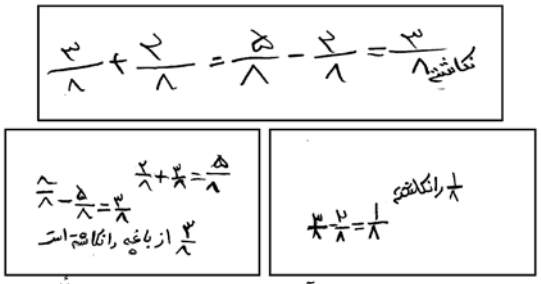
در طول فرایند یاددهی و یادگیری، در کلاس‌های درس هر دو گروه، مشاهدات کلاسی از رفتار ریاضی دانش‌آموزان و فرایند تفکر آن‌ها به هنگام کار کردن با مفاهیم کسر، ثبت و ضبط شد. در پایان فرایند یاددهی و یادگیری، برای بررسی عمیق‌تر فرایند درک و تفکر دانش‌آموزان، با شش نفر از آن‌ها، مصاحبه به عمل آمد. بدین صورت که، پنج مسأله کسر (بیشتر از نوع مسائل کلامی)، به ترتیب در اختیار هر شرکت کننده قرار داده شد و ضمن مشاهده کار آن‌ها، چند سؤال در خصوص همان مسأله از شرکت کنندگان پرسیده شد که تا حدود زیادی فرایند تفکر آن‌ها را مشخص می‌کرد. برخی از این سؤالات به این صورت بودند: «این مسأله، دقیقاً از شما چه کاری می‌خواست که انجام دهید؛ در شروع حل این مسأله، به فکر استفاده از کدام یک از بازنمایی‌ها افتادید؛ اگر دستور العمل‌های مسأله به شما نمی‌گفتند که، از شکل‌ها هم می‌توانید استفاده کنید، آیا در حل‌تان از شکل استفاده می‌کردید؛ کدام یک از مفاهیم را باید در حل این مسأله استفاده می‌کردید؟» پاسخ‌های سه شرکت کننده از گروه کنترل، به طور کلی به این صورت بود که آن‌ها، در شروع حل مسأله بیشتر به فکر استفاده از محاسبات و بازنمایی‌های جبری می‌افتادند و اگر دستورالعمل‌ها، استفاده از شکل‌ها را پیشنهاد نداده بودند، از شکل استفاده نمی‌کردند. آن‌ها مفاهیمی را که باید در حل مسأله استفاده می‌کردند، به کلید واژه‌های مسأله ربط می‌دادند. برای مثال اگر در صورت مسأله، کلید واژه *باقی مانده*، آمده بود، بیان می‌کردند که مفهوم تفریق را برای این مسأله نیاز دارند. در مقابل، پاسخ‌های سه دانش‌آموز

www.SID.ir

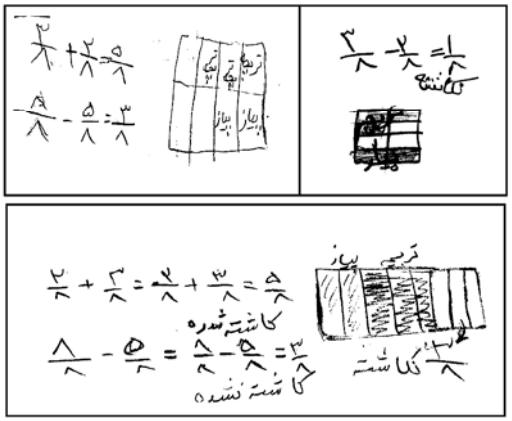
Archive of SID

دیگر، که با رویکردی مبتنی بر بازنمایی‌های چندگانه آموزش دیده بودند، به این صورت بود که آن‌ها، در شروع حل مسأله فوراً به فکر رسم شکلی برای مسأله می‌افتادند و سپس با توجه به شکل رسم شده محاسبات جبری را انجام می‌دادند. به عبارت دیگر، آن‌ها تنها بر یک بازنمایی خاص متمرکز نمی‌شدند و از بازنمایی‌های مختلفی مانند رسم تصویر، و روش‌های جبری برای ارائه پاسخ خود استفاده می‌کردند. آن‌ها بیان کردند که این کار (استفاده از شکل) را در صورتی که دستورالعمل‌ها به سمت استفاده از تصاویر راهنمایی نمی‌کردند، نیز انجام می‌دادند. زیرا، شکل به آن‌ها کمک می‌کرد که مسأله را بهتر بفهمند و درستی یا نادرستی پاسخ خود را ببینند. در ادامه، برای روشن‌تر شدن بحث بالا پاسخ‌های شش دانش‌آموز به مسأله شماره ۴ مصاحبه مورد بررسی قرار داده می‌شود.

مسأله شماره ۴ : *پدر سارا، $\frac{۳}{۸}$ از باغچه حیاط خانه خود را تربچه و $\frac{۲}{۸}$ از آن را پیاز کاشته است. او چه کسری از این باغچه را نکاشته است؟*



شکل۶ پاسخ دانش‌آموزان گروه کنترل به مسأله شماره۴ مصاحبه



شکل۷ پاسخ دانش‌آموزان گروه آزمایش به مسأله شماره ۴ مصاحبه

۴-۲-۱ نتایج کیفی (پاسخ به سؤالات تحقیق)

سؤال ۱: رویکرد آموزشی مبتنی بر بازنمایی‌های چندگانه، روی عملکرد دانش‌آموزان پایه چهارم ابتدایی، در حل مسائل شامل کسر چه تأثیری دارد؟

اسکمپ، معتقد است که اگر دانش‌آموزان نتوانند بین بازنمایی‌های مختلف یک مفهوم اتصال برقرار کنند و در حل یک مسأله از بازنمایی‌های متفاوتی استفاده کنند بدون این که این بازنمایی‌ها را به هم پیوند دهند و ارتباط بین آن‌ها را ببینند، نشان دهنده‌ی این است که آن‌ها درک ابزاری‌شان را توسعه داده‌اند و اگرچه بیشتر از یک بازنمایی را به کار گرفته‌اند، اما دانش مفهومی خود را افزایش نداده‌اند. در مقابل، دانش‌آموزانی که بتوانند بین بازنمایی‌های مختلف یک مفهوم اتصال برقرار کرده و اطلاعات یکسانی را از آن‌ها استنتاج کنند، دانش مفهومی آنان افزایش یافته و یک درک رابطه‌ای را در خود توسعه داده‌اند [۱۲و۱۳]. بررسی مقایسه‌ای داده‌های حاصل از مصاحبه‌ها و مشاهدات کلاسی و همچنین پاسخ‌های دانش‌آموزان به آزمون‌های کتبی این تحقیق نشان داد که اکثریت دانش‌آموزان گروه آزمایش در هنگام حل مسائل کسر، یک مسأله را با بیشتر از یک بازنمایی حل می‌کردند و می‌توانستند بین این بازنمایی‌ها نیز ارتباط برقرار کنند؛ بنابراین طبق نظر اسکمپ، دانش مفهومی خود را افزایش داده بودند، و در حل مسائل شامل کسر عملکرد بهتری از خود نشان دادند. همچنین در طول حل مسأله خطاهای کمتری مرتکب شده بودند. اما دانش‌آموزان گروه کنترل در بیشتر موارد تنها از یک بازنمایی (بازنمایی جبری)، برای حل مسأله بهره گرفته بودند، و در برخی موارد هم که طبق دستورالعمل‌های مسأله، از بازنمایی‌های تصویری استفاده کرده بودند نتوانسته بودند ارتباط بین این بازنمایی‌ها را ببینند و از آن‌ها اطلاعات یکسانی را استخراج کنند و در کل در حل مسائل شامل کسر، عملکرد خوبی از خود نشان ندادند و در طول حل مسأله به دلایلی از قبیل، عدم فهم صحیح، و توجه بیش از حد به کلید واژه‌های مساله، خطاهای زیادی را مرتکب شدند و امتیازات پایین‌تری نسبت به دانش‌آموزان گروه آزمایش کسب کرده بودند. به نظر می‌رسد با توجه به عملکردی که دانش‌آموزان گروه آزمایش در سؤالات مفهومی از خود نشان دادند، رویکرد

www.SID.ir

Archive of SID

آموزشی مبتنی بر بازنمایی‌های چندگانه می‌تواند در افزایش درک مفهومی دانش‌آموزان از مفاهیم شامل کسر و عملکرد بهتر آن‌ها در حل مسائل شامل کسر، مؤثر باشد.

سؤال ۲: دانش آموزان پایه چهارم، چه بد فهمی‌هایی در حوزه کسرها دارند؟ آیا یک رویکرد آموزشی مبتنی بر بازنمایی‌های چندگانه می‌تواند به رفع این بدفهمی‌ها کمک کند؟

مشاهدات کلاسی و بررسی پاسخ‌های دانش‌آموزان به سؤالات آزمون‌های کتبی، و مصاحبه‌ها نشان دادند که اغلب دانش‌آموزان بدفهمی‌های زیادی درباره کسرها دارند. البته این بدفهمی‌ها در گروه آزمایش بعد از فرایند آموزش، خیلی کمتر بودند. برخی از این بدفهمی‌ها عبارتند از:

۱- درک اکثر دانش‌آموزان، از مفاهیم کسر به صورتی غلط بر مبنای درک‌شان از اعداد حسابی ساخته شده بود. برای مثال: هنگام مقایسه دو کسر $\frac{۳}{۵}$ و $\frac{۳}{۱۵}$ بیان می‌کردند که چون ۱۵ از ۵ بیشتر است پس $\frac{۳}{۱۵}$ از $\frac{۳}{۵}$ بیشتر است. یا اینکه هنگام جمع و تفریق کسرها، صورت‌های دو کسر را با هم و مخرج‌ها را نیز، با هم جمع و یا از هم کم می‌کردند.

۲- هنگام جمع و تفریق کسرهای با مخرج‌هایی نامساوی، مخرج بزرگ‌تر را به عنوان مخرج کسر حاصل در نظر می‌گرفتند و سپس صورت‌های دو کسر را با هم جمع و یا از هم کم می‌کردند و جواب به دست آمده را در صورت کسر حاصل می‌نوشتند. برای مثال، یکی از سؤالات مطرح شده در پس آزمون به این صورت بود که «*دانش آموزی، حاصل جمع عبارت کسری* $\frac{۲}{۳}+\frac{۳}{۹}$ *، را* $\frac{۵}{۹}$ *بدست آورد، آیا جواب او درست است؟ دلیل تان را توضیح دهید.*» اکثر دانش آموزان به خصوص در گروه کنترل، جواب $\frac{۵}{۹}$ را تأیید کرده بودند.

نتایج حاصل از تجزیه و تحلیل مصاحبه‌ها، مشاهدات کلاسی و، امتیازاتی که دانش‌آموزان در پس‌آزمون و آزمون پایداری یادگیری کسب کرده بودند نشان داد که، عملکرد ضعیف دانش‌آموزان گروه کنترل، و بدفهمی‌هایی که آن‌ها درخصوص کسرها داشتند ناشی از این بود که آن‌ها بیشتر سعی می‌کردند کسرها را با استفاده از به خاطر سپردن قوانین و رویه‌ها یاد بگیرند و درک مفهومی از کسرها نداشتند. در حالی که در گروه آزمایش، چون دانش‌آموزان مفاهیم شامل کسر را با رویکردی مبتنی بر بازنمایی‌های چندگانه آموزش دیده بودند و درک مفهومی از مفاهیم شامل کسر را در خود توسعه داده بودند، عملکرد بهتری را در آزمون‌ها از خود نشان دادند و بدفهمی‌های کمتری نیز در این زمینه داشتند. از این رو می‌توان گفت که هنگام آموزش کسرها، با به‌کارگیری رویکردهای آموزشی که درک مفهومی را توسعه می‌دهند (نظیر رویکرد آموزشی مبتنی بر بازنمایی‌های چندگانه)، می‌توان تا حدود زیادی به رفع مشکلات و بدفهمی‌هایی که دانش‌آموزان در خصوص درک، یادگیری، و حل مسائل شامل کسرها دارند، کمک کرد.

۵- نتیجه گیری

یکی از اهداف آموزش مفاهیم ریاضی، رسیدن به درک مفهومی از این مفاهیم است. این مطالعه تحقیقی به صورت تجربی نشان داد که، بازنمایی‌های چندگانه می‌توانند به عنوان ابزاری برای رسیدن به درک مفهومی به خدمت گرفته شوند. به علاوه، یافته‌های این مطالعه نشان دادند که بازنمایی‌های چندگانه می‌توانند به دانش‌آموزانی که دارای علایق، تجربیات، و توانایی‌های مختلف هستند کمک کنند تا ریاضیات را بهتر یاد بگیرند؛ زیرا این اجازه را به آن‌ها خواهد داد تا بازنمایی‌های رسمی و غیر رسمی را برای بیان ایده‌های ریاضی خود به‌کار بگیرند. یافته‌های حاصل از تجزیه و تحلیل داده‌های این تحقیق نشان دادند که بدفهمی‌ها و عملکرد ضعیف دانش‌آموزان پایه چهارم هنگام کار با کسرها می‌تواند تا حدود زیادی از عواملی مانند: «تأکید زیاد بر رویه‌های الگوریتمی و به یاد سپاری این رویه‌ها برای انجام محاسبات؛ عدم داشتن درک مفهومی از کسرها و تأکید بیش از حد بر یک بازنمایی منحصر بفرد مانند بازنمایی جبری» ناشی شود. یافته‌ها همچنین نشان داد که، یک رویکرد آموزشی مبتنی بر بازنمایی‌های چندگانه برای آموزش کسرها می‌تواند، درک مفهومی دانش‌آموزان را از کسرها توسعه دهد، و به رفع بدفهمی‌هایی که دانش‌آموزان در این زمینه دارند منجر شود. یکی دیگر از یافته‌های تحقیق حاضر این است که استفاده از یک رویکرد آموزشی شامل بازنمایی‌های

www.SID.ir

Archive of SID

چندگانه در فرایند یاددهی و یادگیری مفاهیم کسر، باعث پایدارتر شدن یادگیری این مفاهیم در دانش‌آموزان می‌شود. چنان‌چه NCTM، نیز تأکید کرده است، دانش‌آموزانی که قوانین و رویه‌های محاسباتی را به یاد می‌سپارند بدون اینکه درکی از آن‌ها داشته باشند، در حین به کارگیری این قوانین و رویه‌ها در حل مسائل ریاضی آن‌ها را با اطمینان استفاده نمی‌کنند؛ زیرا اغلب یا آن‌ها را فراموش کرده و یا به درستی به خاطر نمی‌آورند. از این رو چنین یادگیری به طور کلی شکننده و ناپایدار است. در مقابل، دانش‌آموزانی که یک درک مفهومی از مفاهیم ریاضی را در خود توسعه داده‌اند و در حل مسائل ریاضی، انواع رویکردها را به کار می‌گیرند، یادگیری‌شان از مفاهیم ریاضی پایدارتر است [۱۴].

به منظور توسعه درک مفهومی دانش‌آموزان از مفاهیم ریاضی، معلمان می‌توانند هنگام یاددهی مفاهیم ریاضی، بازنمایی‌های مختلفی از هر مفهوم را به دانش آموزان معرفی کرده و دانش‌آموزان را برای استفاده از آن‌ها تشویق کنند. یافته‌های این تحقیق نشان دادند، چنان چه دانش‌آموزان با بازنمایی‌های چندگانه مفاهیم ریاضی آشنایی داشته باشند، درک عمیق‌تری از آن مفاهیم را در خود توسعه می‌دهند و می‌توانند هنگام حل مسأله هر بازنمایی را که مناسب تر و بهتر باشد انتخاب کرده و به کار بگیرند. مسلم است که ریاضیات ابتدایی، پایه ریاضیات دوره‌های بالاتر است و در صورتی که دانش‌آموزان بتوانند در مقطع ابتدایی یک درک مفهومی از مفاهیم ریاضی را در خود توسعه دهند یادگیری آن‌ها از مفاهیم ریاضی پایدارتر خواهد بود و در دوره‌های بالاتر موفق‌تر خواهند شد. برای رسیدن به این امر مهم، پیشنهاد می‌شود که بازنمایی‌های چندگانه تا جایی که ممکن است در پایه‌های پایین تر (مقطع ابتدایی) به دانش‌آموزان معرفی شوند تا آن‌ها بتوانند درک مفهومی از مفاهیم را در خود توسعه داده و زمینه موفقیت خود را در پایه‌های بالاتر فراهم کنند.

یافته‌های این تحقیق، نتایج مشابه از تحقیقات قبلی مانند: هزیمان، هیول، کانتربوری، استیوارت، ریدر، فرد، اولیوم و گیومفی را مورد تأیید قرار داد.

پی نوشت

Multiple Representations
[2] Aksu
[3] Canterbury
[4] Dienes
[5] Perceptual Variability Principle
[6] Janvier
[7] Lesh
[8] Translations
[9] Kieren
[10] Part – whole relationship
[1] Measure
[2] Operator
[3] Quotient
[4] Ratio
[5] Hunnula
[6] Smith
[7] Beher
[8] Transformation
[9] Lamon

مراجع

[1] Canterbury S.A., *An investigation of conceptual knowledge: Urban African American Middle School Student' use of fraction representations and computations in performance-based tasks*, (Doctoral dissertation University of Georgia, 2006), **2007**, pp. 19-80, 215.

[2] Stewart V.M., *Making sense of students' understanding of fractions: An exploratory study of sixth graders' construction of fraction concepts through the use of physical referents and real world representations*, Doctoral dissertation, Florida State University, **2005**.

[3] Hull L., *Fraction models that promote understanding for elementary students*, Master's thesis, University of Central Florida, **2005**.

[4] Hasemann K., *on difficulties with fractions*. Educational Studies in Mathematics, Vol.12, **1981**, pp.71-87.

[5] National Council of Teachers of Mathematics, *Principles and standards for school mathematics,* **2000**.

[6] Hitt F., *Working Group on Representations and Mathematics Visualization, Representation and Mathematics Visualization*, **1998-2001**, pp. 2- 3.

[7] Oylum C.A., *The effects of multiple representations-based instructions on several grade students' algebra performance, attitude toward mathematics, and representation preference*, Doctoral dissertation, Middle east technical university, **2004**.

[8] Gyamfi K. A., *External multiple representations in mathematics teaching*, Master's thesis, North Carolina State University), Available at: http://www.lib.ncsu.edu/theses/available/etd-04022003-213629/, **2003**, pp. 5-6.

www.SID.ir

Archive of SID

[۹] کریمی عبدالعظیم، مجموعه *سؤال‌های علوم و ریاضیات تیمز TIMSS پایه چهارم ابتدایی*، تهران، پژوهشگاه مطالعات آموزش و پرورش، **۱۳۸۷**.

[10] Erbilgin E., *Effects of spatial visualization and achievement on students' use of multiple representations*, (Master's thesis, Florida State University), Available at: http://etd.lib.fsu.edu/theses/available/etd-09172003-182500/, **2003**, p.3.

[۱۱] حسن‌پور سارا، *مفهوم کسر برای معلمان ابتدایی*، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه شهید باهنر کرمان، **۱۳۸۵**.

[۱۲] گویا زهرا و حسام عبداله، *نقش طرح‌واره‌ها در شکل‌گیری بدفهمی‌های ریاضی دانش‌آموزان*، رشد آموزش ریاضی، دوره بیست و سوم، شماره دو، دفتر انتشارات کمک آموزشی، **۱۳۸۴**، صفحه‌های ۴-۱۵.

[13] Rider R. L., *The effect of multi-representational methods on students' knowledge of function concepts in developmental college mathematics*, Doctoral dissertation, North Carolina State University, Available at: http://www.lib.ncsu.edu/theses/available/etd-03182004-090043/, **2004**.

[14] Bosse M. and Bahr D., *The state of balance between procedural knowledge and conceptual understanding in mathematics teacher education,* Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 14, **2008**, pp. 2-8.

www.SID.ir