دریافت مقاله: ۹۳/۱۰/۲۴
پذیرش نهایی: ۹۴/۰۵/۲۴
http: //jte.srttu.edu
ISSN: 2345 – 5462

نشریه علمی _ پژوهشی
فنـــاوری آمـــوزش
جـــلـد ۱۰، شـــمـاره ۲، زمستان ۱۳۹۴ صص ۱۱۵ تا ۱۳۱

دانشگاه تربیت دبیر شهید رجائی

بررسی درک و فهم دانش‌آموزان از اعداد منفی و بدفهمی‌های آنان

ابراهیم ریحانی[۱]، فریده حمیدی[۲] و فرزانه راشدی[۳]

[۱] **دانشیار،** گروه ریاضی دانشگاه تربیت دبیر شهید رجائی، (نویسنده مسئول) e_reyhani@srttu.edu
[۲] **دانشیار،** گروه روانشناسی دانشگاه تربیت دبیر شهید رجائی،
[۳] **دانشجوی کارشناسی ارشد،** آموزش ریاضی دانشگاه تربیت دبیر شهید رجائی،

چکیده: درک اعداد منفی و انجام عملیات روی آن‌ها یکی از موضوعات اساسی در ریاضیات است که دانش‌آموزان در مدارس برای رویارویی با آن‌ها با مشکلات بسیاری مواجه می‌شوند. یکی از عواملی که منجر به مشکلات جدی در یادگیری مفاهیم ریاضیات می‌شود، بدفهمی‌هایی است که بر اثر یاددهی نامناسب، تفکر غیر رسمی یا یادآوری ضعیف گذشته ایجاد می‌شوند. شناخت بدفهمی‌ها و ریشه‌های ایجاد آن‌ها در حوزه‌های مفهومی و در سطوح مختلف تحصیلی، می‌تواند موجب ارتقای یادگیری شود. منظور از بدفهمی در این پژوهش برداشت ناقص یا نادرست از یک مفهوم است که اشتباهات نظام‌مندی را در عملکرد فرد موجب می‌شود. در این پژوهش درک و تصور دانش‌آموزان از مفهوم عدد منفی و بدفهمی‌های آنان بررسی شده است. روش تحقیق به‌کار گرفته شده در این پژوهش، روش توصیفی از نوع زمینه‌یابی است. جامعهٔ آماری شامل کلیهٔ دانش‌آموزان پایهٔ دوم راهنمایی شهر تهران در سال تحصیلی ۹۲-۱۳۹۱ و کلیهٔ دانش‌آموزان پایهٔ هفتم شهرستان درمیان در سال تحصیلی ۹۳-۱۳۹۲ است. حجم نمونه ۴۴۳ نفر از دانش‌آموزان پایهٔ دوم راهنمایی و ۵۵ نفر از دانش‌آموزان پایهٔ هفتم بود که به روش تصادفی خوشه‌ای چند مرحله‌ای انتخاب شد. ابزار اندازه‌گیری در پژوهش حاضر، پرسشنامه‌ای محقق‌ساخته مبتنی بر پرسشنامهٔ "بوفردینگ" و "کیلهامن" بود. نتایج تحقیق نشان داد که اغلب دانش‌آموزان، درک و فهم مناسبی از اعداد منفی در ریاضیات مدرسه‌ای ندارند و در پیاده‌سازی دانسته‌های خود در حل مسائل ریاضی با مشکل مواجه می‌شوند. برخی از دانش‌آموزان علامت "-" را به عنوان یک عملگر کاهشی و برخی نیز علامت "+" را به عنوان یک عملگر افزایشی در نظر می‌گیرند.

کلیدواژه: درک، دانش‌آموزان، اعداد منفی، بدفهمی، آموزش ریاضی.

A Study on negative numbers Conception of students and their misconceptions

Ebrahim Reyhani[1], Farideh Hamidi[2] and Farzaneh Rashedi[3]

[1]Associate Professor, mathematics department (responsible author), Shahid Rajaee Teacher Training University.
[2]Associate Professor of psychology, Shahid Rajaee Teacher Training University.
[3]M.SC. student of mathematics education, Shahid Rajaee Teacher Training University.

Abstract: Understanding negative numbers and doing operations on them is one of the fundamental subjects in mathematics that students face many problems when they encounter them at school. One of the problems that leads to very serious learning difficulties in mathematics is those misconceptions students may have from previous inadequate teaching, informal thinking, or poor remembrance. Recognition of misconception and the origins that create them in the fields and at different levels of education, can improve learning. Misunderstanding in this study is incomplete or incorrect interpretation of a concept that cause systematic errors in the performance. This study investigates the student's understanding and misconception of negative numbers. Descriptive statistics, survey, is used as a method of this study. The population of the study is all second level students of guidance school in the academic year 1391-92 and all the seventh level students of Darmian town in the academic year 1392-93. 443 students in second level of guidance school and 55 students in seventh level were chosen as a sample of the study based on cluster random sampling. A self-designed questionnaire by the researcher is used as the instrument for the study, the questionnaire was based on "Bofferding" and "Kilhamn" questionnaire. Results showed that most of the students don't have a true understanding of negative numbers in school and face problems in applying their knowledge to solve mathematical problems. Also the results of the current study showed that some of the students consider "-" as a reducing operator and some consider "+" as an increasing operator.

Key words: understanding, students, negative numbers, misconception, mathematics Education.

www.SID.ir

۱– مقدمه

عدد منفی[۱]، از جمله مفاهیمی است که در فرایند آموزش ریاضی از جایگاه ویژه‌ای برخوردار است. وقتی یک مسئلهٔ ریاضی مطرح می‌شود، در بسیاری از مواقع استفاده از عملیات اعداد منفی مورد نیاز است. کیلهامن[۲] [۱] بیان می‌کند که گسترش دامنهٔ عددی از اعداد طبیعی به اعداد صحیح یک مؤلفهٔ ضروری است که دانش‌آموزان در ریاضیات مدرسه‌ای باید به آن دست یابند. با معرفی اعداد منفی دانش‌آموزان با یک مجموعهٔ جدید از اعداد آشنا می‌شوند که انتظار دارند یک دسته قواعد جدید را برای کار با این اعداد یاد بگیرند که با قوانین عملیات با اعدادی که قبلاً یادگرفته‌اند در تضاد است. کاس‌کارت[۳] و همکاران استدلال می‌کنند که چون دانش‌آموزان در سال‌های بعدی مدرسه با اعداد منفی در جبر کار خواهند کرد، باید کشف اعداد منفی را به شیوه‌ای معنی‌دار و بدون عجله شروع کنند[۲]. بال(۱۹۹۳) بیان می‌کند که آموزش اعداد منفی به دانش‌آموزان، تلاشی برای اتصال دادن مقادیر کمّی زندگی روزمره با ریاضیات رسمی است[۳]. به طور متعارف در برنامه‌های درسی ریاضیات، آموزش رسمی اعداد منفی و عملیات روی آن‌ها در پایه‌های پنجم تا هشتم شروع می‌شود[۴].

عدد منفی وقتی برای اولین بار در ریاضیات مطرح می‌شود یک مفهوم دشوار است و اغلب برای بزرگسالان حتی بعد از سال‌ها تمرین و تجربه یک مفهوم دشوار باقی می‌ماند. جولیک و همکارانش(۲۰۱۲)، معتقدند که استفاده روان از اعداد منفی نیاز به پذیرش مقادیر کمتر از صفر دارد که فاقد معنی ملموس مقادیر مثبت هستند. در حالی که ما می‌توانیم از داشتن "دو کتاب" صحبت کنیم، از لحاظ فیزیکی ما نمی‌توانیم "منفی دو کتاب" داشته باشیم[۵]. همچنین پلد[۴] (۲۰۰۳)، از طریق مطالعهٔ دانش‌آموزان پایه‌های دوم تا چهارم متوجه شد که این بچه‌ها قادر بودند ایدهٔ عدد منفی را بپذیرند اما برای عملیات روی این این اعداد به چالش کشیده شدند[۶]. بوفردینگ (۲۰۱۴) نیز از طریق مصاحبه با دانش‌آموزان پایهٔ چهارم به این نتیجه رسید که بسیاری از دانش‌آموزان تلاش می‌کنند مفهوم اعداد منفی را درک کنند، زیرا ظاهراً این اعداد را با درک ایجاد شده از اعداد نامنفی‌شان در تناقض می‌بینند[۷]. درک اعداد منفی در گذشته حتی برای ریاضیدانان نیز در ابتدا دشوار بوده است. بیری[۵] (۲۰۰۴) معتقد است که ریاضیدانان مشکلات، با اعداد منفی را قبل از قرن سوم ثبت کرده‌اند. اوایل، ریاضیدانان اغلب در وجود و معنای اعداد منفی شک داشتند[۸]. بنابراین اگر آن‌ها درک مفهوم اعداد منفی را دشوار می‌دانستند، پس چطور آموزشگران امروزی می‌توانند از دانش‌آموزان، بزرگسالان و کودکان آموزش ندیده انتظار داشته باشند مفهوم اعداد منفی را به میزانی بیشتر از یک سری قوانین حفظ شده یاد بگیرند؟[۹]. همچنین بهاسکارا[۶] ریاضیدان قرن هفتم، بیان کرد که مردم یک عدد منفی مطلق را تأیید نمی‌کنند. اواخر قرن ۱۷، دکارت جواب‌های منفی را به عنوان کاذب رد کرد، چون آن‌ها چیزی کمتر از هیچ چیز را بازنمایی می‌کردند[۱۰]. امروزه نیز به دلیل این‌که مفهوم عدد منفی در زندگی روزمره کمتر استفاده می‌شود، برای اغلب دانش‌آموزان یک مفهوم دشوار تلقی می‌شود. وقتی از دانش‌آموزان پرسیده می‌شود که چرا مفهوم عدد منفی را دشوار می‌یابند، اغلب انتزاعی بودن مفهوم عدد منفی و عدم ارتباط آن با جهان واقعی را به عنوان دلیل ذکر می‌کنند. لیمونیدیس[۷] و پلی‌تی‌دیس[۸] (۲۰۱۰)، بر این باورند که درک اعداد منفی و انجام عملیات روی این اعداد موضوعی است که اغلب دانش‌آموزان آن را دشوار می‌یابند. آن‌ها معتقدند منشأ این مشکلات معرفت شناختی[۹] است و تعداد پدیده‌های طبیعی که می‌توانند عملیات با اعداد منفی را بازنمایی کنند، محدود است[۱۱]. همچنین کیلهامن، معتقد است اعداد، اشیائی انتزاعی هستند که ما مفهوم آن‌ها را از طریق استعاره‌ها[۱۰] درک می‌کنیم. وی معتقد است، وقتی اعداد منفی در ریاضیات مدرسه ظاهر می‌شوند، برخی از خواص اعداد طبیعی متناقض می‌شوند. وی بر این باور است که دانش‌آموزان اعداد منفی را به دلیل انتزاعی بودن این اعداد و عدم ارتباط با جهان واقعی، دشوار می‌یابند[۱].

www.SID.ir

علی‌رغم اهمیت زیاد اعداد منفی در آموزش ریاضی، متأسفانه در کشور ما به مقولهٔ اعداد منفی و درک دانش‌آموزان از این اعداد چندان پرداخته نشده و خلاء و نیازمندی عظیمی در این زمینه احساس می‌شود و این نیازمندی، ضرورت انجام این‌گونه پژوهش‌ها را روشن می‌سازد. لذا هدف اصلی این مطالعه، بررسی درک و فهم دانش‌آموزان از اعداد منفی و بدفهمی‌های[11] آنان است. سؤال اصلی پژوهش حاضر از این قرار است:

دانش‌آموزان اعداد منفی را چگونه درک می‌کنند و در ارتباط با این اعداد با چه بدفهمی‌هایی روبرو هستند؟

پاسخگویی به این سؤال مستلزم بررسی پاسخ‌های دانش‌آموزان می‌باشد. در بخش نظری این تحقیق با بررسی پژوهش‌های انجام شده در مورد عدد منفی، چارچوبی نظری برای مطالعهٔ درک و تصور دانش‌آموزان از مفهوم عدد منفی و بدفهمی‌های آنان فراهم می‌گردد.

۲- پیشینه و چارچوب نظری تحقیق

۲-۱ اشتباهات[12] و بدفهمی‌های دانش‌آموزان در ریاضیات

سال‌هاست که آموزشگران به دنبال درک ماهیت خطاها و بدفهمی‌های دانش‌آموزان و دسته‌بندی آن‌ها به منظور درک دلایل بروز آن‌ها هستند. دو نوع از خطاهای عمده‌ای که دانش‌آموزان با آن‌ها درگیر هستند عبارتند از:

۱- خطاهای محاسباتی و بی‌دقتی که نظام‌مند (قابل پیش‌بینی) نیستند و ما عنوان «اشتباه» را به آن‌ها اختصاص می‌دهیم. اشتباهات، معمولاً خطاهایی هستند که در اثر بی دقتی رخ می‌دهند. هنگامی که معلم از دانش‌آموز می‌خواهد پاسخ‌هایش را بیازماید یا مجدداً محاسباتش را نگاه کند، چنانچه دانش‌آموز مفهوم تدریس شده را به خوبی درک کرده باشد، متوجه آن اشتباه می‌شود[۱۲].

۲- خطاهای نظام‌مند که تحت عنوان «بدفهمی» شناخته می‌شوند. در فرهنگ لغت برخط اینکارتا (۲۰۰۸)، بدفهمی به معنای یک ایده یا نظرِ اشتباه است که از یک درک نادرست نتیجه‌گیری شده باشد. معمولاً بدفهمی‌ها زمانی رخ می‌دهند که در حالت خاص، ایده‌هایی در ذهن دانش‌آموز ایجاد می‌شود و سپس دانش‌آموز در حالت کلی این ایده‌ها را به طور نادرست تعمیم می‌دهد[۱۲]. باتل (۱۳۸۹) نیز چنین بیان می‌دارد: "بدفهمی ناشی از این است که دانش‌آموز، مطلب را درک نکرده یا به غلط درک کرده است. در واقع این خطاها ناشی از بی‌دقتی یا بی‌توجهی به فعالیت نیستند و ریشه‌های عمیق‌تری دارند. بدفهمی دانش‌آموزان ممکن است از تجربیات و دانسته‌های پیشین آن‌ها در زندگی روزمره نشأت بگیرد و به طور جدی توسط دانش‌آموزان حفظ شود و نتایج حاصل از آن‌ها، یادگیری را به تاخیر اندازد." مثلاً معلمی که در مثال‌های خود در ضرب مرتباً از ۲×۲ استفاده می‌کند، می‌تواند این بدفهمی را در دانش‌آموزان ایجاد کند که ضرب همان جمع است [۱۳].

آلن[13] (۲۰۰۷) بدفهمی را یک ایده یا نظرِ اشتباه می‌داند که از درک نادرست بعضی چیزها حاصل می‌شود[۱۴]. اسمیت[14] و همکاران(۱۹۹۳) در جمع‌بندی خود از تحقیقات انجام گرفته در مورد بدفهمی‌های حوزهٔ ریاضی و علوم به این نتیجه رسیده‌اند که اشتباهات به طور تصادفی ساخته نمی‌شوند، بلکه به طور نظام‌مند توسط دانش‌آموز شکل می‌گیرند و به طور قابل توجهی متفاوت از خطاهای محاسباتی هستند[۱۵]. در یک مفهوم گسترده، بدفهمی عدم درک دانش به طور مستقیم یا غیر مستقیم است. بدفهمی می‌تواند به عنوان دانشی تعریف شود که از یادگرفتن حقایق علمی جلوگیری می‌کند و شخص از طریق تجارب فردی خود آن را به‌دست می‌آورد. بدفهمی‌ها مفاهیم اشتباهی هستند و یا مفاهیمی هستند که فرد فرض می‌کند درست هستند و بر حسب عادت از آن‌ها استفاده می‌کند. بدفهمی‌ها ویژگی‌های مشخصی دارند و با اشتباهات تصادفی متفاوتند. اشتباهات معمولاً بر اثر بی‌دقتی رخ می‌دهند و فرد می‌تواند درست یا اشتباه بودن را با کمی هشدار توسط معلم تشخیص دهد. اما در ابتدا همهٔ افرادی که

Archive of SID
www.SID.ir

دچار یک نوع بدفهمی خاص هستند، وقتی به آن‌ها هشدار داده می‌شود، تمایل دارند از خودشان دفاع کنند[۱۶].

غالباً بدفهمی یک تفکر غلط نیست بلکه یک مفهوم در مرحلهٔ ابتدایی یا یک تعمیم است که توسط دانش‌آموز ساخته شده است[۱۷]. در واقع ممکن است یک مرحلهٔ طبیعی رشد باشد. یکی از عواملی که منجر به مشکلات جدی در یادگیری ریاضیات می‌شود، بدفهمی‌هایی هستند که بر اثر یاددهی نامناسب، تفکر غیر رسمی، یا یادآوری ضعیفِ گذشته ایجاد می‌شوند. لازم به ذکر است که بدفهمی به طور مستقل وجود ندارد و در یک چارچوب مفهومی خاص بروز می‌کند. بدفهمی‌ها می‌توانند با تغییرات چارچوب تغییر کنند یا ناپدید شوند. لذا یکی از اهداف کلیدی در اصلاح بدفهمی‌های ریاضیات و علوم، تغییرات چارچوب مفهومی دانش‌آموزان است[۱۸]. به همین دلیل تنها آگاه کردن دانش‌آموزان از بدفهمی‌ها کافی نیست، بلکه بدفهمی‌ها باید به صورت درونی تغییر داده شودند.

به نظر می‌رسد باید از روش‌هایی در تدریس استفاده شود که از ایجاد هرگونه بدفهمی برای دانش‌آموز به دور باشد، و باید بپذیریم که دانش‌آموزان تعمیم‌هایی را می‌سازند که نادرست هستند و بسیاری از این بدفهمی‌ها مخفی خواهند ماند، مگر این‌که معلم تلاش خاصی برای کشف آن‌ها انجام دهد.

۲-۲ معانی متفاوت علامت منفی

امروزه علامت منفی دو کاربرد متفاوت دارد، یعنی از یک سو یک عملگر دوتایی[۱۵] است که برای عمل تفریق استفاده می‌شود و از سوی دیگر یک عملگر واحد[۱۶] برای نمایش یک عدد منفی یا وارون جمعی یک عدد مثبت در نظر گرفته می‌شود[۸و۱۹]. درک نماد رسمی عدد صحیح برای دانش‌آموزان دشوار است. با معرفی اعداد منفی نماد "-" سه معنا را در برمی‌گیرد: واحد (منفی)، دوتایی (تفریق) و متقارن[۱۷] (مخالف[۱۸]). در جدول ۱ مثال‌هایی برای این معانی متفاوت ارائه شده است:

اما در گذشته این تفاوت معنایی وجود نداشت. برای مثال، تفکر چینی‌ها از یک عدد منفی، مقداری بود که باید در معاملات پرداخته می‌شد[۸].

جدول۱. سه معنای متفاوت علامت منفی [۷]

معانی علامت منفی	تعبیر	مثال
عملگر دوتایی	تفریق	۳- ۹ (عملیات)
عملگر واحد	عدد منفی	۷- (عدد علامت‌دار)
عملگر تقارن	گرفتن وارونه	۶- = (۶)- = (۴+۲)-

یک تمایز روشن بین دو معنای متفاوت توسط وایت‌هد[۱۹] (۱۹۴۷)، بیان شده است. او معتقد است ریاضیدانان عادت دارند کسانی را که درگیر ردیابی معانی مفاهیم هستند، گیج کنند؛ اما در عمل استفاده از نماد یکسان در معانی هرچند متفاوت، مناسب است. یک شرط لازم این است که هرچند ممکن است معانی نماد متنوع باشد، اما قوانین رسمی برای استفاده از آن همیشه باید یکسان باشد[۱].

بسیاری از مشکلاتی که دانش‌آموزان هنگام حل معادلات دارند به ساختار معادله یا وجود متغیرها و مجهولات بستگی ندارد، بلکه به وجود اعداد منفی وابسته است. بنابراین لازم است تا حد امکان، بین این سه معنی به ظاهر متفاوت از علامت منفی، تمایز قائل شوند[۱۹ و ۲۰]. اگر دانش‌آموزان به اندازه کافی سه معنای علامت منفی را درک نکنند، وقتی تلاش می‌کنند تا عبارت‌های جبری را ساده و حل کنند، با مشکلات بیشتری مواجه می‌شوند[۱۹ و ۲۱ و۲۲]. به عنوان نمونه، ولاسیس با مطالعاتی که بر روی دانش‌آموزان سال سوم راهنمایی انجام داد، به این نتیجه رسید که برای بسیاری از دانش‌آموزان، علامت منفی تنها به معنی عملگر تفاضل (عملگر دوتایی) است و برای برخی دیگر، به مفهوم یک علامت جدا کننده در عبارت‌های چند جمله‌ای است. برای مثال در مطالعهٔ او یکی از دانش‌آموزان برای محاسبهٔ عبارت "۴ – ۶n – ۴"، ابتدا عدد ۴ و علامت (-) را نگه می‌داشت. سپس از عبارت "۴ – ۶n"، حاصل ۲n را

Archive of SID
www.SID.ir

به دست می‌آورد و در نهایت به عبارت"۲n- ۴ " دست می‌یافت. ولاسیس مخصوصاً اشاره می‌کند که هیچ دانش‌آموزی در نظر نگرفت که علامت منفی می‌تواند یک وضعیت دوگانه داشته باشد. بنابراین یادگیری علامت‌ها یک فرایند دو مرحله‌ای است. ابتدا باید معانی متفاوت را تشخیص دهیم، سپس ببینیم آیا معانی بسته به زمینه، قابل تغییر هستند یا خیر؟

ولاسیس (۲۰۰۹) نشان داد که دانش‌آموزان پایهٔ هشتم در یک گفتمان جبری مشخص در استفاده از علامت منفی توانمند نبودند و معنای واحد و دوتایی علامت منفی را درک نکردند. یکی دیگر از ویژگی‌های مبهم، مفهوم علامت مثبت است. در دامنهٔ اعداد صحیح همهٔ اعداد علامت‌دار هستند (به جز صفر)، اما اعداد صحیح به ندرت با یک علامت مثبت نمادگذاری می‌شوند[۲۳].

۲-۳ بدفهمی دانش‌آموزان در درک مفهوم عدد منفی

شناسایی و کشف بدفهمی دانش‌آموزان برای معلمان ریاضی اهمیت زیادی دارد، زیرا می‌توانند تا حدودی روش تدریس خود را بر مبنای بدفهمی‌های دانش‌آموزان تعدیل کنند. بسیاری از بدفهمی‌های ظاهر شده در جبر، ریشه در بدفهمی‌های حساب دارد. شبه معادله $-^{۲۰۱۰} = ؟ + ۴-$ باعث می‌شود بسیاری از دانش‌آموزان در ابتدا آشفته و نگران شوند. این بدفهمی با درک نادرست از اعداد منفی ایجاد می‌شود. در جبر مشکلات متعددی در حل معادله وجود دارد که این عدم درک[۲۱]/ بدفهمی منبع این مشکلات است[۱۸].

از آن‌جاکه درک مفهوم اعداد صحیح توسط دانش‌آموزان به درکشان از عملیات اعداد صحیح کمک می‌کند، بررسی کامل درک مفهوم عدد صحیح دانش‌آموزان و این‌که چطور آن را توسعه می‌دهند، مهم است.

بوفردینگ(۲۰۱۰)، مطالعه‌ای را بر روی ۲۲ دانش‌آموز ابتدایی از بین ۸ دانش‌آموز دوم، ۱۰ دانش‌آموز سوم و ۴ دانش‌آموز چهارم در یک مدرسهٔ کالیفرنیا انجام داد. وی از دانش‌آموزان خواست تا اعداد را در سه دستهٔ کوچک، متوسط و بزرگ مرتب کنند. در جدول ۲، دسته‌بندی برخی از دانش‌آموزان در مطالعهٔ بوفردینگ(۲۰۱۰)، ارائه شده‌است. نتایج نشان داد که تعداد کمی از دانش‌آموزان ۹- و ۷- را به عنوان عدد بزرگ طبقه‌بندی کردند و این نشان می‌دهد که آن‌ها روی بزرگی[۲۲] (ارزش و مقدار) عدد و نه اندازه[۲۳] تأکید می‌کنند؛ یعنی، بیشتر آن‌ها درک می‌کنند که ۹- بزرگترین عدد از نظر اندازه است نه از لحاظ ارزش و مقدار.

جدول۲. دسته‌بندی دانش‌آموزان [۲۴]

اعداد علامت‌دار	۸	۷	۵	۳	۲	۱	۰	۱-	۳-	۴-	۶-	۷-	۹-
تعداد دانش‌آموزانی که اعداد را به عنوان کوچک دسته‌بندی کردند.	-	-	-	۲	۷	۱۰	۱۲	۱۶	۱۵	۱۶	۱۸	۱۸	۱۸
تعداد دانش‌آموزانی که اعداد را به عنوان متوسط دسته‌بندی کردند.	-	-	۹	۱۶	۱۳	۱۰	۱۰	۵	۶	۶	۴	-	-
تعداد دانش‌آموزانی که اعداد را به عنوان بزرگ دسته‌بندی کردند.	۲۲	۲۲	۱۳	۴	۲	۲	-	۱	۱	-	-	۴	۴

جدول۳. پاسخ نادرست سه دانش‌آموز به تکلیف مرتب‌سازی اعداد علامت‌دار [۲۴]

مرتب سازی	بزرگترین عدد							کوچکترین عدد
مت	۹	۸	۵-	۴	۴-	۳	۲-	۰
روونا	۸	۶	۴	۵-	۴-	۳	۲-	۰
سارا	۹	۸	۴	۳	۵-	۴-	۲-	۰

www.SID.ir

همچنین یافته‌های بوفردینگ نشان داد که بیشتر دانش‌آموزان ابتدایی تفاوت بین اندازه و مقدار اعداد صحیح را درک می‌کنند. در جدول ۳، پاسخ سه دانش‌آموز به تکلیف مرتب‌سازی اعداد علامت‌دار در مطالعهٔ بوفردینگ ارائه شده است.

مرتب‌سازی مت[۲۴] نشان می‌دهد که او همه اعداد را مثبت تلقی می‌کند و پاسخ‌های سارا تأیید می‌کند که او منفی‌ها را به عنوان مساوی با صفر تفسیر می‌کند. نظرات رووونا[۲۵] نشان می‌دهد که او فکر می‌کند همهٔ اعداد منفی مساوی با صفر است، اما مرتب‌سازی‌اش متناقض است.

بر اساس مصاحبه با دانش‌آموزان پلد و رزنیک[۲۶] (۱۹۸۹) گزارش کردند که دانش‌آموزان پایهٔ سوم اعداد منفی را به درستی مرتب می‌کردند اما دانش‌آموزان پایهٔ اول اعداد منفی را همانند همتایان مثبت‌شان مرتب می‌کردند (برای مثال۳- ،۳، ۲ ، ۱- ،۱-) یا آن‌ها را به عنوان صفر تلقی می‌کردند[۲۵]. هنگام مرتب کردن اعداد، دانش‌آموزانی که اعداد منفی را مانند صفر تلقی می‌کردند، آن‌ها را در طرف صفر قرار می‌دادند (برای مثال ۳، ۲، ۱، ۳- ، ۲- ، ۱- ،۰ یا ۳، ۲، ۱، ۳- ، ۱- ، ۰، ۲-) [۲۶].

بیشاپ (۲۰۱۱)، معتقد است که درک اعداد منفی پیچیده است و بیشتر دانش‌آموزان و بسیاری از بزرگسالان با مشکلات مختلفی هنگام استدلال در مورد اعداد منفی روبه‌رو می‌شوند. بسیاری از بزرگسالان و کودکان مشکل تصور کردن ۲- سیب یا شغل را دارند. بسیاری از دانش‌آموزانی که در مطالعهٔ بیشاپ با آن‌ها مصاحبه شد، وقتی تلاش می‌کردند تا مفهوم اعداد منفی را بسازند، این مشکلات را انعکاس دادند. یکی از دانش‌آموزان پایهٔ دوم توضیح داد که اعداد منفی واقعاً عدد نیستند، آن‌ها درست مانند اعداد دیگر عمل می‌کنند به جز این‌که یک علامت منفی در مقابل آن‌ها وجود دارد[۱۰]. بهرند[۲۷] و موس[۲۸] (۲۰۰۶)، یک کلاس درس مبتنی بر پرسش از پایهٔ اول تا دوم را دنبال کردند، تمرکز گزارششان روی تعاملات دانش‌آموزان، پیرامون اعداد منفی بود. بعدها دانش‌آموزان خود به خود اعداد منفی را در عبارت‌های عددی استفاده می‌کردند. برای مثال، وقتی از دانش‌آموز می‌خواستند تا عبارت عددی شامل ۱۰ را تولید کند، دانش‌آموز پاسخ می‌داد ۱۰= ۱۲+ ۲- . همچنین، در یک کلاس پایه سوم یکی از دانش‌آموزان به طور منظم اعداد منفی را در یک الگوریتم تفریق استفاده می‌کرد (برای مثال ۱۱۹= ۱- + ۲۰+ ۱۰۰= ۱۲۶- ۲۴۵). در پایان همهٔ دانش‌آموزان پایهٔ دوم به جز یک نفر تفاوت بین ۳- ۵ و (۳-) ۵ را تشخیص دادند، چیزی که به سختی برای اکثریت دانش‌آموزان پایهٔ پنجم در همان مدرسه ثابت می‌شد. نتایج کار بهرند و موس نشان می‌دهد که دانش‌آموزان توانایی لازم برای معرفی اعداد منفی را خیلی زودتر از پایهٔ پنجم و ششم دارند[۲۷].

گالاردو(۲۰۰۲)، نشان داد که در فرایند انتقال از حساب به جبر است که تجزیه و تحلیل ساخت و ساز یک دانش‌آموز از اعداد منفی معنی‌دار می‌شود. در طول این مرحله، دانش‌آموزان با معادلات و مسائلی روبرو می‌شوند که اعداد منفی را به عنوان ضرایب، ثابت‌ها یا پاسخ‌ها دارند. بسیاری از معلمان و محققان بر این باورند که دانش‌آموزان به سختی جمع و تفریق اعداد منفی را یاد می‌گیرند. اغلب معلمان فکر می‌کنند که تدریس اعداد منفی بدون استفاده از قوانین بی‌معنی و ترفندها دشوار است[۲۸]. با بررسی منابع پژوهشی، برخی از بدفهمی‌های دانش‌آموزان در مورد مفهوم عدد منفی که محققان مختلف از آن‌ها به عنوان بدفهمی‌های عدد منفی نام برده‌اند، به دست آمدند که در جدول۴، ارائه شده‌اند.

۳- روش تحقیق

مطالعهٔ حاضر، با استفاده از روش توصیفی از نوع زمینه‌یابی انجام شده است. این تحقیق در دو بخش بر روی دو گروه از دانش‌آموزان پایهٔ دوم راهنمایی و دانش‌آموزان پایهٔ هفتم انجام شده است[۲۹]. جامعهٔ آماری این تحقیق شامل کلیهٔ دانش‌آموزان پایهٔ دوم راهنمایی شهر تهران در سال تحصیلی۹۲-۹۱ و کلیهٔ دانش‌آموزان پایهٔ هفتم شهرستان درمیان[۳۰] در سال تحصیلی ۹۳-۹۲ است، که در زمان انجام پژوهش

www.SID.ir

جدول۴. بدفهمی‌های دانش‌آموزان در مورد عدد منفی در پژوهش‌های انجام شده

ردیف	نوع بدفهمی	تشریح بدفهمی درپژوهش‌ها	پژوهش حمایت‌کننده
۱	در نظر گرفتن صفر به عنوان کوچکترین عدد	بسیاری از دانش‌آموزان بر این باورند که نمی‌توان هیچ مقداری از صفر برداشت و صفر کوچکترین عدد است.	[۳]
۲	عدم درک مبدأ محور اعداد و نپذیرفتن صفر به عنوان یک عدد	برخی از دانش‌آموزان، برای حل مسائل جمع و تفریق با استفاده از محور عدد، اعداد یک و منفی یک را به عنوان مبدأ محور اعداد در نظر می‌گیرند. حتی در میان دانش‌آموزانی که می‌پذیرند عدد منفی وجود دارد، برخی صفر را به عنوان یک عدد در نظر نمی‌گیرند. برخی از دانش‌آموزان نیز در انتخاب صفر به عنوان نقطهٔ مبدأ دارای بدفهمی هستند.	[۲۹ و ۳۰]
۳	در نظر گرفتن علامت منفی به عنوان یک علامت جداکننده عدم توانایی در تمایز بین معانی متفاوت علامت منفی	برای اکثر دانش‌آموزان علامت منفی فقط به عنوان یک عملگر محاسباتی معنادار است و به طور کلی وقتی بین دو عبارت قرار داده می‌شود، به صورت عمل تفریق در نظر گرفته می‌شود. برای تعدادی هم علامت منفی به عنوان یک علامت جداکننده است، برای مثال در عبارت $5n - 7n$ -۸ +۲۰ دو محاسبه ۸ +۲۰ و $5n - 7n$ توسط برخی از دانش‌آموزان انجام می‌شود. برخی از دانش‌آموزان اعداد منفی را برابر صفر در نظر می‌گیرند و به طور کلی از علامت‌ها چشم‌پوشی می‌کنند.	[۱۹ و ۲۳ و۲۴]
۴	تعمیم خاصیت جابجایی جمع اعداد به تفریق آن‌ها	تعمیم نابجای خاصیت تعویض‌پذیری جمع اعداد به تفریق اعداد، یکی از اشتباهات رایجی است که گریبان‌گیر بسیاری از دانش‌آموزان شده است. به این معنی که دانش‌آموز، از سال‌های ابتدایی درک کرده است که تساوی "۳+۸ = ۸+۳" برقرار است. لذا دانش‌آموز بر اساس تعمیمی که از عملگر (+) به عملگر (-) می‌دهد، عبارت "۳ − ۸ = ۸ − ۳" را هم درست می‌پندارد. بسیاری از دانش‌آموزان به دلیل اتکای بیش از حد روی خاصیت جابجایی جمع، حاصل ۷- ۵ را با حاصل ۵- ۷ یکی در نظر می‌گیرند.	[۳۱]
۵	تعمیم مقایسه اعداد طبیعی به اعداد صحیح	دانش‌آموزان در ابتدای یادگیری اعداد منفی، ۶- را از ۴- بزرگتر در نظر می‌گیرند. ماهیت متناقض بزرگی و اندازهٔ اعداد منفی یکی از دلایل بدفهمی‌های دانش‌آموزان است.	[۲۴ و ۲۵]
۶	عدم درک تفاوت بین عدد مثبت و عدد منفی	برخی از دانش‌آموزان بر این باورند که؛ اعداد منفی واقعاً اعداد مستقلی نیستند. آن‌ها درست مانند اعداد دیگر عمل می‌کنند با این تفاوت که یک علامت منفی در مقابل آن‌ها وجود دارد. در تفریق ۵-۳، سه منهای پنج معنی نمی‌دهد چون ۳ کمتر از ۵ است. سه منهای پنج، برابر، صفر می‌شود. صفر به معنی هیچ چیز است، اما منفی بیش‌تر از هیچ چیز است، پس اگر صفر به معنی هیچ چیز است، برداشتن چیزی از هیچ چیز در دنیای اشیاء شمارش‌پذیر غیر ممکن است. ۸ = □ - ۵ چالش برانگیز است چون با مفهوم این‌که عمل تفریق کوچکتر می‌سازد در تناقض است.	[۳۲]
۷	عدم درک مفهوم علامت منفی	بسیاری از اشتباهات هنگام حل کردن معادلات به خاطر حضور اعداد منفی رخ می‌دهد. چون دانش‌آموزان بین معانی متفاوت علامت منفی تمایز قائل نمی‌شوند.	[۲۰]
۸	نادیده گرفتن علامت منفی در عملیات	وقتی پاسخ عبارت ۸ + ۵- از دانش‌آموزان پرسیده می‌شود، برخی از آن‌ها به سادگی علامت منفی را نادیده گرفته و آن را به صورت ۸ + ۵ در نظر می‌گیرند.	[۲۵]

Archive of SID
www.SID.ir

مشغول تحصیل بودند. از بین جامعهٔ آماری، نمونه‌ای با حجم ۴۹۸ نفر به روش تصادفی خوشه‌ای چند مرحله انتخاب شد. به منظور جمع‌آوری اطلاعات مورد نیاز، از پرسشنامه‌ای شامل ۵ سؤال که منطبق با هدف اصلی پژوهش، بررسی درک و فهم دانش‌آموزان از اعداد منفی و بدفهمی‌های آنان است، استفاده شد.

در تهیه پرسشنامه از نظرات تعدادی از استادان ریاضی و آموزش ریاضی و نیز دبیران ریاضی بهره گرفته شد. به منظور رفع نقایص و برآورد پایایی و روایی، پرسشنامه به‌طور آزمایشی در بین یک نمونه ۳۴تایی در دسترس، از دانش‌آموزان دختر پایهٔ دوم راهنمایی شهرستان قرچک ورامین که مبحث اعداد صحیح قبلاً برای آن‌ها تدریس شده بود، توزیع شد.

پس از بررسی و تجزیه و تحلیل پاسخ‌های دانش‌آموزان، برخی از سؤالات پرسشنامه با نظر استادان جایگزین و یا اصلاح شدند و بعد از ویرایش نهایی، پرسشنامه‌ای با ۵ سؤال که در زمینهٔ «درک و تصور دانش‌آموزان از مفهوم عدد منفی» بود، آماده و استفاده شد. این تحقیق در طی زمانی حدود ۲ سال انجام شد و پرسشنامه‌ها توسط محققان با حضور در مدارس در بین شرکت‌کنندگان توزیع شد. روش تجزیه و تحلیل داده‌ها در این پژوهش، تحلیل کیفی است.

۴- یافته‌های تحقیق

در این قسمت با بررسی پاسخ‌های ارائه شده توسط دانش‌آموزان به سؤالات پرسشنامه، اطلاعات جمع‌آوری شده در خصوص اهداف پژوهش ارائه می‌شود. در بیشتر موارد به دلیل محدودیت، تعداد اندکی از پاسخ‌های دانش‌آموزان به عنوان نمونه ذکر شده است که ممکن است پاسخ‌های نادرست یا متناقض شرکت‌کنندگان هم دیده شود، این پاسخ‌ها بدون دخل و تصرف ارائه شده‌اند. پاسخ‌های دانش‌آموزان بر مبنای معیارها و مبانی به‌دست آمده از بخش نظری تحقیق، بررسی و تجزیه و تحلیل شده‌اند.

سؤال اول

در هر جای خالی علامت‌های + و − را طوری قرار دهید تا جواب حاصل، بیشترین مقدار ممکن شود، سپس مقدار آن را حساب کنید.

(−۵) □ (−۶) □ (+۳) □ (−۹) =

هدف از طرح سؤال اول این است که تصور دانش‌آموزان نسبت به کاربرد علامت (-) مشخص شود.

به عبارت دیگر، مشخص شود که آیا دانش‌آموزان، علامت منفی را صرفاً به عنوان یک عملگر کاهشی در نظر می‌گیرند یا خیر؟ همچنین این سؤال توانایی دانش‌آموزان در محاسبات را نیز مورد ارزیابی قرار می‌دهد.

یافته‌های سؤال اول: نحوه و درصد پاسخگویی دانش‌آموزان به سؤال ۱ پرسشنامه در جدول ۵ و ۶ خلاصه شده است.

نتایج به‌دست آمده، با توجه به پاسخ‌های دانش‌آموزان در جدول ۷ ارائه شده است.

سؤال دوم

با قرار دادن عدد مناسب در مرحلهٔ آخر، الگوی زیر را کامل کنید.

3+ 2= 5

3+ 1= 4

3+ 0= 3

3+ = 2

هدف از طرح سؤال دوم این است تا دانش‌آموزان با استفاده از روش الگویابی به درک درستی از اعداد منفی دست یابند.

یافته‌های سؤال دوم: نحوه و درصد پاسخگویی دانش‌آموزان به سؤال دوم پرسشنامه در جدول۸، خلاصه شده است.

سؤال سوم

اعداد صحیح زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید و سپس بزرگترین و کوچکترین عدد را مشخص کنید.

-۵ ، ۹ ، ۳ ، -۲ ، ۴ ، ۰ ، ۸ ، -۴

www.SID.ir

جدول ۵. تعداد و درصد پاسخ‌های دانش‌آموزان پایهٔ دوم راهنمایی به سؤال اول

نوع پاسخ‌های ارائه شده		فراوانی	درصد فراوانی		تشریح پاسخ
پاسخ درست	**+۱۳**	۱۶۴	۳۷		درک درست علامت منفی و برخورداری از توانایی محاسبه
پاسخ‌های نادرست	**-۲۳**	۱۱۸	۲۶/۶۴	۵۱/۷	به‌دست‌آوردن بیشترین اندازه و برخورداری از توانایی محاسبه
	-۱۷	۱۶	۳/۶۱		در نظر گرفتن علامت مثبت به عنوان یک عملگر افزایشی
	غیره	۹۵	۲۱/۴۵		پاسخی که تحلیل آن امکان پذیر نیست.
اشتباه محاسباتی	+۱۲	۱۶	۳/۶		درک درست علامت منفی اما عدم توانایی در محاسبه
عدم پاسخگویی		۳۴	۷/۷		
جمع کل		۴۴۳	۱۰۰		

جدول ۶. تعداد و درصد پاسخ‌های دانش‌آموزان پایهٔ هفتم به سؤال اول

نوع پاسخ‌های ارائه شده		فراوانی	درصد فراوانی		تشریح پاسخ
پاسخ درست	**+۱۳**	۴	۷/۲۷		درک درست علامت منفی و برخورداری از توانایی محاسبه
پاسخ‌های نادرست	**-۲۳**	۱۹	۳۴/۵۴	۷۸/۱۸	به‌دست‌آوردن بیشترین اندازه و برخورداری از توانایی محاسبه
	-۱۷	۸	۱۴/۵۵		در نظر گرفتن علامت مثبت به عنوان یک عملگر افزایشی
	غیره	۱۶	۲۹/۰۹		پاسخی که تحلیل آن امکان پذیر نیست.
اشتباه محاسباتی	+۱۲	۰	۰		درک درست علامت منفی اما عدم توانایی در محاسبه
عدم پاسخگویی		۸	۱۴/۵۵		
جمع کل		۵۵	۱۰۰		

جدول۷. تحلیل پاسخ دانش‌آموزان به سؤال ۱ پرسشنامه

تحلیل و تفسیر جواب
این دانش‌آموزان در سه جای خالی مربوط به علامت‌ها، علامت‌های درست قرار داده‌اند و جواب نهایی را نیز درست به‌دست آورده‌اند. این موضوع بیانگر این است که این دانش‌آموزان نسبت به این موضوع آگاه هستند که علامت "-" گاهی می‌تواند به عنوان یک عملگر افزایشی در محاسبات به‌کار رود. همچنین پاسخ درست دانش‌آموزان بیانگر این موضوع است که، تفاوت بین اندازه و ارزش (مقدار) را درک کرده‌اند. البته این دانش‌آموزان از توانایی محاسباتی خوبی هم برخوردار بوده‌اند، چون ضمن درک هدف سؤال و انتخاب درست علامت‌ها در جای خالی، حاصل نهایی را نیز درست به‌دست آورده‌اند.
از نحوهٔ پاسخگویی این دانش‌آموزان به این سؤال مشخص می‌شود که آن‌ها مفهوم این سؤال را به درستی درک نکرده‌اند؛ چرا که برداشت آن‌ها از بیشترین مقدار جواب، بیشترین مقدار از لحاظ اندازه بوده و ارزش علامت جواب نهایی را در نظر نگرفته‌اند. بدین معنا که درون جاهای خالی علامت‌هایی را قرار داده که تمامی اعداد، هم علامت(منفی) باشند تا بزرگترین عدد از نظر اندازه که همان (۲۳-) است، به‌دست آید. در صورتی که هدف سؤال به‌دست آوردن بیشترین مقدار از نظر ارزش بوده است.
این دانش‌آموزان در تمام جاهای خالی علامت مثبت قرار داده‌اند و حاصل ۱۷- را به‌دست آورده‌اند. این دانش‌آموزان علامت مثبت را به عنوان یک عملگر افزایشی در نظر گرفته‌اند. به نظر می‌رسد برداشت آن‌ها از علامت مثبت این است که همیشه باعث افزایش مقدار جواب می‌شود.
این دانش‌آموزان در پاسخ به این سؤال دچار اشتباه محاسباتی شده‌اند. به این معنا که در جای خالی مربوط به علامت‌ها، علامت‌های درست را قرار داده‌اند، اما در محاسبه جواب آخر، دچار اشتباه شده‌اند. این موضوع نشان می‌دهد که این افراد مفهوم علامت منفی را به‌خوبی درک کرده‌اند ولی چون از توانایی محاسباتی خوبی برخوردار نبوده‌اند، جواب نهایی را اشتباه به‌دست آورده‌اند.

Archive of SID
www.SID.ir

جدول ۸. تعداد و درصد پاسخ‌های دانش‌آموزان دوم راهنمایی و دانش‌آموزان پایهٔ هفتم به سؤال دوم

نوع پاسخ‌های ارائه شده		فراوانی دوم راهنمایی	درصد فراوانی دوم راهنمایی		فراوانی پایه هفتم	درصد فراوانی پایه هفتم	
پاسخ‌های درست	۱-	۳۶۸	۸۳/۱		۳۹	۷۰/۹	
پاسخ‌های نادرست	۰	۹	۲/۰۴	۱۰/۴	۳	۵/۴۵	۱۴/۵۵
	۵-	۱۰	۲/۲۶		۱	۱/۸۳	
	غیره	۲۷	۶/۱		۴	۷/۲۷	
عدم پاسخگویی		۲۹	۶/۵		۸	۱۴/۵۵	
جمع کل		۴۴۳	۱۰۰		۵۵	۱۰۰	

با توجه به پاسخ‌های دانش‌آموزان نتایج زیر به‌دست آمده است:

جدول۹. تحلیل پاسخ دانش‌آموزان به سؤال ۱ پرسشنامه

پاسخ دانش‌آموزان	تحلیل و تفسیر جواب
۱-	پاسخ این دانش‌آموزان درست است، هرچند در کتاب درسی(۱۳۹۰) و همچنین کتاب درسی(۱۳۹۲)، نمونه‌هایی مانند این مطرح نشده است. این موضوع بیانگر این است که استفاده از روش الگویابی این امکان را برای دانش‌آموزان فراهم می‌آورد که خود به درک عمیق‌تر اعداد منفی برسند.
۰	برخی از دانش‌آموزان در جای خالی عدد صفر را قرار داده‌اند. چون این موضوع برای محققان جالب بود با مصاحبه‌ای که انجام شد، برخی از دانش‌آموزان این دلیل را ارائه کردند که چون هیچ عددی وجود ندارد که با ۳ جمع شود و حاصل آن برابر ۲ گردد، عدد صفر را در جای خالی قرار داده‌اند.
۵-	برخی از دانش‌آموزان در جای خالی عدد ۵- را قرار داده بودند. نکته جالب این است که این دانش‌آموزان خودشان عدد ۲ را در صورت سؤال به ۲- تغییر داده بودند.

جدول۱۰. فراوانی پاسخ‌های دانش‌آموزان پایهٔ دوم راهنمایی و دانش‌آموزان پایهٔ هفتم به سؤال سوم

نوع پاسخ‌های ارائه شده		فراوانی دوم راهنمایی	درصد فراوانی دوم راهنمایی	فراوانی پایه هفتم	درصد فراوانی پایه هفتم
پاسخ درست		۳۳۹	۷۶/۵	۳۱	۵۶/۳۶
پاسخ نادرست	تصادفی(بدون تحلیل)	۲۱	۴/۷۷	۳	۳۶/۳۶
	بدفهمی‌های مشترک	۷۱	۱۶/۰۳	۲۰	۵/۴۵
عدم پاسخگویی		۱۲	۲/۷	۱	۱/۸۳
جمع کل		۴۴۳	۱۰۰	۵۵	۱۰۰

هدف از طرح سؤال سوم این است تا درک و تصور دانش‌آموزان نسبت به عدد صفر و اعداد منفی مشخص شود.

یافته‌های سؤال سوم: نحوه و درصد پاسخگویی دانش‌آموزان به سؤال سوم پرسشنامه در جدول ۱۰، خلاصه شده است.

همان‌طور که در جدول۱۰، مشاهده می‌شود، ۱۶/۰۳درصد از دانش‌آموزان پایهٔ دوم راهنمایی و ۵/۴۵ درصد از دانش‌آموزان پایهٔ هفتم، دچار بدفهمی‌های مشترکی بوده‌اند.

در جدول ۱۱، برخی از بدفهمی‌های رایج در این سؤال آورده شده است.

www.SID.ir

جدول۱۱. بدفهمی‌های رایج مربوط به سؤال چهارم

شماره	نتیجه بدفهمی	فراوانی دوم راهنمایی	فراوانی هفتم	تشریح بدفهمی	دسته بندی کلی بدفهمی‌ها
۱	۹، ۸، ۵، ۴، ۳، ۴-، ۲-، ۰	٪۲/۰۳	٪۵/۴۵	صفر به عنوان کوچکترین عدد تصور شده است و هرچند اعداد منفی کوچکتر از اعداد مثبت تصور شده است ولی در مرتب کردن اعداد منفی مانند اعداد مثبت عمل شده است.	دسته اول صفر را به عنوان کوچکترین عدد در نظر می‌گیرند و اعداد منفی را کوچکتر از اعداد مثبت تصور می‌کنند.
	۹، ۸، ۵، ۳، ۲-، ۴-، ۰	٪۰/۶۸	٪۳/۶۴	صفر کوچکتر از اعداد منفی در نظر گرفته شده است ولی در مرتب کردن اعداد منفی درست عمل شده است.	
۲	۴-، ۲-، ۹، ۸، ۵، ۴، ۳، ۲، ۰	٪۱/۳۵	٪۱/۸۲	صفر به عنوان کوچکترین عدد تصور شده است. اعداد منفی بزرگتر از اعداد مثبت در نظر گرفته شده است. ولی در مرتب کردن اعداد منفی درست اقدام نشده است.	دسته دوم صفر را به عنوان کوچکترین عدد تصور می‌کنند و اعداد منفی را بزرگتر از اعداد مثبت در نظر می‌گیرند.
	۲-، ۴-، ۹، ۸، ۵، ۴، ۳، ۲، ۰	٪۰/۴۵	-	صفر به عنوان کوچکترین عدد در نظر گرفته شده است ولی اعداد منفی بزرگتر از اعداد مثبت تصور شده است. همچنین در مرتب کردن اعداد منفی درست عمل نشده است.	
۳	۹، ۸، ۵، ۴، ۳، ۰، ۴-، ۲-	٪۷/۲۲	٪۱۴/۵۵	اعداد منفی کوچکتر از صفر در نظر گرفته شده است ولی در مرتب کردن اعداد منفی درست عمل نشده است.	دسته سوم اعداد منفی را کوچکتر از صفر و اعداد مثبت در نظر گرفته‌اند و در مرتب کردن اعداد منفی مانند اعداد مثبت عمل کرده‌اند .
۴	۹، ۸، ۵، ۴، ۴-، ۳، ۲-، ۰	٪۱/۸۱	٪۱/۸۲	همهٔ اعداد مثبت در نظر گرفته شده است و ۴- کوچکتر از ۴ در نظر گرفته شده است.	دسته چهارم همهٔ اعداد را مثبت در نظر گرفته‌اند.
	۹، ۸، ۵، ۴، ۳، ۲، ۰	٪۰/۹۰	٪۹/۰۹	همهٔ اعداد به صورت مثبت تصور شده است. همچنین علامت اعداد منفی اعمال نشده است.	
	۹، ۸، ۵، ۴-، ۴، ۳، ۲-، ۰	٪۱/۵۸	٪۱/۸۲	همهٔ اعداد مثبت در نظر گرفته شده است و ۴ کوچکتر از ۴- در نظر گرفته شده است.	

Archive of SID

www.SID.ir

با توجه به جدول ۱۱ مشاهده می‌شود که دانش‌آموزان در این سؤال دچار ۴ نوع بدفهمی شده‌اند، که هر کدام با دیگری متفاوت است. همان‌طور که جدول ۱۱ نشان می‌دهد، بدفهمی شماره ۳ در بین دانش‌آموزان رایج‌تر از بقیهٔ بدفهمی‌ها است. این نکته نشان می‌دهد که اکثر دانش‌آموزان نسبت به این موضوع آگاه هستند که اعداد منفی کوچکتر از اعداد مثبت و صفر هستند، ولی در مرتب کردن اعداد منفی مانند اعداد مثبت عمل می‌کنند.

سؤال چهارم

کدام یک از اعداد زیر از قرینه (۷-) بزرگتر است؟(راه حل خود را بنویسید)

الف) ۹- ب) ۵- ج) ۵+ د) ۹+

هدف از طرح سؤال چهارم این است تا ابتدا درک و تصور دانش‌آموزان از مفهوم قرینه یک عدد منفی مشخص شود و سپس از طریق مقایسهٔ آن با اعداد داده شده در گزینه‌ها، درک و تصور آن‌ها نسبت به اعداد علامت‌دار بررسی شود.

یافته‌های سؤال چهارم: نحوه و درصد پاسخگویی دانش‌آموزان به سؤال چهارم پرسشنامه در جدول ۱۲، خلاصه‌شده‌است

همان‌طور که در جدول ۱۲، مشاهده می‌شود، برخی از دانش‌آموزان توانسته‌اند قرینه ۷- را به‌درستی به دست آورند، ولی ۹- را به عنوان جواب انتخاب کرده‌اند. این دانش‌آموزان همان بدفهمی شماره ۲ در سؤال سوم را تکرار کرده‌اند، یعنی اعداد منفی را بزرگتر از اعداد مثبت در نظر گرفته‌اند.

سؤال پنجم

قرینه عدد [(۵-)-]- برابر است با : (با راه حل)

الف) $5+$ ب) $5-$ ج) $\frac{1}{5}$ د) $-\frac{1}{5}$

هدف از طرح سؤال پنجم این است تا میزان درک انش‌آموزان از مفهوم قرینه و دقت آن‌ها سنجیده شود. همچنین توانایی آن‌ها در استفاده از قانون ضرب علامت‌ها نیز بررسی شود. چون این سؤال با دو روش قابل حل است. یک روش برای حل این سؤال استفاده از قانون ضرب علامت‌ها است و روش دوم استفاده از قواعد مربوط به قرینه کردن یک عدد است.

یافته‌های سؤال پنجم: نحوه و درصد پاسخگویی دانش‌آموزان به این سؤال در جدول ۱۳ و ۱۴ خلاصه شده است.

در شکل۱، چند نمونه از پاسخ‌های دانش‌آموزان آورده شده است.

نمونه ۱: $-(-5) = -(+5) = (+5) = (-5)$

نمونه ۲: $-[-(-5)] = -(+5) = (-5)$

نمونه ۳: اگر از عدد به تعداد زوج قرینه بگیریم، حاصل خود آن می‌شود.

نمونه۴: قرینه‌ی قرینه‌ی هرعدد خود آن عدد است.

نمونه ۵: وقتی قرینه‌ها زوج باشد، عدد برابر با خود همان عدد است.

نمونه۶: هرگاه منفی‌ها زوج بود، عدد + و هرگاه منفی‌ها فرد بود عدد ما - می‌شود.

شکل ۱. نمونه‌هایی از پاسخ‌های دانش‌آموزان که برای انتخاب پاسخشان به سؤال پنجم بیان نموده‌اند.

www.SID.ir

جدول ۱۲. تعداد و درصد پاسخ‌های دانش‌آموزان پایهٔ دوم راهنمایی و دانش‌آموزان پایهٔ هفتم به سؤال چهارم

نوع پاسخ‌های ارائه شده		فراوانی دوم راهنمایی	درصد فراوانی دوم راهنمایی		فراوانی پایه هفتم	درصد فراوانی پایه هفتم	
پاسخ‌های درست	+۹	۳۸۱	۸۶		۴۴	۸۰	
پاسخ‌های نادرست	-۹	۱۶	۳/۶۲	۱۲	۵	۹/۰۹	۱۸/۱۷
	-۵	۲۴	۵/۴۳		۲	۳/۶۳	
	+۵	۱۳	۲/۹۵		۳	۵/۴۵	
عدم پاسخگویی		۹	۲		۱	۱/۸۳	
جمع کل		۴۴۳	۱۰۰		۵۵	۱۰۰	

جدول ۱۳. تعداد و درصد پاسخ‌های دانش‌آموزان پایهٔ دوم راهنمایی به سؤال پنجم

نوع پاسخ‌های ارائه شده		فراوانی	درصد فراوانی		تشریح پاسخ
پاسخ‌های درست	$+5$	۱۹۱	۴۳/۱		مفهوم قرینه را کاملاً درک کرده‌اند.
پاسخ‌های نادرست	-5	۲۲۴	۵۰/۵۶	۵۵/۵	دانش‌آموزان راه‌حل را درست انتخاب کرده‌اند، ولی چون صورت سؤال را با دقت درک نکرده‌اند، واژه قرینه در صورت سؤال را در نظر نگرفته‌اند.
	$-\frac{1}{5}$	۱۵	۳/۳۹		این دانش‌آموزان مفهوم قرینه را با معکوس اشتباه گرفته‌اند.
	$\frac{1}{5}$	۷	۱/۵۸		مفهوم قرینه را با معکوس اشتباه گرفته‌اند ولی قانون ضرب علامت‌ها را درست به‌کار برده‌اند.
عدم پاسخگویی		۶	۱/۴		
جمع کل		۴۴۳	۱۰۰		

جدول۱۴. تعداد و درصد پاسخ‌های دانش‌آموزان پایهٔ هفتم به سؤال پنجم

نوع پاسخ‌های ارائه شده		فراوانی	درصد فراوانی		تشریح پاسخ
پاسخ‌های درست	$+5$	۱۶	۲۹/۰۹		مفهوم قرینه را کاملا درک کرده‌اند.
پاسخ‌های نادرست	-5	۲۵	۴۵/۴۵	۶۵/۴۶	دانش‌آموزان راه‌حل را درست انتخاب کرده‌اند، ولی چون صورت سؤال را با دقت درک نکرده‌اند، واژه قرینه در صورت سؤال را در نظر نگرفته‌اند.
	$-\frac{1}{5}$	۶	۱۴/۵۶		این دانش‌آموزان مفهوم قرینه را با معکوس اشتباه گرفته‌اند.
	$\frac{1}{5}$	۴	۵/۴۵		مفهوم قرینه را با معکوس اشتباه گرفته‌اند ولی قانون ضرب علامت‌ها را درست به‌کار برده‌اند.
عدم پاسخگویی		۴	۵/۴۵		
جمع کل		۵۵	۱۰۰		

www.SID.ir

طور که مشاهده می‌شود همه راه‌حل‌های ذکر شده در شکل ۱ درست هستند هرچند فرایند نوشتن در برخی از نمونه‌ها اشتباه است. این نشان می‌دهد که دانش‌آموزان قادر به پیاده‌سازی دانسته‌های خود هستند ولی چون صورت سؤال را با دقت درک نکرده‌اند، جواب نهایی را اشتباه به‌دست آورده‌اند.

۵- پاسخ به سؤال تحقیق

دانش‌آموزان اعداد منفی را چگونه درک می‌کنند و در ارتباط با این اعداد با چه بدفهمی‌هایی روبرو هستند؟

بررسی پاسخ‌های دانش‌آموزان به سؤالات پرسشنامه نشان می‌دهد برخی از دانش‌آموزان علامت منفی را صرفاً به عنوان یک عملگر کاهشی و برخی دیگر علامت مثبت را صرفاً به عنوان یک عملگر افزایشی در نظر می‌گیرند. همچنین برخی از دانش‌آموزان تفاوت بین اندازه (مقدار مطلق) و ارزش مقداری(عددی) دو عدد علامت‌دار را درک نکرده‌اند و در جایی که منظور بیشترین مقدار از لحاظ ارزش بوده است، برخی از آن‌ها بیشترین مقدار از لحاظ اندازه را به دست آورده‌اند. علاوه بر این نتایج نشان می‌دهد که استفاده از یک الگوی عددی به درک عمیق‌تر دانش‌آموزان از اعداد منفی کمک می‌کند.

همچنین یافته‌های تحقیق نشان می‌دهد که بسیاری از دانش‌آموزان نمونهٔ مورد بررسی با بدفهمی‌های متفاوتی در درک مفهوم عدد منفی و مقایسه اعداد علامت‌دار روبرو هستند. عمده دانش‌آموزان، اعداد علامت‌دار را به چهار دسته کلی تقسیم می‌کنند:

۱- دسته اول صفر را به عنوان کوچکترین عدد در نظر می‌گیرند و اعداد منفی را کوچکتر از اعداد مثبت می‌دانند ولی قادر به مرتب کردن اعداد منفی نیستند.

۲- دسته دوم صفر را به عنوان کوچکترین عدد تصور می‌کنند و اعداد منفی را بزرگتر از مثبت‌ها در نظر می‌گیرند.

۳- دسته سوم اعداد منفی را کوچکتر از صفر و اعداد مثبت در نظر گرفته ولی قادر به مرتب کردن اعداد منفی نیستند.

۴- دسته چهارم همهٔ اعداد را مثبت در نظر می‌گیرند. به نظر می‌رسد این دانش‌آموزان درکی از مفهوم اعداد منفی ندارند.

بر اساس یافته‌های مربوط به سؤالات پرسشنامه این نتیجه نیز حاصل می‌شود که اغلب دانش‌آموزان پایهٔ هفتم علامت مثبت را صرفاً به عنوان یک عملگر افزایشی در نظر می‌گیرند. در صورتی که درصد بیشتری از دانش‌آموزان پایهٔ دوم راهنمایی درک درستی از مفهوم علامت منفی و علامت مثبت دارند؛ اما در مرتب‌سازی اعداد علامت‌دار و صفر دانش‌آموزان پایهٔ دوم راهنمایی و دانش‌آموزان پایهٔ هفتم دچار بدفهمی‌های مشترکی هستند. همچنین رایج‌ترین بدفهمی در بین هر دو گروه دانش‌آموزان مشترک است. به عبارت دیگر، هر دو گروه نسبت به این موضوع آگاهی دارند که اعداد منفی از صفر و اعداد مثبت کوچکترند اما در مرتب‌سازی اعداد منفی دچار بدفهمی هستند.

۶- بحث و نتیجه‌گیری

بدفهمی نتیجهٔ تلاش دانش‌آموزان برای درک یک مفهوم است. بنابراین هر فردی در هر سن و سطح آموزش دارای بدفهمی‌هایی است که شایع و فراگیر هستند. بدفهمی‌ها برای یاددهی و یادگیری بسیار حائز اهمیت هستند زیرا بخشی از ساختار مفهومی دانش‌آموزان را تشکیل می‌دهند و جزئی از فرایند ساختن مفاهیم جدید محسوب می‌شوند. در نتیجه، این اشتباهات روی یادگیری مطالب جدید تأثیر منفی خواهند گذاشت. در واقع آن‌ها موانع جدی برای ساخت مفاهیم تخصصی هستند و ممکن است یادگیری و درک مفاهیم جدید را مختل کنند. از سوی دیگر، بدفهمی‌ها بسیار قوی و ماندگار هستند و ساختار محکمی دارند که به‌سادگی اصلاح نمی‌شوند. بنابراین به جای تمرکز روی تصحیح بدفهمی‌های موجود، بهتر است معلمان از شکل‌گیری آن‌ها جلوگیری نمایند. اولین گام برای جلوگیری از ایجاد بدفهمی‌ها، شناخت آن‌هاست.

Archive of SID
www.SID.ir

در این پژوهش درک و فهم دانش‌آموزان از اعداد منفی و بدفهمی‌های آنان، بررسی شد. نتایج تحقیق نشان داد که برخی از دانش‌آموزان نسبت به کاربرد علامت منفی "-" و علامت مثبت "+" دچار بدفهمی شده‌اند، به این معنی که تصور آن‌ها نسبت به علامت منفی این است که همیشه سبب کاهش مقدار جواب می‌شود. همچنین برخی از آن‌ها تصور می‌کنند که علامت مثبت همیشه سبب افزایش مقدار جواب می‌شود.

در مورد مقایسه اعداد علامت‌دار، چهار نوع بدفهمی در بین دانش‌آموزان مشترک بود. بیشترین بدفهمی مربوط به دانش‌آموزانی بود که اعداد منفی را از صفر و اعداد مثبت کوچکتر می‌دانند ولی در مرتب کردن اعداد منفی دچار مشکل هستند. برخی از بدفهمی‌های ذکر شده (بدفهمی ۱، ۳ و ۴) در تحقیق حاضر با نتایج پژوهش بوفردینگ(۲۰۱۰)، که در بخش نظری تحقیق ذکر شد، مطابقت دارد. بدفهمی ۲ در تحقیق حاضر مشاهده شده اما در تحقیق بوفردینگ این بدفهمی در پاسخ دانش‌آموزان مشاهده نشده است. در مطالعهٔ بوفردینگ دانش‌آموزان اعداد علامت‌دار را به سه دسته تقسیم کرده‌اند:

۱- دسته اول همه اعداد را مثبت در نظر گرفته‌اند.

۲- دسته دوم منفی‌ها را مساوی با صفر در نظر گرفته‌اند.

۳- دسته سوم منفی‌ها را کوچکتر از صفر و مثبت‌ها در نظر گرفته‌اند.

این هم‌سویی نشان می‌دهد که بیشتر دانش‌آموزان شرکت‌کننده در تحقیق بوفردینگ(۲۰۱۰) نیز در درک مفهوم عدد منفی مشکل دارند. همچنین نتایج این پژوهش با نتایج تحقیق رزنیک (۱۹۸۹) و شوارتز و همکاران (۱۹۹۳) نیز مطابقت دارد.

به نظر می‌رسد تأکید بر آموزش رویه‌ها و الگوریتم‌ها در تدریس باعث شده است که اکثر دانش‌آموزان در سطوح مختلف تحصیلی، در درک مفهوم عدد منفی دچار بدفهمی شوند و قادر به پیاده‌سازی دانسته‌های خود در حل مسائل نباشند. لذا آموزش و پرورش و برنامه‌ریزان ریاضی کشور باید در تنظیم و برنامه‌ریزی محتوای کتب درسی و برنامه‌های آموزشی به‌گونه‌ای عمل کنند تا شرایط مناسب برای تدریس، ایجاد انگیزه، فهم مطالب و ایجاد ارتباط بین مفاهیم ریاضی و دنیای واقعی ایجاد شود. با توجه به تحقیقات بسیار اندکی که در کشورمان دربارهٔ عدد منفی و بررسی درک دانش‌آموزان از این اعداد انجام شده است، لزوم پژوهش‌های بیشتر در این زمینه به خوبی حس می‌شود. موضوعاتی مانند اثر آموزش اولیهٔ اعداد منفی در جلوگیری از بدفهمی این اعداد، نقش بدفهمی‌ها بر یادگیری مفهوم عدد منفی، بررسی مؤثرترین روش برای تدریس مفهوم عدد منفی، بررسی مبحث اعداد صحیح در کتاب‌های درسی و بررسی توانایی معلمان در تدریس مفهوم عدد منفی می‌توانند در پژوهش‌های بعدی مورد مطالعه قرار گیرند.

پی نوشت

[1] Negative Number
[2] Kilhamn
[3] Cathcart
[4] Pele
[5] Beery
[6] Bhascara
[7] Lemonidis
[8] Polytidis
[9] Epistemological
[10] Metaphors
[11] Misconception
[12] Mistakes
[13] Allen
[14] Smith
[15] Binary function
[16] Unary function
[17] symmetric
[18] Opposite
[19] White Head
[20] Pseudo Equation
[21] Understanding
[22] Magnitudes
[23] Quantities
[24] Matt
[25] Rowena
[26] Resnick
[27] Behrend
[28] Mohs

[۲۹] - تحقیق در دو سال تحصیلی ۹۲-۹۱ و ۹۳-۹۲ انجام شده است، که در سال تحصیلی ۹۳-۹۲ در سیستم آموزشی کشور عنوان پایهٔ دوم راهنمایی به پایهٔ هفتم تغییر کرده است.

[۳۰]- شهرستان درمیان از توابع استان خراسان جنوبی است.

Archive of SID
www.SID.ir

مراجع

[1] Kilhamn, C., *Making Sense of Negative Numbers*, Doctoral Thesis, University of Gothenburg, (2011), Available online at: https://gupea.ub.gu.se/handle/2077/24151 (Accessed 10 August 2012), pp.1-288.

[2] Cathcart, W. G., Pothier, Y. M., Vance, J. H., and Bezuk, N. S., *Learning mathematics in elementary and middle schools*, (Third Edition.), Upper Saddle River, NJ: Prentice, (2003).

[3] Ball, D. L., With an eye on the mathematical horizon: Dilemmas of teaching elementary mathematics., *Elementary School Journal*, Vol. 93, No. 4, (1993), pp. 373-397.

[4] Davidson, P. M., *Precursors of non-positive integer concepts*, Retrieved from ERIC database, (ED356146), (1992).

[5] Gullick, M. M., Wolford, G., and Temple, E., *Understanding less than nothing: Neural distance effects for negative numbers*, available at http://www.science direct.com. *NeuroImage*, Vol. 62, No.1, (2012), pp. 542-554.

[6] Schliemann, A. D., Carraher, D. W., Brizuela, B. M., Earnest, D., Goodrow, A., Lara-Roth. S. and Peled, I., Algebra in elementary school. In N. Pateman , B. Dougherty, & J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 2003 Joint Meeting of PME and PME-NA*, CRDG, College of Education, University of Hawai'i: Honolulu , HI, Vol. 4, (2003), pp. 127-134.

[7] Bofferding, L., Negative integer understanding: Characterizing first graders' mental models, *Journal for Research in Mathematics Education,* Vol. 45, No. 2, (2014), pp. 194-245.

[8] Beery, J., Cochell, G., Dolezal, C., Sauk, A., and Shuey, L, Negative numbers. In V. Katz, J. & K. D. Michalowics (Eds.), *Historical Modules Project* (CD-ROM). Mathematical Association of America, (2004).

[9] Carraher, D. W., Schliemann, A. D., Brizuela, B. M., & Ernest, D., Arithmetic and algebra in early mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 37, No. 2, (2006), pp. 87-115.

[10] Bishop, J. P., Lamb, L. L. C., Philipp. R. A., Schappelle, B. P., and Whitacre, I., *An investigation of negative-number reasoning: The case of Violet*. Presentation at the meeting of Annual Meeting of the American Educational Research Association, New Orleans, LA. (National), (2011).

[11] Lemonidis, Ch., and Polytidis, D., *The implementation of an electronic model in teaching negative numbers and their operations*, 13 th International Conference ICT in the education of the Balkan countries Varna, June 17 - 19, (2010) Balkan Society for Pedagogy and Education.

[12] Pourazima, Z., *A Study on Impact of 5th Grade Teacher Training on their Knowledge of Student's Decimal Misconceptions*, A thesis submitted to the Graduate Studies Office in partial fulfilment of the requirements for the degree of Master in Mathematics Education, Shahid Rajaee Teacher Training University ,Faculty of Science, January (2013), pp. 1-96.

[13] Bakhshalizade, S. H., *Identify common Misconceptions of fourth grade students in mathematics content*, Research and Education Organization, (2014), PP. 1- 381.

[14] Allen, G. D., *Misconceptions in mathematics, Department of Mathematics* ,Texas A & M University, College Station, (2007).

[15] Smith, J. P, diSessa, A., A. and Roschelle, J., *Misconceptions reconceived:A constructivist analysis of knowledge in transition*, The Journal of the Learning Sciences , Vol. 3, No. 2, 1993-(1994), pp. 115-163.

[16] Erdogan, M. Ö., Misconceptions in radicals in high school mathematics, Procedia Social and Behavioral Sciences Vol. 15, (2011), pp. 120-127.

[17] Swan, M., Dealing with misconceptions in mathematics. in Gates, ed**, (**2001), pp. 65-147.

[18] Donald, G. A., Student Thinking Lesson 1. Misconceptions in mathematics Texas A&M University College Station, TX 77843-3368 Department of Mathematics, (2007).

[19] Vlassis, J., Making sense of the minus sign or becoming flexible in `negativity´. Learning and Instruction, Vol. 14, No. 5, (2004), pp. 469-484.

[20] Vlassis, J., The balance model: Hindrance or support for the solving

Archive of SID
www.SID.ir

natural number domain to the integers in the transition from arithmetic to algebra, Educational Studies in Mathematics, Kluwer Academic publishers, Printed in the Netherlands, Vol. 49, (2002), pp. 171-192.

[29] Gallardo, A., & Hernández, A., Zero and negativity on the number line, In J. H .Woo, H. C. Lew, K. S. Park & D. Y. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st inter-national conference of the international group for the psychology of mathematics education* , Seoul, South Korea: PME, Vol. 1, (2007), pp. 220.

[30] Stacey, K., Helme, S., & Steinle, V., *Confusions between decimals, fractions and negative numbers: A consequence of the mirror as a conceptual metaphor in three different ways***,** In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), The 25thinternational conference for the psychology of mathematics education, Utrecht, the Netherlands: PME , Vol. 4, (2001), pp. 217-224.

[31] Nazri, M. J., *Investigating the Root causes of 1th Grade Secondary Students of Negative Numbers*, A thesis submitted to the Graduate Studies Office in partial fulfilment of the requirements for the degree of Master in Mathematics Education, Shahid Beheshti University ,Faculty of Science, (2013), pp. 1-96.

[32] Rashedi, F., *A Study on negative numbers Conception of 7th mistakes grade students and their*, A thesis submitted to the Graduate Studies Office in partial fulfilment of the requirements for the degree of Master in Mathematics Education, Shahid Rajaee Teacher Training University ,Faculty of Science, sep. (2013), pp 1-150.

[33] Iranmanesh, A., Naini, K., Shavarani, A., Davoodi, KH., Reyhani, E., Rastegar, A., Eslahpazir, B., Bijanzadeh, M. H., Alamiyan, V., *The junior high school math courses*, Office of Planning and writing textbooks, **(**2013).

[34] Farzan,M., Bahemat Shirvaneh, S., Dibayi, M. T., Farhoodi Moghadam, P., *Second Guidance Math*, Office of Planning and writing textbooks**,** **(**2005).

of linear equations with one unknown. *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 49, No. 3, (2002), pp. 341-359.

[21] Lamb, L. L., Bishop, J. P., Phillip, R. A., Schappelle, B. P., Whitacre, I., & Lewis, M. L., eveloping symbol sense for the minus sign, *Mathematics Teaching in the Middle School* Retrieved from http://www.jstor.org/stable/10.5951/mathteacmiddscho.18.1.0005, Vol. 18, No. 1, (2012), pp 5-9.

[22] Vlassis, J., *The role of mathematical symbols in the development of number conceptualization*, The case of the minus sign, *Philosophical Psychology,* Vol. 21, No. 4, (2008), pp. 555-570.

[23] Vlassis, J., What do students say about the role of the minus sign inpolynomials **?**In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou & H. Sakonidis (Eds.), Proceedings of the 33rdconference of the international group for the psychology of mathematics education, Thessaloniki, Greece: PME, Vol. 5, (2009), pp. 289-296

[24] Bofferding , L., Grappling with negative numbers: *Uncertainty is progress*, Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, Denver, CO, April/May (2010), Journal of Research in Mathematics Education, pp.1 -12.

[25] Peled, I., Mukhopadhyay, S., and Resnick, L. B., *Formal and informal sources of mental models for negative numbers*, In G. Vergnaud, J. Rogalski & M. Artique (Eds.), The 13th International Conference for the Psychology of Mathematics Education ,Paris, France: PME, Vol. 3, (1989), pp. 108-112.

[26] Schwarz, B. B., Kohn, A. S., and Resnick, L. B., Positives about negatives: A case study of an intermediate model for signed numbers, *The Journal of the Learning Sciences*, doi:10.1207/s15327809 jls 0301_2, Vol. 3, No. 1, (1998), pp. 37-92.

[27] Behrend, J. L., and Mohs, L. C., From simple questions to powerful connections: A two-year conversation about negative numbers. *Teaching Children Mathematics* , Vol. 12, No. 5, (2006), pp. 260-264.

[28] Gallardo, A., *The extension of the*

Archive of SID

www.SID.ir