بررسی عملکرد دانش آموزان سال اول متوسطه در حل مسائل تعمیم جبری

ابراهیم ریحانی[۱] و مریم صدیقی[۲]

چکیده: هدف از پژوهش حاضر، بررسی عملکرد دانش‌آموزان سال اول متوسطه در حل مسائل تعمیم جبری است. جامعه مورد مطالعه این پژوهش، دانش‌آموزان سال اول متوسطه شهرستان مبارکه است. نمونه مورد مطالعه، ۸۰ نفر از دانش‌آموزان سال اول متوسطه دبیرستان‌های دخترانه است که به طور تصادفی انتخاب شده‌اند. داده‌های این پژوهش از پاسخ دانش آموزان به سوالاتی در ارتباط با تعمیم جبری، گرد آوری شده است. تحقیق حاضر از نوع کیفی و روش تحقیق مورد استفاده، توصیفی-تحلیلی با استفاده از تحلیل محتوا می باشد. یافته ها نشان داد که دانش‌آموزان در محاسبه عددی موارد خاص و شبه تعمیم‌ها، موفق‌تر از تعمیم‌های کلی بودند. همچنین دانش‌آموزان راهبردهای مختلفی شامل "حدس و آزمایش، رسم شکل، شمارش، تناسب، جایگزینی، بازگشتی، موضوع کلی، تنظیم روش، زمینه ای و خطی" را به صورت درست یا نامربوط برای رسیدن به تعمیم به کار بردند. با این حال بخش قابل ملاحظه ای از راه حل های درست ارائه شده برای برخی از مسائل مبتنی بر تفکر تجسمی است. از عمده‌ترین مشکل دانش‌آموزان در تعمیم جبری، می‌توان به عدم آشنایی آنان با مفهوم متغیر اشاره کرد.

کلمات کلیدی: جبر، تعمیم جبری، راهبرد، دانش‌آموزان، حل مسأله

۱– مقدمه

جبر، یکی از شاخه‌های ریاضی است که تقریباً جایگاه ثابتی در ریاضیات مدرسه‌ای داشته است. جبر از یک طرف ابزاری برای حل مسأله فراهم می کند و از طرف دیگر با فعالیت-های انسانی ارتباط دارد. جبر از دیدگاه بسیاری از افراد «حساب همراه حروف[۱]»در نظر گرفته شده است[۱].یوسیسکین جبر را یک زبان می‌داند که پنج جنبه مهم «مجهولات، فرمول‌ها، تعمیم الگوها، متغیرها و روابط» را شامل می شود[۲]. از نظر کلینر در حدود سه هزاره، تا اوایل قرن نوزدهم، جبر به معنی حل معادلات چند جمله‌ای به طور عمده از درجه چهار یا کمتر در نظر گرفته می‌شد[۳]. از جنبه تاریخی جبر به عنوان ابزاری برای سر و کار داشتن با مجهول پدیدار شد[۱]. لی در مطالعه‌ای با عنوان «در جستجوی درک جبری»، در مورد اینکه «جبر چیست ؟» نظرات دانش‌آموزان، معلمان، ریاضیدانان و آموزشگران ریاضی را جمع بندی کرد. از مطالعه او، جبر از دیدگاه این افراد، یک موضوع مدرسه‌ای، تعمیم حساب، یک ابزار، یک زبان، یک فرهنگ، یک روش فکر کردن و یک فعالیت انگاشته شد[۴]. شورای ملی معلمان ریاضی(NCTM،۲۰۰۰)[۲] جبر را در برگیرنده ارتباط بین کمیت ها، کاربرد نمادها، مدل سازی پدیده ها و مطالعه ریاضی تغییر می‌داند[۵]. مهارت تعمیم دادن و فرمول بندی فعالیت‌های ریاضی در رشد تفکر ریاضی از اهمیت خاصی برخوردار است. عمل تعمیم، کاملاً به عمل تجرید وابسته است [۶]. با آن که بر سر یک تعریف واحد در مورد تعمیم توافق نشده است، با این حال کوشش‌های زیادی برای ارائه یک توصیف مناسب از تعمیم انجام شده است. از نظر پولیا تعمیم عبارت از گذشتن از ملاحظه یک چیز، به ملاحظه دسته‌ای از چیز-هاست که آن چیز یکی از آن‌ها به شمار می‌رود. یا می‌توان گفت گذشتن از ملاحظه یک دسته محدود به ملاحظه دسته فراگیرتری است که آن دسته محدود را نیز شامل است[۷]. تعمیم به مثابه یک فرآیند و به شکل یک محصول آموزش ریاضی، اهمیت و ارزش خود را به عنوان یک هدف آموزشی داراست[۸]. میسون ادعا می‌کند که «تعمیم ضربان قلب ریاضیات است. اگر معلمان از وجود و حضور آن آگاه نباشند وتمایل به عادت دادن دانش آموزان

تاریخ دریافت مقاله ۹۱/۰۱/۲۸، تاریخ تصویب نهایی ۹۱/۰۷/۲۹

[۱] **استادیار،** دانشکده علوم پایه، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، (نویسنده مسئول)، پست الکترونیک: e_reyhani@srttu.edu

[۲] **کارشناسی ارشد،** آموزش ریاضی، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی

به بیان تعمیم های خودشان نباشند، تفکر ریاضی اتفاق نمی افتد»[۹]. کاپوت تعمیم را به عنوان، توسعه استدلال یا ارتباط با سطحی که دیگر روی موارد یا مسائل خودشان متمرکز نیست، بلکه، ترجیحاً روی الگوها، رویه‌ها، ساختارها و روابط بین شان متمرکز است، تعریف می کند[۱۰]. فهم تعمیم و بیان تعمیم دو موضوع متفاوت هستند که هر کدام به نوبه خود با اهمیت هستند. از نظر رادفورد این دو موضوع توسط معلمان ممکن است با هم اشتباه گرفته شود[۱۱]. کوپر و وارن ابراز می‌دارند که در بسیاری از مواقع مشکلات دانش‌آموزان در بیان تعمیم و نه در شناسایی آن است[۶]. دانش‌آموزان اغلب فاقد زبانی هستند که با آن در مورد تعمیم بحث کنند. در صورت آموزش مناسب (حداقل در شکل‌های زبانی و شبه تعمیم)[۳]، دانش-آموزان دوره ابتدایی و میانی می توانند یاد بگیرند ساختارهای قوی ریاضی را درک کنند که به طورمعمول پشتوانه‌ای برای دوره متوسطه است[۶] .

مهارت تعمیم در جبر می‌تواند به رشد تفکر جبری کمک شایانی نماید. فوجی معتقد است دانش‌آموزان از دوره ابتدایی می‌توانند با تفکر جبری از طریق عبارات قابل تعمیم آشنا شوند[۱۲] . در واقع می‌توان گفت، هنگامی که دانش‌آموزان بر اساس تجزیه و تحلیل‌های منظم از موارد خاص، تعمیم‌هایی درمورد اینکه، حاصل جمع دو عدد زوج و فرد، عددی فرد است ارائه کنند و یا هنگامی که ویژگی-های دستگاه اعداد مانند خاصیت جابجایی عمل جمع و ضرب را بیان می‌کنند، دارای تفکرجبری هستند.

تعمیم جبری: اهمیت تعمیم به عنوان یک فعالیت جبری، به‌طور گسترده با تحقیق روی یادگیری و یاد دهی جبر مشخص شده است. فوجی بیان می‌کند «در تفکر جبری، لزوماً دانش آموزان با الگوهایی از تعمیم سرو کار دارند»[۱۲]. آموزش جبر در مدرسه می‌تواند فرصت‌های مناسبی برای دانش‌آموزان در تعمیم دادن فراهم کند. اصول و استانداردها برای ریاضیات مدرسه (NCTM , 2000) درباره جبر مدرسه‌ای معتقد است که برنامه‌های آموزشی از پیش دبستان تا پایان پایه دوازدهم باید همه دانش‌آموزان را قادر سازد تا:

- الگوها، روابط و توابع را درک کنند؛
- موقعیت‌ها و ساختارهای ریاضی را با استفاده از نمادهای جبری بازنمایی و تجزیه و تحلیل کنند؛
- مدل های ریاضی را برای بازنمایی و درک روابط کمّی به کار برند؛
- تغییر را در زمینه‌های گوناگون مورد مطالعه قرار دهند[۵].

دانش آموزان با استفاده از شباهت ویژگی ها، روابط و خواص بین موضوعات، می‌توانند ویژگی ها و روابط کلی تری را بیان کنند. مسائل تعمیم می تواند در همه مقاطع تحصیلی مطرح شود و منجر به رشد تفکر جبری گردد. دانش‌آموز ابتدایی می‌تواند خواص و ویژگی‌های دستگاه اعداد همچون خواص جابجایی عمل ضرب و جمع را بیان کند و همچنین با تعمیم‌های عددی به درک مفهوم تابع نزدیک شود و با مسائلی همچون جاهای خالی در روابط و اعمال ریاضی، مفهوم متغیر در جبر را درک کند. دانش-آموزان در سطح بالاتر می توانند تعمیمی برای معادلات و عبارات جبری و نوشتن قوانین و روابط بین موضوعات ریاضی یا مسائل روزمره داشته باشند. نتایج تحقیقات نشان می‌دهند موفقیت در تعمیم، وابسته به درک دانش‌آموزان از مفهوم متغیر است و مفهوم متغیر نیاز به یک تفکر انتزاعی گسترده دارد[۱۲].

طبق نظر کیرن فعالیت های جبر مدرسه‌ای را می‌توان به طور کلی در سه دسته تعمیمی، تبدیلی و فراسطحی ـ کلی[۴] طبقه بندی کرد[۱۴و۴].

فعالیت‌های تعمیمی: تمرکز فعالیت‌های تعمیمی، بازنمایی (و تفسیر) ویژگی‌ها، الگوها و روابط است. فعالیت‌های تعمیمی شامل تشکیل عبارات و معادلاتی است که موضوعات جبر هستند. مثال‌های نمونه عبارتند از:

- معادلات شامل یک مجهول که موقعیت‌های مسأله‌ای کمی را نشان می‌دهند.
- عبارات تعمیم که از الگوهای هندسی یا دنباله های عددی ناشی می‌شوند.
- عبارات جبری که از روابط عددی ناشی می‌گردند.

فعالیت‌های تبدیلاتی: دسته دوم فعالیت‌های جبری (فعالیت‌های تعمیمی (قاعده محور)) شامل جمع عبارات متشابه، فاکتورگیری، بسط دادن، جایگزینی، جمع و ضرب چندجمله‌ای‌ها، به توان رساندن چندجمله‌ای‌ها، حل

معادلات، ساده کردن عبارات، کار با عبارات هم ارز و مانند آن است[۴]. دانش‌آموزان با تکرار و تمرین در این گونه فعالیت‌ها مهارت می‌یابند و اغلب آنان جبر را منحصر به این فعالیت‌ها می دانند.

فعالیت فراسطحی: فعالیت‌هایی هستند که جبر در آن‌ها به عنوان یک ابزار به کار برده می‌شود؛ ولی منحصر به جبر نیستند. آنها شامل حل مسأله، مدلسازی، توجه به ساختارها، مطالعه تغییر، تعمیم، تجزیه و تحلیل روابط، توجیه کردن، اثبات کردن و پیش بینی کردن هستند؛ فعالیت هایی که می‌توان بدون استفاده از جبر هم درگیر آن ها شد[۴].

برای الگوها و جداول عددی، لنین دو نوع تعمیم بازگشتی و صریح را تشخیص می‌دهد که رادفورد ادعا می‌کند که هر یک از این نوع تعمیم ها از سه طریق ایجاد می شود[۱۵و۱۶].

۱- تعمیم واقعی که شامل فعالیت‌های عددی است که دانش آموزان را به در گیر شدن با موارد خاص قادر می سازد.

۲- تعمیم زمینه‌ای که روی عبارات توصیفی و مجردتر هم چون «شکل بعدی» متمرکز می شود و به عنوان زبانی برای بیان تعمیم استفاده می‌شود.

۳- تعمیم نمادین که در آن نماد سازی جبری (شامل درک و به کار گیری زبان جبری) برای بیان تعمیم استفاده می شود.

در حالیکه بسیاری از محققان تعمیم تجربی را مورد انتقاد قرار می‌دهند رادفورد اظهار می‌دارد که تعمیم واقعی یک زیر بنای مهم برای صورت های پیچیده‌تر از تعمیم است[۱۶]. بیکر و ریورا روش‌های دانش‌آموزان برای تعمیم یک الگو را در سه دسته شکلی، عددی و عملی طبقه بندی کردند[۱۳]. آنها ملاحظه کردند، دانش‌آموزانی که در تعمیم‌هایی که با استفاده از الگوهای عددی شروع می‌شد، موفق نبودند، نمی‌توانستند ارتباط بین بازنمایی‌های مختلف را تشخیص دهند. این با یافته‌های لنین سازگار است که نتیجه گرفت، دانش‌آموزانی که با استفاده از طرح های هندسی(الگوهای شکلی)، «قانون[۵]» را به بازنمایی‌های بصری پیوند می‌زنند، نسبت به دانش‌آموزانی که اصولاً رویه و طرح‌شان عددی است یا راهبرد«حدس و آزمایش[۶]» را به کار می برند، در تعمیم موفق‌تر هستند[۱۷]. از عواملی که بر موفقیت دانش‌آموزان در تعمیم فعالیت‌های الگو یابی مؤثر است، تجسم خوب و دقیق از الگوی شکلی بیان شده است[۱۸].

هدف این مقاله بررسی عملکرد دانش‌آموزان اول متوسطه در حل مسائل تعمیم جبری و تشخیص راهبردهایی است که توسط آن‌ها مورد استفاده قرار گرفته‌اند. همچنین این پژوهش به دنبال آن است تا برخی از عواملی را که باعث توفیق یا شکست دانش آموزان در تعمیم می شود را معلوم کند.

۲- روش تحقیق

سؤالات پژوهش:

۱- چه عواملی موجب شکست یا موفقیت دانش‌آموزان در تعمیم می‌شود؟

۲- دانش‌آموزان سال اول متوسطه در حل مسائل تعمیم جبری از چه راهبردهایی استفاده می‌کنند؟

روش پژوهش و جمع‌آوری اطلاعات: تحقیق حاضر، از نوع کیفی و روش تحقیق آن توصیفی- تحلیلی با استفاده از تحلیل محتوا می باشد. جامعه آماری این تحقیق دانش-آموزان دختر سال اول متوسطه شهرستان مبارکه می‌باشد. در این پژوهش از روش نمونه‌گیری تصادفی خوشه‌ای چند مرحله ای برای انتخاب نمونه استفاده شد. بدین صورت که، ابتدا به منظور کنترل متغیر روش تدریس معلمان، از میان ۱۶دبیرستان دخترانه، سه دبیرستان با توجه به تنوع منطقه و تعداد کلاس ها و تفاوت دبیران انتخاب شدند. سپس از میان دانش‌آموزان کلاس‌ها به صورت کاملاً تصادفی، هشتاد نفر شامل چهل نفر از مدرسه اول و بیست نفر از هر یک از مدارس دوم و سوم انتخاب شدند.

ابزار پژوهش: ابزار اندازه‌گیری با توجه به ماهیت و روش پژوهش، آزمونی شامل دوازده سؤال در ارتباط با تعمیم جبری است. این سؤالات با دسته بندی کیرن از فعالیت های جبر مدرسه‌ای در ارتباط با تعمیم مطابقت دارد[۴و۱۴]. به منظور جمع آوری داده ها از برگه های آزمون، فرم هایی برای هر سؤال تهیه شد و اطلاعات آن استخراج گردید. همچنین از مصاحبه سازمان نیافته و غیررسمی، برای تایید بعضی از نتایج پژوهش استفاده شده است.

روش تهیه آزمون: برای تهیه آزمون در مرحله اول، سؤالات موجود در آزمون‌های معتبری همچون TIMSS[۷]، TAKS[۸] و نیز مقالات پژوهشی که در ارتباط با تعمیم جبری بودند، گردآوری شد. سپس به ویرایش و بومی سازی سؤالات با توجه به فرهنگ و موقعیت اجتماعی کشور ایران پرداخته شد. همچنین با توجه به اهداف مورد نظر سؤالاتی نیز توسط مولفان، (پس از مشاوره با برخی از آموزشگران ریاضی) به آن اضافه شد. درپایان برای انجام اصلاحات و بررسی روایی محتوایی و صوری آن، پیش آزمونی انجام گرفت که با بررسی نتایج آن اصلاحات و تغییرات لازم درمتن سؤالات انجام گرفت و بعضی از آن ها نیز حذف شدند.

سؤالات نهایی این آزمون از چهار بخش تشکیل می‌شوند. بخش اول شامل سؤالاتی است که اشاره مستقیم بر نوشتن قانون به زبان ریاضی دارند. بخش دوم شامل مسائلی است که یافتن مقادیرعددی یا کامل کردن جدولی در ارتباط با سؤال، دانش آموزان را در نوشتن قانون راهنمایی می کند. بخش سوم شامل سؤالاتی است که در آن دانش آموزان باید از الگوهای شکلی و مقادیر عددی در نوشتن قانون بهره گیرند. بخش چهارم در بر دارنده مسائلی است که هم از الگوهای شکلی و هم از جدول، در نوشتن قانون ریاضی باید استفاده شود.

شایان ذکر است که اغلب سؤالات شامل چند قسمت هدفمند می‌باشند. قسمت اول شامل یافتن مقادیرخاص عددی کوچک است که این فرایند دانش آموزان را در تشخیص اینکه کدام یک از عوامل مسأله تغییر می کنند و کدام یک ثابت باقی می‌مانند، کمک می کند. قسمت دوم شامل یافتن مقادیر عددی بزرگ است که کوپر و وارن به این قسمت، عنوان شبه تعمیم داده اند[۶]. آنها بیان می‌کنند همانطور که فوجی از شبه متغیر[۹] برای معرفی و ارائه متغیر بهره می گیرد، ما نیز از شبه تعمیم ها برای رسیدن به تعمیم بهره می گیریم[۱۲]. زازکیس و همکارانش نشان دادند که کاربرد اعداد بزرگ می توانند دانش‌آموزان را در نوشتن تعمیم کمک کنند و بیان داشتند که اعداد بزرگ ممکن است پلی برای پر کردن شکاف بین اعداد کوچک واقعی و نماد سازی مجرد جبری باشد[۱۷] .

روایی و پایایی آزمون: برای تعیین روایی محتوایی و صوری آزمون پایانی، پس از تدوین اولیه سؤالات، آزمونی از بیست نفر از دانش‌آموزان سال اول متوسطه صورت گرفت. پس از بررسی نتایج و مطابقت با اهداف تحقیق، اصلاحات و تغییرات لازم در متن سؤالات انجام شد. همچنین برای روایی محتوایی و صوری آزمون از نظرات چند تن از اساتید دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی و دو تن از اعضای گروه ریاضی استان اصفهان استفاده گردید و آزمون نهایی تدوین شد. سرانجام برای پایایی آزمون از آزمون آلفای کرونباخ استفاده گردید. این محاسبه با نرم افزار SPSS صورت گرفت و مقدار۰/۸۴۹ بدست آمد. این مقدار نمایانگر این است که اعتبار آزمون در سطح بالایی است و قابلیت اعتماد لازم را دارد.

۳– نتایج و بحث

۳–۱– بررسی و تحلیل پاسخ‌های دانش‌آموزان به سؤالات آزمون تعمیم

برای بررسی و تحلیل پاسخ‌های دانش‌آموزان، نتایج بدست آمده به همراه یکی از سؤالات هر بخش تشریح می‌شود.

بررسی پاسخ های دانش‌آموزان به سؤالات بخش یک[۱۰]

سؤال۱) فرض کنید تعداد دانش‌آموزان مدرسه‌ای، ۶ برابر تعداد معلمان آن مدرسه است. رابطه‌ای بین تعداد معلمان و دانش‌آموزان آن مدرسه به زبان ریاضی ارائه کنید.

جدول۱ بررسی پاسخ های دانش آموزان به سؤالات بخش یک

درصد افرادی که رابطه ای ریاضی نوشتند.	٪۴۶/۲۵
درصد افرادی که رابطه ریاضی را درست نوشتند.	٪۳۱/۲۵
درصد افرادی که هیچ گونه رابطه ریاضی ارائه نکردند.	٪۵۳/۷۵
درصد افرادی که رابطه را به صورت رابطه تابعی y=6x نوشتند.	٪۲۰
درصد افرادی که رابطه رابه صورت عبارت6x نوشتند.	٪۱۱/۲۵
درصد افرادی که با استفاده ازحروف مناسب، رابطه‌ای غلط ارائه کردند.	٪۱۰

در بررسی پاسخ‌های دانش‌آموزان به این سؤال ملاحظه شد که: **الف)** تفکر مسلط در بین دانش‌آموزان، تفکر حسابی است. برخی از آن ها، چنین استدلال کرده‌اند که چون تعداد معلمان و دانش آموزان ذکر نشده است، پس قادر به پاسخگویی نیستند. بعضی از این افراد با همین اندیشه، خود تعداد معلمان یا دانش‌آموزان را تعیین کرده و دیگری

را پیدا کرده اند. بطور مثال نوشته اند که« اگر تعداد دانش آموزان برابر ۶۰۰ باشد پس تعداد معلمان برابر ۱۰۰است».

ب) عده ای از دانش‌آموزان، رابطه را درست تشخیص داده ولی قادر به بازنمایی ریاضی این رابطه به کمک نمادها علائم ریاضی نبوده‌اند؛ به طور نمونه دانش آموزی رابطه را چنین ارائه کرده است:

تعداد معلمان×۶ = تعداد دانش آموزان

و

$$\text{تعداد معلمان} = \frac{\text{تعداد دانش آموزان}}{۶}$$

ج) برخی دانش آموزان، از حروف مناسب برای نمایش موضوعات استفاده کردند، ولی به دلیل این که متغیر مستقل و متغیر وابسته را اشتباه در نظر گرفته اند، رابطه ای نادرست نوشته اند. به طور مثال دانش آموزی، حرف x را برای نمایش تعداد دانش آموزان و حرفy را برای نمایش تعداد معلمان به کار برده، امّا رابطه را به صورت$y=6x$ نوشته است. ۱۰٪ دانش آموزان به این روش رابطه ای غلط را ارائه کرده‌اند.

د) تعدادی از دانش آموزان، با درک روابط بین تعداد معلمان و دانش آموزان و تکیه بر دانش مفهومی و دانش رویه ای[11] خود، پاسخی درست به سؤال داده اند. اغلب کسانی که به این سؤال پاسخ درست داده اند، از راهبرد تناسب استفاده کرده اند. به طور مثال بیان داشته اند که به ازای هر ۶ دانش آموز یک معلم هست، برایn معلم چند دانش آموزهست؟

$$\frac{6}{?} = \frac{1}{n} \Rightarrow \text{تعداد دانش آموزان} = 6n$$

بررسی پاسخ‌های دانش‌آموزان به سؤالات بخش دو

سؤال۲) فرض کنید مریم، سه برابر حمید پول دارد. ابتدا جدول مقابل را کامل کنید. بعد از کامل کردن جدول به سؤال داده شده پاسخ دهید:فرض کنید ندانیم حمید چقدر پول دارد و مقدار پول او را N در نظر بگیریم، حال شما می توانید بگویید مریم چقدر پول دارد؟

حمید	مریم
	۶۰۰
۱۲۰	
	۳۷۵
۲۶۰	

جدول ۲ بررسی پاسخ‌های دانش‌آموزان به سؤالات بخش دو به تفکیک سؤالات

شماره سؤالات	۲	۴	۸	نتیجه نهایی بخش ۲
درصد افرادی که مقادیرخاص عددی را بدست آوردند.	٪۷۷/۵	٪۱۰۰	٪۹۸/۷۵	٪۹۲/۱
درصد افرادی که مقادیر بزرگ عددی (شبه تعمیم) را بدست آوردند.	-	٪۹۷/۵	٪۹۳/۷۵	٪۹۵/۶۲
درصد افرادی که رابطه ی ریاضی (تعمیم کلی) را نوشتند.	٪۴۰	٪۴۰/۲۵	٪۳۸/۷۵	٪۴۰

جدول ۳ بررسی پاسخ های درست دانش آموزان به سؤالات بخش دو به تفکیک سؤالات

شماره سؤالات	۲	۴	۸	نتیجه نهایی بخش ۲
درصد افرادی که مقادیر خاص عددی را درست به‌دست آوردند.	٪۴۸/۷۵	٪۹۶/۲۵	٪۹۶/۲۵	٪۸۰/۴۲
درصد افرادی که مقادیر بزرگ عددی(شبه تعمیم) را درست به دست آوردند.	-	٪۸۳/۷۵	٪۸۲/۵	٪۸۳/۱۲
درصد افرادی که رابطه ریاضی(تعمیم کلی) را درست نوشتند.	٪۳۷/۵	٪۲۰	٪۸/۷۵	٪۲۲/۰۸

در بررسی پاسخ‌های دانش‌آموزان به سؤال ۲، بخش دو ملاحظه گردید که :

الف) دانش آموزانی به دلیل عدم درک مفهوم متغیر، بیان داشته اند که N می‌تواند هر عددی باشد؛ لذا در پاسخ به سؤال به N مقادیر دلخواهی داده و جواب نهایی را یک مقدار عددی بدست آورده‌اند. عده‌ای نیز N را بی‌نهایت دانسته‌اند .

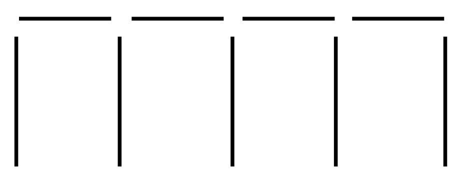
ب) غلبه تفکر حسابی بر تفکر جبری منجر به این شده است که دانش‌آموزانی در پاسخ به سؤال دو، پاسخ درست 3N را بنویسند؛ ولی آن را به عنوان پول مریم قبول نداشته باشند. بنابراین بیان کرده‌اند که« اگر ندانیم حمید چقدر پول دارد نمی توانیم بگوییم مریم چقدر پول دارد».

ج) تعدادی از دانش‌آموزان با استفاده از راهبرد بازگشتی، موفق به کشف قانون شده‌اند؛ ولی قادر به بیان آن با نمادهای ریاضی نبوده‌اند. در راهبرد بازگشتی دانش‌آموزان، به عبارت یا عبارات قبلی برای ساخت عبارات بعدی توجه می‌کنند. اگر آنان بتوانند مقادیر ثابت و متغیر را در فرایند بازگشتی تشخیص دهند، ممکن است قادر به نوشتن قانون یا عبارت جبری باشند.

آنچه در جداول ۲و۳ مشاهده می‌شود، این است که با وجود آنکه ۸۰٪ دانش‌آموزان مقادیر عددی خاص را درست به‌دست آورده‌اند، ولی فقط ۴۰٪ از آنها قانونی برای روابط عددی بدست آورده اند و تنها ۲۲/۰۸٪ آن را درست نوشته‌اند. آنها اغلب با تکیه بر روابط بازگشتی، قانونی نوشتند که نادرست بوده است. همچنین بدفهمی از مفهوم متغیر موجب شد که بسیاری از آنان قانونی ننویسند و یا توضیحاتی غلط داشته باشند. در سؤال دو این بخش باتوجه به رابطه y=ax که جدول نمایانگر این رابطه بود - دانش آموزان بیشتری پاسخ درست داده‌اند.

بررسی پاسخ های دانش آموزان به سؤالات بخش سه

سؤال ۶) شکل مقابل با تعدادی چوب کبریت ساخته شده است.



الف) برای ساختن ۵ مربع، چه تعداد چوب کبریت لازم است؟

ب) برای ساختن۱۰ مربع، چه تعداد چوب کبریت لازم است؟

ج) برای ساختنn مربع، چه تعداد چوب کبریت لازم است؟ اگر می‌توانید روش خود را توضیح دهید.

جدول ۴بررسی پاسخ های دانش آموزان به سؤالات بخش سه به تفکیک سؤالات

شماره سؤالات	۵	۶	۱۰	۱۱	نتیجه نهایی بخش۳
درصد افرادی که مقادیر خاص عددی را درست به‌دست آوردند.	٪۱۰۰	٪۱۰۰	-	٪۹۳/۷۵	٪۹۸
درصد افرادی که مقادیر بزرگ عددی(شبه تعمیم) را درست به دست آوردند.	-	۹۶/۲۵ ٪	-	٪۵۶/۲۵	٪۷۶/۲۵
درصد افرادی که رابطه ریاضی(تعمیم کلی) را درست نوشتند.	٪۳۳/۷۵	٪۴۰	٪۸۳/۷۵	٪۲۰	٪۳۱/۲۵

جدول ۵ بررسی پاسخ‌های درست دانش‌آموزان به سؤالات بخش سه به تفکیک سؤالات

شماره سؤالات	۵	۶	۱۰	۱۱	نتیجه نهایی بخش ۳
درصد افرادی که مقادیر عددی را درست بدست آوردند.	٪۸۳/۱۲	٪۷۳/۷۵	-	٪۸۶/۲۵	٪۸۱/۰۴
درصد افرادی که مقادیر عددی بزرگ (شبه تعمیم) را درست به‌دست آوردند.	-	٪۵۵	-	٪۱۶/۲۵	٪۳۵/۶۲
درصدافرادی که رابطه ریاضی(تعمیم کلی) را درست نوشتند.	٪۵	٪۱۶/۲۵	٪۵۲/۵	٪۱۰	٪۱۰/۴۲

پاسخ‌های دانش‌آموزان در جدول های ۴و ۵ خلاصه شده‌اند. در بخش سه، در سؤال ده الگویی شکلی همراه با عبارت-هایی جبری که نمایانگر تعمیمی از الگوها بود به دانش-آموزان ارائه شده بود تا از بین آن ها تعمیم درست انتخاب شود. ۸۳/۷۵٪ دانش‌آموزان به سؤال ده پاسخ دادند. از این تعداد۵۲/۵٪ گزینه درست را انتخاب کرده‌اندکه مشخص شد اغلب آنها با استفاده از جایگزینی اعداد در گزینه‌ها و آزمایش آنها، گزینه درست را به‌دست آورده‌اند. عده‌ای هم با استفاده از راهبرد بازگشتی و حدس گزینه درست را انتخاب کرده‌اند. بررسی نادرستی برخی از گزاره‌های داده شده در کلاس درس نیز می‌تواند به درک بهتر تعمیم کمک نماید.

از بررسی پاسخ‌های دانش‌آموزان به سؤال ۶، بخش ۳ نتایج زیر به‌دست آمد:

الف) بسیاری از دانش‌آموزان با تکیه به روابط بازگشتی بـه حل مسأله پرداخته اند. آنان متوجه شـده‌انـد کـه بـه ازای هرمربع جدید، نیاز به ۳ چوب کبریت است؛ لـذا بعضـی بـا حدس و آزمایش به فرمول رسیده‌اند و عده ای نیز با راهبرد روش خطی به فرمـول درسـت دسـت یافتـه‌انـد. منظـور از راهبـــرد روش خطـــی بـــه‌کـــار بـــردن الگـــویی ماننـــد M(n)=an+b (b=0) است کـه هـر دو عملیـات جمـع و ضرب رابه ترتیب موضوعات شامل می شود. بدین معنی که آنان متوجه شده اند که برای هـر مربـع جدیـد، نیـاز بـه ۳ چوب کبریت می باشد. با توجه به اینکه تعداد چوب کبریت های مربع اول(یعنی۴)را می توان به صـورت ۱+۳ نوشـت، آنان مقدار ثابت یک را پیدا کرده و دستور3n+1را بدسـت آورده اند. بعضی از آنان با مثال هایی عددی فرمول خـود را آزمایش کرده اند تا به درستی آن اطمینان پیدا کنند.

ب) بعضی از دانش‌آموزان، با توجه به روابط بازگشتی و این مطلب که، به ازای هرمربع جدید، ۳ چوب کبریت مورد نیاز است، فرمول n+3 را نوشته اند که n تعداد چوب کبریت های شکل قبلی است.

ج) دانش‌آموزی بـا اسـتفاده از راهبردهـای رسـم شـکل و بازگشتی دریافته است که تعداد چـوب کبریـت هـا در هـر مرحله، سه تـا از مرحلـه قبلـی بیشـتر اسـت. او تعمـیم را درست یافته، و گرچه مفهوم متغیر را درک کرده؛ ولی قادر به بازنمایی ریاضی قانون به‌دست آمده نبوده و قـانون را بـه صورت ۱+ □۳ نوشته است.

د) یکی از دانش‌آموزان چنین استدلال کرده است که تعداد چوب کبریت‌هایی که به طور افقی در بالا و پایین مربع ها قرار می‌گیرند، برابر با 2n است و تعداد چوب کبریت‌هایی که به طور عمودی کنار هم قرار می‌گیرند برابر n+1 است. پس تعداد چوب کبریت‌های به‌کار رفته در n مربع 2n+(n+1)است.

ه) دانش‌آموزانی، با رویکردی مشابه قسمت «د» تعداد چوب کبریت‌های بالا و پایین را بطور جداگانه حساب کرده‌اند. آن‌ها فرمول را به صورت $n+n+(n+۱)$ نوشته‌اند. این یکی از زیباترین راه حل های ارائه شده است که در اصل، مبتنی بر تفکر تجسمی است.

و)دانش‌آموزی این گونه اسـتدلال کـرده اسـت کـه«چـون چوب کبریت ها کنار هـم قـرار گرفتـه‌انـد بنـا بـراین اگـر بخواهیم یک مربع دیگر بسـازیم بـه ۳ چـوب کبریـت نیـاز داریم؛ چون یک ضلع از آن، از مربع کناری فـراهم اسـت و هر مربع دارای ۴ ضلع است پس ۴ را در تعداد مربع هـایی که می خواهیم بسازیم ضرب مـی کنـیم و از تعـداد مربـع هایی که می خـواهیم بسـازیم یکـی کـم کـرده و از تعـداد حاصل کم مـی کنـیم. او قـانون را بـه صـورت 4n-(n-1) نوشته است.

ز)دانش‌آموزی از اینکه در اولین مربع از ۴ چـوب کبریـت، ولی برای ساختن مابقی از ۳چوب کبریت استفاده می‌شود، نتیجه گرفته است که می تـوان بـرای سـاختن n مربـع از رابطه3(n-1)+4 استفاده کرد.

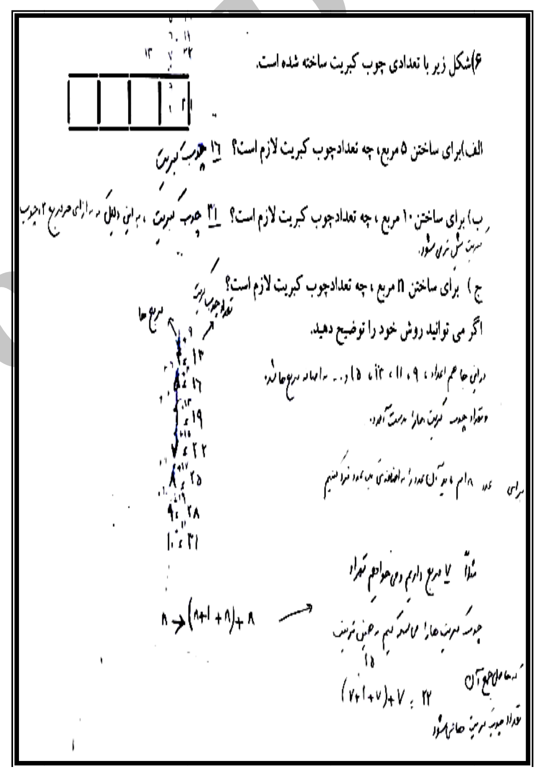
ح)دانش‌آمـوزی بـا اسـتفاده از روابـط عـددی بـین تعـداد مربعات و تعداد چوب کبریت‌ها، دریافتـه اسـت کـه تعـداد چوب کبریت‌های هرشکل برابر با تعـداد مربعـات بـه‌عـلاوه عددی فرد است. او تعـداد مربعـات را بـا n نمـایش داده و اعداد فرد را نیز با توجه به n+3 بـه صـورت n+n+1 در نظـر گرفتــه اســت. در نهایــت او قــانون را بــه صــورت n+(n+n+1) نوشته است(شکل۱).

ط) یکی از دانش‌آموزان با تکیه بر روابـط عـددی، دریافتـه است که تعداد مربعات با یک عدد فرد جمع شده اسـت تـا تعداد چوب کبریت‌های مورد نیاز حاصـل شـود(جـدول۶).

این دانش آموز فرمول $n + (2n + 1)$ را به صورت نوشته است.

جدول۶ تعداد چوب کبریت ها برابر با تعداد مربعات بعلاوه عددی فرد است.

تعداد مربعات	تعداد چوب کبریت‌های لازم
۴	۹+۴=۱۳
۵	۱۱+۵=۱۶
۶	۱۳+۶=۱۹
۷	۱۵+۷=۲۲
۸	۱۷+۸=۲۵
۹	۱۹+۹=۲۸



شکل ۱ دانش‌آموز با استفاده از روابط عددی بین موضوعات به قانون دست یافته است.

مطالعه حاضر نشان دانش‌آموزان نظم موجود در الگوها را به شیوه‌های مختلف مشاهده و با استدلال‌های متفاوتی بیان می‌کنند. پژوهش درباره الگویابی و تعمیم لااقل در دهه گذشته به شکل تجربی این دیدگاه قابل توجه است که افراد مایلند که یک الگوی یکسانP را به طور متفاوتی ببینند و پردازش کنند. در نتیجه این بدان معناست که آن ها تعمیم های متفاوتی را برای P ارائه می‌دهند[19] .

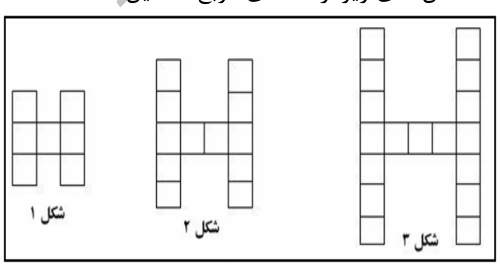
نکته مهم در تحقیق حاضر این است که بیشتر راه حل‌های درست در برخی از مسائل(به طور مثال سؤال۶) با استفاده از تجسم بوده است (جدول۷). علاوه بر این تلفیق راهبردها و استفاده از بیش از یک راهبرد توسط دانش آموزان قابل توجه است.

جدول۷ دانش آموزان موفق از روش های متفاوتی تعمیم را بدست آورده اند (سؤال۶).

ردیف	ایده راه حل	روند 4,7,10,13, …	عبارات هم ارزشکل n ام	عبارت جبری
۱	روابط عددی	1+3, 1+2.3, 1+3.3, 1+4.3, …	1+3.n	3n+1
۲	تفکر تجسمی	1+3, 1+2.3, 1+3.3, 1+4.3, …	1+3.n	3n+1
۳	تفکر تجسمی	4, 2.4-1, 3.4-2, 4.4-3, …	4n_(n-1)	3n+1
۴	تفکر تجسمی	1 2 3 1 2 3 2 3 4و.....	n+n+(n+1)	3n+1
۵	تفکر تجسمی	(1+1).2, (2+1).2+1 (3+1).2+2 (4+1).2+3,...	2(n+1)+n-1	3n+1
۶	روابط عددی	4=1+3, 7=2+5, 10=3+7, 13=4+9,	n+(2n+1)	3n+1
۷	تفکر تجسمی	4, 4+1.3, 4+2.3, 4+3.3, 4+3.3, …	4+3(n-1)	3n+1
۸	روابط عددی	(1+1+1)+1, (2+2+1)+1, (3+3+1)+1, …	(n+n+1)+1	3n+1

بررسی پاسخ های دانش آموزان سؤالات بخش چهارسؤال

۷) شکل های زیر از تعدادی مربع تشکیل شده اند:



الف) جدول مقابل را کامل کنید؟

ب) آیا رابطه‌ای بین هر شکل و شکل بعدی می‌بینید ؟

ج) اگر بخواهید تعداد مربعات در شکل صدم را به‌دست آورید، چه می‌کنید؟

د) تعداد مربعات در شکل nام را بنویسید. دلیل پاسخ خود را بنویسید.

شماره شکل	تعداد مربعات
۱	۷
۲	۱۲
۳	۱۷
۴	؟

جدول۸ بررسی پاسخ های دانش آموزان به سؤالات بخش چهار به تفکیک سؤالات

شماره سؤالات	۳	۷	۹	۱۲	نتیجه نهایی بخش ۴
درصد افرادی که مقادیر عددی خاص را به‌دست آوردند.	-	-	-	٪۸۴.۳۷۵	٪۸۴.۳۷
درصد افرادی که جدول را نادرست کامل کردند.	٪۲۶.۲۵	٪۱۲.۵	٪۴۲.۵	٪۲۷.۵	٪۲۷.۱۹
درصد افرادی که جدول را کامل نکردند.	٪۲.۵	٪۲.۵	٪۸.۷۵	٪۲۰	٪۸.۴۴
درصد افرادی که مقادیر عددی بزرگ را به‌دست آوردند.	٪۸۸.۷۵	٪۳۱.۲۵	-	٪۶۳.۷۵	٪۶۱.۲۵
درصد افرادی که رابطه ریاضی (تعمیم کلی) را نوشتند.	٪۳۷.۵	٪۲۵	٪۲۵	٪۳۱.۲۵	٪۲۹.۶۹

جدول۹ بررسی پاسخ های درست دانش آموزان به سؤالات بخش چهار به تفکیک سؤالات

شماره سؤالات	۳	۷	۹	۱۲	نتیجه نهایی بخش۴
درصد افرادی که مقادیر عددی خاص را درست به‌دست آوردند.	-	-	-	٪۶۳.۷۵	٪۶۳.۷۵
درصد افرادی که جدول را درست کامل کردند.	٪۷۱.۲۵	٪۸۵	٪۴۸.۷۵	٪۵۲.۵	٪۶۴.۳۷
درصد افرادی که جدول را درست کامل کردند.	٪۷۱.۲۵	٪۸۵	٪۴۸.۷۵	٪۵۲.۵	٪۶۴.۳۷
درصد افرادی که مقادیر عددی بزرگ را درست به‌دست آوردند.	٪۶۸.۷۵	٪۱۲.۵	-	٪۲۱.۲۵	٪۵۴۶
درصد افرادی که رابطه ریاضی (تعمیم کلی)را درست نوشتند	٪۳۶.۲۵	٪۸.۷۵	٪۲.۵	٪۴.۵۹	٪۱۳.۰۲

در بررسی پاسخ‌های دانش‌آموزان به سؤال ۷بخش ۴ یافته‌های زیر به‌دست آمد:

الف) اکثریت دانش‌آموزان باتکیه به روابط بازگشتی به حل مسأله پرداخته‌اند. آنان دریافته‌اند که هر دو شکل متوالی ۵ مربع با هم اختلاف دارند. دانش‌آموزان با توجه به عبارت یا عبارات قبلی، برای ساخت عبارات بعدی عمل کرده‌اند. از این رو بعضی از آنها، برای پیداکردن تعداد مربعات هرشکل قانون را $n+5$ نوشته و n را تعداد مربعات شکل قبلی درنظرگرفته اند.

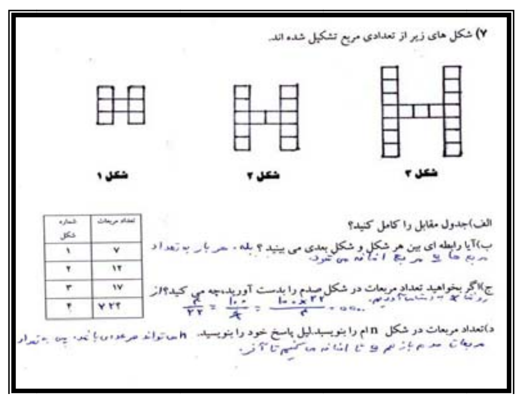
ب) عده‌ای با توجه به اینکه هر شکل، ۵ مربع نسبت به مربع قبلی خود بیشتراست، اینگونه استدلال کرده‌اند که

تعداد مربعات مضاربی از ۵ باید باشند و قانون را5n نوشته‌اند.

ج) دانش‌آموزی با روش غلط تناسب متمایل به پیدا کردن تعداد مربعات در شکل صدم بوده است. او تعداد مربعات در شکل چهارم را ۲۲ به‌دست آورده است و با استفاده از تناسب تعداد مربعات در شکل صدم را ۵۵۰۰ تعیین کرده است. در پاسخ به تعداد مربعات شکل n ام نیز بیان داشته است که« n می تواند هر عددی باشد، پس به تعداد مربعات صدم باز هم ۵ تا اضافه می کنیم تا آخر» (شکل۲).

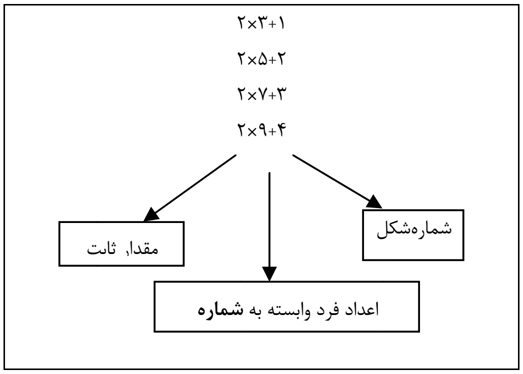
د) دانش‌آموزانی با توجه به اینکه اختلاف هر دو شکل متوالی ۵ مربع است، برای شکل n ام بیان داشته‌اند که ابتدا فاصله بین شکل n ام تا شکل اول را پیدا کرده و سپس حاصل را در ۵ ضرب کرده که تعداد مربعات افزوده شده تا شکل n ام بدست آید و در نهایت تعداد مربعات شکل اول را به آن می افزائیم. آنان قانون را به صورت $5(n-1)+7$ نوشته‌اند.

ه) بعضی از دانش‌آموزان، با توجه به اینکه برای پیدا کردن تعداد مربعات هر شکل، می‌توان به تعداد مربعات شکل قبلی۵ مربع اضافه کرد، متوجه شده‌اند ترکیبی خطی با مضرب۵ دارند و با توجه به مقادیر جدول مطرح شده درسؤال، قانون را به صورت $5n+2$ نوشته‌اند.

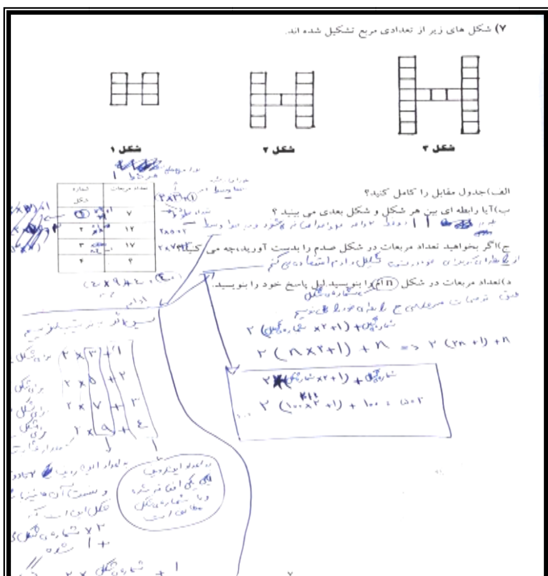


شکل۲ دانش‌آموز به اشتباه از راهبرد تناسب استفاده کرده است.

و) دانش‌آموزی با توجه به راهبرد بازگشتی و تنظیم روش[12] قانون را پیدا کرده است. راهبرد تنظیم روش با به کار بردن مقدار ثابت تغییر مانند عامل ضرب، سپس با در نظر گرفتن آن با جمع یا تفریق ثابت، برای رسیدن به یک مقدار خاص وابسته به متغیرتنظیم می‌شود. بدین ترتیب او قانون را به صورت $2(2n+1)+n$ نوشته است(شکل۳ و شکل ۴).



شکل ۳ راهبرد تنظیم روش



شکل۴ دانش‌آموز با به‌کارگیری راهبرد تنظیم روش به تعمیم درست دست یافته است.

ز) دانش آموزی با تکیه بر روابط عددی در جدول قانون را به شکل $6n-(n-2)$ به‌دست آورده است. این دانش‌آموز تعداد مربعات به‌کار رفته در شماره شکل‌های ابتدایی را به صورت ترکیبی خطی از مضرب‌های ۶ تنظیم کرده است. سپس مقادیر ثابت و متغیر را از روی آنها تشخیص داده و مقادیر متغیر را با شماره شکل مرتبط کرده و قانون را به‌دست آورده است(جدول۱۰).

جدول۱۰ دانش آموز با تکیه بر روابط عددی قانون را **نوشته است.**

شماره شکل	تعداد چوب
۱	۶×۱+۱=۶×۱-(۱-۲)=۷
۲	۶×۲+۰=۶×۲-(۲-۲)=۱۲
۳	۶×۳-۱=۶×۳-(۳-۲)=۱۷
۴	۶×۴-۲=۶×۴-(۴-۲)=۲۲

ح) دانش‌آموزی به دلیل اینکه بعد از شکل اول بـه شـکل‌های بعدی ۵ مربع اضافه شـده اسـت و شـکل اول دارای ۷ مربع است، قانون را بـه غلـط بـه صـورت ن5n+7 نوشـته است. او می‌خواسته طبق روش خطی عمل کند؛ امـا بـرای مرحله اول اشتباه کرده و قانون را غلط ارائه کرده است.

ط) برخی دانش‌آموزان توانسته‌اند با استدلال، تعداد مربعات شکل صدم را به‌دست آورند؛ ولی قادر بـه نوشـتن فرمـولی نبودند. به‌طور مثال دانش‌آموزی اینگونه استدلال مـی‌کنـد که « ما می‌دانیم شکل سوم۱۷ مربع دارد، پس ابتدا صد را منهای سه کرده و حاصل آن را در تعداد واحدهایی کـه در هر شکل اضافه شده ضرب می‌کنیم و جواب آن را با تعدا د مربعات شکل سوم جمع می‌کنیم تا تعـداد مربعـات شـکل صدم را بدست آوریم.»

۱۰۰-۳=۹۷ ۹۷× ۵=۴۸۵ ۴۸۵+۱۷=۵۰۲

دانش آموز از تفکر حسابی خـود بـرای رسـیدن بـه تعـداد مربعات شکل صدم استفاده کرده؛ اما او نتوانسته است از آن برای رسیدن به یک دیدگاه جبری استفاده کند. در واقع او قادر به ایجاد پلی بین تفکر حسابی و جبری نبوده است.

ی) عده‌ای از دانش‌آموزان با توجه به شکل اظهار داشته‌انـد که «رابطه در شکل به گونه‌ای است که به مربع‌های ستونی دو طرف، دو مربع افزوده می‌شود که در مجموع ۴مربـع بـه ستون‌ها و یک مربع نیز به وسط اضافه می شود که در کل، هر مرحله ۵ مربع افزوده می شود». اما اغلب آنان قانون را n+5 نوشته یا اصلاً قانونی ننوشته‌اند.

ک)برخی دانش‌آموزان با رسم شکل‌های بعدی به تکمیـل جدول پرداخته‌اند. عده‌ای نیز n را بی‌نهایت دانسته‌اند، یـا برای به‌دسـت آوردن تعـداد مربعـات در شـکلn ام بـه n مقداری خاص داده‌اند. دانش آمـوزانی بودنـد کـه قـوانینی نادرست که ناشی از عدم درک مفهوم متغیـر و نـاتوانی در مجردسازی می باشد، ارائه کرده‌اند. در هر صورت با وجـود آنکه ۸۵٪ از دانش آموزان جدول را کامل کـرده انـد، ولـی تنها ۲۵٪ از آنان فرمولی نوشته اند. در مجموع تنها ۸/۷۵٪ از دانش آموزان قانونی درست برای تعمیم ارائه کرده اند.

پاسخ به پرسش‌های تحقیق

سؤال اول تحقیق: چه عواملی موجب شکست یا موفقیت دانش‌آموزان در تعمیم می‌شود؟

نتایج حاصل از تجزیه و تحلیل آزمون تعمیم این مطالعه، نشان می‌دهد که عوامل زیر موجب عدم موفقیت دانش‌آموزان در تعمیم جبری است:

– عدم درک مفهوم متغیر

اهمیت درک مفهوم متغیر در جبر، انکـار ناپذیراسـت؛ امـا درک مفهوم متغیر مستلزم زمـان اسـت و بـه صـورت آنـی حاصل نمی‌شود. در حقیقت یک پایـه خـاص تحصـیلی در مدرسه به تنهایی قادر نیست که این بـار را بـه‌دوش کشـد. آموزش این مفهوم باید در تمام سطوح تحصیلی به صورت متوازن و هدفمند مد نظر برنامه ریـزان درسـی باشـد. ایـن یافته بـا پـژوهش فـوجی[۱۲] سـازگار اسـت. مـوارد زیـر نمایانگر بد فهمـی دانـش‌آمـوزان از مفهـوم متغیـر در ایـن تحقیق است:

الف: بعضی از دانـش‌آمـوزان n را یـک عـدد خـاص مـی‌دانستند، به این معنی که برای به‌دسـت آوردن مرحلـهn ام هر سؤال، به n عـدد معینـی نسـبت داده و پاسخ را مـی‌نوشتند. برخی هم با اسـتدلال ایـن کـه نمـی‌داننـد n چـه عددی است، اظهار داشتند که نمی‌توانند پاسخگوی مرحله n ام باشند.

ب: تعدادی از دانش آموزان n را یک عدد بسیار بزرگ می‌دانستند و برخی از آنها n را بی‌نهایت در نظر گرفتنـد و در نتیجه عبارت مورد نظر مرحله n ام هـر سـؤال را نیـز بـی‌نهایت بدست آوردند.

ج: دانش‌آموزان در تشخیص متغیر مستقل و وابسته ناتوان بودند و در نتیجه با وجود روابط درستی کـه درک کردنـد، قانونی غلط ارائه کردند.

– تکیه بر روابط عددی بیش از روابط بنیادی دیگر

الف: در بررسی پاسخ‌های دانش‌آموزان مشاهده شد که آنها برای پیدا کردن رابطه و تعمیم، از روابط عددی بین موضوعات و به‌ویژه روابط بازگشتی استفاده می‌کنند. این امر موجب می‌شود که آنان دو دسته قانون بنویسند؛ قانون‌های درست که براساس روابط تابعی (y=f(x))بین

موضوعات است، و لنین اصطلاح قانون صریح برای آنها به‌کار برده و قانون‌های غلط که بر اساس رابطه بازگشتی بین موضوعات است باید به صورت $a_{n+1}=a_n+d$ (که a_n و a_{n+1} مقادیر متوالی موضوعات هستند و d ضریب افزایشی است) نوشته شود. ولی در این آزمون بسیاری از دانش‌آموزان با نمایش غلط، ، آن را به صورت $n+d$ نوشتند. لنین برای این گونه قوانین اصطلاح قانون بازگشتی را به‌کار برده است . در حقیقت دانش‌آموزانی که با استفاده از این راهبرد، تعمیمی درست ارائه کردند، بر اساس کشف مقادیر ثابت و متغیر در فرآیند بازگشتی به این درک رسیده‌اند ولی اغلب آنان، بنابر دانستن جواب قسمت قبلی، پاسخ مرحله بعدی را بیان کردند. از این رو بعضی از آنها در قبال پاسخ به مرحلهn ام، آن را $n+d$ نوشته اند که n تعداد موضوع مورد نظر در مرحله قبلی و d ضریب افزایشی است. عده‌ای هم، چون در نوشتن قانون، متکی به عدد قبلی هستند، نتوانستند قانون یا فرمولی درست بنویسن.

ب: به نظر می‌رسد که دانش‌آموزان در درک نظم و ترتیب و رابطه بین زوج های عددی، درسؤالاتی که همراه با ارائه جدول بوده‌اند، موفق‌تر عمل کردند و تعداد بیشتری متمایل به نوشتن قانون بودند. دانش‌آموزان، برای تعیین قوانین الگوها از افزایش الگوها با توجه به جدول‌های عددی و شمارش ساختارهای شهودی استفاده کردند. این با یافته‌های کوپر و وارن و انگلیش و وارن سازگار است [۶ و۲۰] که اظهار می‌دارند، بیان تعمیم از روی الگوهایی که در جداول عددی است برای یاددهی آسان‌تر هستند. در حقیقت دانش‌آموزان روابط بین موضوعات مختلف را در تکرار الگوها و با تکرارهای بیشتر تعمیم می‌دهند. در این فعالیت ها دیده شد که دانش آموزان الگوها را شکستند و تعداد موضوعات را n ،. . . ۳،۲،۱ قرار دادند و اجزای تکراری در جدول را از میان ستون‌ها (کشف مقادیر ثابت و متغیر)تعمیم دادند.

– عدم آشنایی کافی با راهبردهای تعمیم

فقدان پایه‌ای قوی ازحساب، موجب شد تا برخی دانش‌آموزان با وجود بیان رابطه درست، قانونی غلط بنویسند. دانش‌آموزانی برای پاسخگویی به بعضی از سؤالات، به اشتباه از راهبرد تناسب استفاده کردند که این می‌تواند بدین دلیل باشد که دانش‌آموزان سعی کرده‌اند به کمک روش‌هایی که قبلاً دیده‌اند، راه حلی بیابند. آنان با دیدن چنین مسائلی، اولین چیزی که به ذهن شان می‌رسد، راهبرد تناسب است؛ بدون آنکه به راهبردهای دیگر فکر کنند. این امر می‌تواند ناشی از تکیه بیش از ا ندازه بر دانش رویه‌ای در کلاس‌های درس و نیز عدم آموزش راهبردهای دیگر مربوط به تعمیم باشد.

– ناتوانی در بازنمایی مفاهیم و اعمال ریاضی

از آنجا که بسیاری از دانش‌آموزان قادر به تشخیص قانون بودند؛ ولی قادر به بیان رابطه نبودند، این موضوع، این ایده را حمایت می کندکه «فهم تعمیم و بیان تعمیم با یکدیگرمتفاوتند». در حقیقت مشکل دانش‌آموزان در بازنمایی و نه تشخیص رابطه است. آنان زبان و ابزاری برای بیان رابطه و تعمیم نداشتند. البته کار با علائم و نمادهای ریاضی بدون ایجاد زمینه‌ای مناسب برای مرتبط کردن آن‌ها با مفاهیم ریاضی فایده چندانی به همراه نخواهد داشت.

در بررسی و تحلیل پاسخ‌های دانش‌آموزانی که تعمیم‌های درست ارائه کردند ملاحظه شد که سه دسته از دانش‌آموزان در تعمیم موفق بودند.

۱- آنهایی که دارای دانش مفهومی و دانش رویه ای مناسبی بودند و با بهره‌گیری از دانش مفهومی خود برای یک مسأله، رویه‌ای برای حل آن ساختند. این دانش‌آموزان با درک درست الگو و رابطه بین موضوعات و به‌کار بردن راهبرد مناسب، به هدف زدند و از آن طریق به تعمیم درست دست یافتند.

۲- دانش‌آموزانی که در درک الگوهای موضوعات و کاربرد راهبردها، دارای انعطاف بودند و توانستند هنگامی که راهبردی بی‌نتیجه بود، راهبرد دیگری به‌کار برند. هم چنان‌که انگلیش و وارن [۲۰] نیز به اهمیت تفکر انعطاف‌پذیر اشاره می‌کنند.

۳- کسانی که روش تفکر خود را به صورت شمرده و مفصل بیان کرده‌اند. در حقیقت آنانی که همیشه به دنبال توجیه و توضیح عمل خود هستند، امکان بیشتری وجود دارد که در ارائه تعمیم، موفق باشند. این موضوع با یافته‌های لنین [۱۵] و انگلیش و وارن [۲۰] سازگار است. این یافته تأکید می‌کند که دانش‌آموزان در کلاس درس تشویق شوند که در مورد راه حل خود با دیگر دانش‌آموزان و معلم کلاس گفتگو کنند و اعمال خود را ضمن حل مسأله توضیح دهند.

سؤال دوم تحقیق: دانش‌آموزان سال اول متوسطه در حل مسائل تعمیم جبری از چه راهبردهایی استفاده می کنند؟

راهبردهایی که دانش‌آموزان در این تحقیق مورد استفاده قرار دادند، همراه با راهبردهای مورد استفاده برای هر سؤال در جدول ۱۱ ارائه شده است. آنان برای پاسخگویی به قسمت‌های مختلف هر سؤال، به ندرت از رسم شکل استفاده کردند و بیشتر متمایل به استفاده از راهبردهای عددی بودند. با این حال دانش‌آموزانی که در تعمیم موفق بودند هنگامی که با یک شکل یا الگوی شکلی مواجه می‌شدند، به کمک تجسم و هر یک با روش خود به حل مسأله می پرداختند. شواهد تجربی محکم نشان می‌دهند که بین مهارت‌های ادراکی تجسمی و توانایی ریاضی[۱۳] و بین درک تجسمی و دست‌یابی ریاضی و بین بازنمایی تجسمی (یعنی استفاده از تصاویر یا نمودارها) و موفقیت در حل مسأله ریاضی روابط معناداری وجود دارند[۲۱]. برخی از دانش آموزان برای پاسخگوئی به بعضی سؤالات، بیش از یک راهبرد به کار بردند. به طور مثال دانش آموزان درپاسخ به سؤالات آزمون، در یک مسأله از راهبردهای رسم شکل و بازگشتی، راهبردهای حدس و آزمایش و بازگشتی، راهبرد-های بازگشتی و تنظیم روش، راهبردهای بازگشتی و تناسب و راهبردهای بازگشتی و زمینه ای استفاده کردند. این دانش آموزان توانایی به کارگیری همزمان چند راهبرد را برای رسیدن به تعمیم دارند که می‌تواند نمایانگر تفکر انعطاف‌پذیر آنان باشد. دانش‌آموزان در ده مسأله از دوازده سؤال داده شده، از راهبرد بازگشتی برای پاسخگویی به سؤالات استفاده کردند.

جدول۱۱ راهبردهایی که دانش آموزان برای هریک از سؤالات به‌کار برده‌اند

سئوالات / راهبردها	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
حدس و آزمایش	-	-	-	✓	-	✓	✓	✓	-	✓	✓	-
شمارش	-	-	-	-	✓	✓	✓	-	✓	-	✓	✓
جایگزینی	-	-	-	-	-	-	-	-	-	✓	-	-
تناسب	✓	-	-	-	✓	✓	✓	-	-	-	✓	✓
موضوع کلی	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	✓	-
تفاضل‌عددی	-	-	✓	-	✓	-	✓	-	✓	-	✓	-
بازگشتی	-	-	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
تنظیم روش	-	-	✓	-	✓	✓	✓	-	✓	-	✓	✓
خطی	-	-	-	-	-	✓	✓	-	-	-	✓	-
زمینه ای	✓	✓	✓	-	✓	✓	✓	-	✓	-	✓	✓
مجموع راهبردهای مورد استفاده	۲	۱	۴	۲	۶	۷	۸	۲	۵	۳	۹	۵

به نظر می رسد این راهبرد ارزش مطالعه بیشتری را داشته باشد. همچنین برای حل مسأله یازده، ۹ راهبرد مختلف به کار گرفته شد. اگرچه برخی از این راهبردها به صورت نادرست مورد استفاده قرار گرفت، با این حال بررسی آن‌ها در کلاس‌های درس، دانش‌آموزان را برای استفاده درست از راهبردها یاری خواهد کرد.

۴- نتیجه گیری

این تحقیق نشان داد که دانش‌آموزان در تعمیم‌هایی به صورت y=ax، عملکرد بهتری از تعمیم‌های خطی به فرم y=ax+b دارند. این امر می‌تواند ناشی از آشنایی مناسب با مفهوم تناسب باشد که در دوره‌های ابتدایی و راهنمایی به قدر کافی آموزش داده می‌شوند. از طرف دیگر در مورد تعمیم‌هایی به شکل y=ax+b مواد آموزشی مناسب و کافی نبوده‌اند. با آنکه الگو های شکلی و شبه تعمیم‌ها، می‌توانند درک قوی از ساختارها و مفاهیم ریاضی همچون متغیر در دانش‌آموزان ابتدایی و راهنمایی ایجاد کنند، کتاب‌های درسی کشورمان چندان به آن ها نمی‌پردازند. در برنامه درسی بسیاری از کشورها سه تایی «الگوها، روابط و توابع» از دوره مقدماتی تا سال‌های آخر متوسطه جایگاهی مناسب و ثابت دارد. پژوهش حاضر نشان داد که لازم است در معرفی مفهوم متغیر، تجدید نظر و بازنگری صورت گیرد. بخشی از این بازنگری به استفاده از الگوها در سطوح مختلف تحصیلی باز می‌گردد. دانش‌آموزان در مراحل اول و دوم تعمیم (دیدن، بیان کردن) دارای توفیق نسبی بودند؛ ولی در مرحله سوم (نوشتن تعمیم) دچار مشکل بودند. در حقیقت دانش‌آموزان از طریق توجه به مشترکات حالات خاص موضوعات به فهم و درک تعمیم نایل می‌شدند و قادر به بیان آن به صورت کلامی بودند؛ ولی در بیان تعمیم به صورت نمادین موفق نبودند. این موضوع نشانگر آن است که در کلاس‌های درس استاندارد، بازنمایی به قدر کافی مورد توجه قرار نگرفته است. اگر چه بسیاری از دانش آموزان در تعمیم دادن عملکرد چندان مناسبی نداشتند؛ اما تنوع راهبردهای به کار گرفته شده از سوی دانش‌آموزان موفق این ایده را حمایت می‌نماید که می‌توان آن‌ها را در کلاس آموزش داد. برای یکی از مسائل تمامی راهبردهای ذکر شده(به جز یک راهبرد) به صورت درست یا نادرست مورد استفاده قرار گرفته است. طرح مسأله هایی این چنین در کلاس درس و بررسی راه حل‌ها می تواند بازده آموزشی مناسبی به همراه داشته باشد. این تحقیق نشان داد که با وجود غفلت از تجسم و تفکر تجسمی در برنامه درسی ریاضی و کتاب‌های درسی ریاضی مدرسه‌ای، بخش زیادی از دانش‌آموزان از این توانایی بهره گرفته‌اند و راه حل‌هایی بدیع برای تعمیم ارائه کرده‌اند. به طور مثال در سؤال ۳ دیدن و بیان اشتراکات مبتنی بر تجسم و به روش‌های متفاوت منجر به نوشتن قانون با نمایش‌های مختلف هم ارز مانند: 3n+1 و 2n+(n+1) و n+n+(n+1) و n+(2n+1) و n+(n+n+1) و 3(n-1)+4 شده است. این نکته نمایانگر این است که این‌گونه سؤالات دانش‌آموزان رابیشتر به فرایند تعمیم و توجیه ترغیب می‌کند. فهم تعمیم، بیان و بازنمایی آن به صورت یک عبارت جبری، باید به صورت هماهنگ مورد توجه قرار گیرند. بسیاری از دانش‌آموزان با توجه به دانش و تفکر حسابی، به پاسخ مراحل اولیه سؤال پرداخته و سپس با توجه به آن پاسخ‌ها و گذر از حساب به جبر، موفق به نوشتن قانون شدند. پس می‌توان با مطرح کردن مسائل تعمیم در کلاس‌های درس، فرصتی فراهم کرد که انتقال تفکر حسابی به جبری صورت گیرد. موضوع مهم دیگر لزوم برقراری توازن بین دانش مفهومی و دانش رویه ای در برنامه درسی ریاضی است. تعمیم در مجموع از جایگاه مناسبی برخوردار نیست. با آن که انتظار می رفت دانش آموزان در مرحل تفکر جبری باشند ولی نتایج تحقیق نشان داد که آنان هنوز از تفکر حسابی گذر نکرده اند.

پی نوشت

[1] Arithmetic with Letters
[2] National Council of Teachers of Mathematics
[3] Quasi-Generalization
[4] Generational, Transformational, and Global/meta-level
[5] Rule
[6] Guess and Check
[7] Trends In International Mathematics and Science Study
[8] Texas Assessment of Knowledge and Skill
[9] quasi variable
[10] بخش یک شامل سؤال ۱، بخش دو شامل سؤالات ۲،۴ و۸، بخش سه شامل سؤالات۵،۶ و۱۰و۱۱، بخش چهارشامل سؤالات۳،۷،۹ و۱۲ است.
[11] Conceptual knowledge and Procedural Knowledge
[12] Rate-Adjust
[13] Visual Perceptual Skills and Mathematical Ability

مراجع

[1] Mason J., *Early Algebraization*, in Cai J. and Knuth E., (Eds.), Advances in Mathematics Education, Netherlands: Springer, Vol.2, **2011**.

[2] Usiskin Z., *Doing algebra in grades K-4,* Teaching children Mathematics, Vol.3, **1997**, pp.346- 356.

[3] Kleiner I., *A History of Abstract Algebra*, Birkhauser Boston, **2007**.

[4] Kieran C., *the Core of Algebra: Reflections on its Main Activities,* in Stacey K. Chick H. Kenda M., (Eds.), The Future of the Teaching and Learning of Algebra, The 12th ICMI Study, Vol.8, **2004**.

[5] National Council of Teachers of Mathematics, *Principals and standards for school mathematics,* Reston, **2000**.

[6] Cooper J.T. and Warren E., *The effect of different representations on Years 3 to 5 student،s ability to generalization*, ZDM mathematics Education, Vol.40, **2008**, pp.23-37.

[7] Polya G., *How to solve it: A new aspect of mathematical method*, in: Aram A., (Ed.), Tehran, Keyhan, **2001.**

[8] Amit M. and Neria D., *Rising to the challenge*: *Using generalization in pattern problems to unearth the algebraic skills of talented pre-algebra students*, ZDM, Vol.40, No.1, **2008**, pp.111-129.

[9] Mason J., *Expressing Generality and Roots of Algebra*, in: Bednarz N., Kieran C. and Lee L.,(Eds.), Approaches to Algebra: perspectives for research and teaching, Kluwer, Dordrecht, **1996**, pp.65-86.

[10] Kaput J.J., *Teaching and learning a new algebra*, in: Fennema E. and Romberg T., (Eds.), Mathematics classrooms that promote understanding Mahwah, N.J: L. Erlbaum Associates, Publishers, **1999**, pp.133–155.

[11] Radford L., *Algebraic thinking and the generalization of patterns: A semiotic perspective,* Proceedings of the 28th Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education, North American Chapter, Vol.1, **2006**, pp.2-21.

[12] Fujii T., *Probing students understanding of variables through cognitive conflict problems: Is the concept of a variable so difficult for students to understand?,* Proceedings of the 2003 Joint Meeting of PME and PMENA, Vol.1, **2003**, pp.49–65.

[13] Becker J.R. and Rivera F., *Generalization strategies of beginning high school algebra students,* in: Chick H. and Vincent J.L., (Eds.), Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol.4, **2005**, pp.121-128.

[14] Kieran C., *Overall Commentary on Early Algebraization: Perspectives for Research and Teaching,* in: Cai J., Knuth E., (Eds.), Early Algebraization, Advances in Mathematics Education, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, **2011.**

[15] Lanin J.K., *Generalization and Justification the challenge of introducing Algebraic reasoning through patterning activities*, Mathematical Thinking and learning ,Vol.7, **2005**, pp.231-258.

[16] Radford L., *Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization*, Mathematical Thinking and Learning, Vol.5, No.1, **2003**, pp.37-70.

[17] Zazkis R., Liljedahl P., and Chernoff E., *The Role of Examples in Forming and Refuting Generalizations,* Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, Vol.40, No.1, **2008**, pp.131-141.

[18] Rivera F.D., *Visualizing as a Mathematical Way of Knowing: Understanding Figural Generalization,* Mathematics Teacher, Vol.101, No.1, **2007**, pp.69-75.

[19] Rivera F. and Becker J., *Formation of Pattern Generalization Among Middle School Students: Results From a Three-Year Study*, in: Cai J. and Knuth E., (Eds.), Early Algebraization, Advances in Mathematics Education, Netherlands, Springer, Vol.2, **2011.**

[20] English L.D., and Warren E.A., *Introducing the variable through pattern exploration*, in: Gholam Azad S., (Ed.), Roshd mathematics Education Journal, Vol.54, **1999**, pp.54-60.