



ORIGINAL RESEARCH PAPER

The ability of 11th grade students to evaluate mathematical reasoning

N.Yaftian*, M. R. Ansari

Department of mathematics, Faculty of Sciences, Shahid Rajaee Teacher Training University, Tehran, Iran

ABSTRACT

Received: 4 April 2020
Reviewed: 25 April 2020
Revised: 17 July 2020
Accepted: 22 July 2020

KEYWORDS:

Mathematics Education
Reasoning
Proof
11th Grade Students

* Corresponding author

✉ yaftian@sru.ac.ir

☎ (+9821) 22970005

Background and Objectives: Understanding mathematical concepts is impossible without emphasizing reasoning and taking on instrumental and procedural aspects. This can be more easily recreated if mathematics is learned as a reasoned science instead of a set of procedures. On the other hand, the goal of any educational system is to prepare students for social life so that they can perform their daily duties well as a citizen. In this regard, they must be able to convince themselves and others with the reasons they present. However, students face widespread difficulties in understanding reasoning and proof in mathematics as well as in assessing their correctness. Therefore, it is important for students to evaluate the correctness and validity of mathematical reasoning and to use these reasoning to convince themselves and others. This certainly deserves further attention and research. The purpose of this study was to study the ability of 11th grade students to evaluate mathematical reasoning to identify the strengths and weaknesses of students.

Methods: The present study was conducted by survey method. The statistical population consisted of the 11th grade students in Zanjan and the sample includes 393 boy and girl students selected by random cluster sampling from the gifted, exemplary public, Shahed and public schools and the sample was selected to include all levels of students. The research instrument is a researcher-made test consisting of 3 problems familiar, completely familiar and unfamiliar situations. Students were provided with some responses for each of these three situations to determine which responses can be selected to convince themselves, which ones can be chosen to convince friends, and finally which ones can be selected to get the best score. Descriptive and inferential statistics (Chi-square test) were used for data analysis.

Findings: The findings indicated that students were not capable of evaluating mathematical reasoning and in more than 60% of cases they were particularly interested in using formal methods. Selecting the responses to persuade themselves and friends in more unfamiliar situations indicated that students paid less attention to accepted criteria for approving a logical reasoning. Students' performance to get the best score from the teacher indicated that their attention to correct and incorrect symbolic responses has increased, the form of presentation seems to be more important to them. Although they are not able to distinguish formal proof content from the false one, they have a better understanding for distinguishing invalid reasoning in the familiar situations. The results showed that in some cases gender influenced students' performance.

Conclusion: It can be said that the current teaching method in mathematics has not had any significant results in the area of reasoning and proof. Therefore, it is necessary to review the teaching methods and the content of the textbooks. The results of this research can be used by education policy makers and textbook authors to pay special attention to the situation of reasoning in mathematics textbooks by being aware of students' views on mathematical reasoning, and perhaps by changing the way textbooks are written, a fundamental step to solve difficulties. Also, by being aware of students' performance in the field of reasoning and proof, math teachers can identify the strengths and weaknesses of their students in the process of math proofs and identify their misconceptions in this field.



NUMBER OF REFERENCES

38



NUMBER OF FIGURES

1



NUMBER OF TABLES

8

مقاله پژوهشی

توانایی دانش‌آموزان پایه یازدهم در ارزیابی استدلال‌های ریاضی

نرگس یافتیان*، محمدرضا انصاری

گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، تهران، ایران

چکیده

پیشینه و اهداف: درک مفاهیم ریاضی بدون تأکید بر استدلال غیرممکن است و جنبه ابزاری و رویه‌ای پیدا می‌کند و چنانچه ریاضیات به جای مجموعه‌ای از رویه‌ها، به عنوان یک علم مستدل یاد گرفته شود، راحتتر می‌تواند بازآفرینی شود. از طرف دیگر، هدف هر سیستم آموزشی آماده کردن دانش‌آموزان برای زندگی اجتماعی است؛ به طوری که آنها قادر باشند به وظایف روزمره خود به عنوان یک شهروند به خوبی عمل کنند. در این راستا آنها باید بتوانند با استدلال‌هایی که ارائه می‌کنند، خود و دیگران را قانع نمایند. اما، دانش‌آموزان در ارتباط با درک و فهم از استدلال و اثبات در ریاضی و همچنین در ارزیابی درستی آنها با مشکلات گسترده‌ای روبرو هستند. بنابر این، بررسی ارزیابی دانش‌آموزان از درستی و اعتبار استدلال‌های ریاضی و استفاده از این استدلال‌ها در متقاعد کردن خود و دیگران از اهمیت شایانی برخوردار است و شایسته توجه و پژوهش‌های بیشتر می‌باشد. هدف پژوهش حاضر، بررسی توانایی دانش‌آموزان پایه یازدهم در ارزیابی استدلال‌های ریاضی است تا نقاط قوت و ضعف دانش‌آموزان مشخص گردد.

روش‌ها: این پژوهش به روش زمینه‌یابی انجام گرفته است. جامعه آماری، دانش‌آموزان پایه یازدهم شهر زنجان و نمونه، ۳۹۳ نفر از دانش‌آموزان پسر و دختر به روش تصادفی خوشه‌ای از مدارس تیزهوشان، نمونه، شاهد و دولتی می‌باشند و انتخاب نمونه به گونه‌ای بود که تمامی سطح‌های دانش‌آموزی را شامل گردد. ابزار اندازه‌گیری، یک آزمون محقق‌ساخته است که شامل ۳ مسأله در موقعیت‌های آشنا، کاملاً آشنا و ناآشنا بود که برای هر یک از این سه موقعیت، پاسخ‌هایی به دانش‌آموزان ارائه شد تا در بین آنها مشخص کنند که کدام پاسخ را برای متقاعد کردن خود و کدام را برای متقاعد کردن دوستان و بالاخره کدام را برای دریافت بهترین نمره از معلم انتخاب می‌کنند. برای تجزیه و تحلیل داده‌ها، روش‌های آمار توصیفی و آمار استنباطی (آزمون خی دو) مورد استفاده قرار گرفت.

یافته‌ها: نتایج بیانگر آن بود که دانش‌آموزان توانایی ارزیابی استدلال‌های ریاضی را ندارند و در بیش از ۶۰ درصد موارد علاقه خاصی به استفاده از روش‌های صوری دارند. از پاسخ‌های انتخابی دانش‌آموزان برای قانع ساختن خود و دوستان می‌توان نتیجه گرفت هر چقدر موقعیت ناآشنا تر باشد؛ دانش‌آموزان به ملاک‌های مورد قبول برای پذیرش یک استدلال منطقی کمتر توجه می‌کنند. عملکرد دانش‌آموزان برای دریافت نمره کامل از معلم، بیانگر توجه آنها به پاسخ‌های نمادین درست و نادرست افزایش یافته و به نظر می‌رسد شکل ارائه برای آنها مهم‌تر است و آنها توانایی تشخیص محتوای اثبات صوری درست از نادرست را ندارند؛ ولی در تشخیص استدلال‌های نامعتبر در موقعیت آشنا درک بهتری دارند. نتایج نشان می‌دهد جنسیت در برخی موارد روی عملکرد دانش‌آموزان تأثیر می‌گذارد.

نتیجه‌گیری: می‌توان گفت که شیوه آموزش فعلی در ریاضیات نتایج قابل توجهی در حیطه استدلال و اثبات به همراه نداشته است و لازم است شیوه‌های آموزش و محتوای کتب درسی بازنگری گردد. نتایج این تحقیق می‌تواند مورد استفاده سیاست‌گذاران تعلیم و تربیت و مولفان کتب درسی قرار گیرد تا با آگاهی از دیدگاه دانش‌آموزان به استدلال‌های ریاضی به جایگاه آن در کتاب‌های ریاضی توجه ویژه‌ای نمایند و شاید با تغییر نحوه تالیف کتب درسی گامی اساسی برای رفع مشکلات بردارند. همچنین معلمان ریاضی با آگاهی از عملکرد دانش‌آموزان در زمینه استدلال و اثبات، می‌توانند به نقاط ضعف و قوت دانش‌آموزان خود در فرایند اثبات‌های ریاضی پی‌ببرند و بدفهمی آن‌ها در این زمینه شناسایی کنند.

مقدمه

می‌توان گفت که موقعیت و اهمیت استدلال و اثبات را نمی‌توان در حوزه ریاضیات انکار کرد و برای درک عمیق ریاضی، درک اثبات ضروری است. استیلیانو (Stilianou) [۲] بیان می‌کند اگر حل مسأله «قلب ریاضیات» باشد؛ پس اثبات «روح» آن است. نوتو (Noto) [۳] در مورد نقش اثبات در ریاضیات، به مواردی اشاره دارد که عبارتند از: تأیید درستی یک گزاره، توضیح این‌که چرا یک گزاره می‌تواند درست باشد،

نیاز به درک ریاضیات و کاربرد آن در زندگی روزمره همواره رو به افزایش می‌باشد. کسی که در زندگی خود ریاضیات را درک می‌کند و آن را به کار می‌بندد؛ فرصتی برای شکل دادن بهتر به آینده خود خواهد داشت. شایستگی در ریاضی سبب باز شدن درب‌ها رو به آینده‌ای روشن می‌گردد و به مهارت تفکر و استدلال در توانایی ریاضی سفارش ویژه‌ای شده است [۱]. استدلال و اثبات، نقش مهمی در ریاضیات دارد. به جرأت

ایده‌های موجود در اثبات‌ها است که برای حل مسائلی مورد استفاده قرار می‌گیرند که با آنها روبرو می‌شویم [۱۳]. معلمان و اساتید ریاضی انتظار دارند دانش‌آموزان و دانشجویان اثبات قضایا را بفهمند، ایده‌های موجود را درک کرده آنها را یاد بگیرند و به کار ببرند [۱۴]. از دیگر اهداف اثبات می‌توان به تعمیم اشاره نمود. از نظر همی (Hemmi) [۱۵] اثبات به عنوان فرایند ایجاد گزاره‌های تعمیم یافته، قوانین حدس‌ها، تعاریف و طبقه‌بندی آنها بر اساس یک الگو تعریف می‌شود. همچنین اثبات می‌تواند در انتقال روش‌های جدید در حین تدریس و آموزش برخی از روش‌ها و استراتژی‌های ریاضی مورد استفاده قرار گیرد. از دیگر اهداف و کارکردهای استدلال و اثبات می‌توان به روشن‌سازی، سازمان‌دهی، کشف، گفتمان و حل‌مسأله اشاره کرد [۵، ۹، ۱۰، ۱۲، ۱۶، ۱۷].

اهمیت استدلال و اثبات در کلاس‌های درسی ریاضی

مطمئناً هدف هر سیستم آموزشی آماده کردن دانش‌آموزان برای زندگی اجتماعی است؛ به طوری که آنها قادر باشند به وظایف روزمره خود به عنوان یک شهروند به خوبی عمل کنند. در این راستا آنها باید بتوانند با استدلال‌هایی که ارائه می‌کنند دیگران را قانع نمایند. برخی از آموزشگران ریاضی بر این باورند که اثبات قلب ریاضی است و تأکید کرده‌اند که فرآیند اثبات کردن در تجارب ریاضی دانش‌آموزان باید یکی از اهداف اصلی آموزشگران ریاضی در هر یک از مقاطع تحصیلی باشد [۱۸، ۱۹]. شورای ملی معلمان ریاضی [۶] بر این تأکید دارد که استدلال و اثبات، فعالیت ویژه‌ای نیست که در زمان‌های خاص یا موضوعات خاص در برنامه درسی ریاضی اختصاص یافته باشد. صرف نظر از اینکه موضوع مورد مطالعه چیست؛ باید به عنوان یک بخش طبیعی و مستمر از بحث‌های کلاس درس باشد و توجه ویژه‌ای نیز به استدلال و اثبات داشته و معتقدند که استدلال ریاضی‌گونه، یک عادت فکری است و همانند تمام عادات باید از طریق استفاده و به‌کارگیری مستمر آن در زمینه‌های مختلف، رشد و گسترش یابد. همچنین این شورا بخشی از استانداردهای ریاضیات مدرسه‌ای را تحت عنوان استدلال و اثبات مطرح کرده‌اند و در آن خواسته شده است که برنامه‌های تدریس و آموزش از دوره پیش‌دستانی تا پایان پایه دوازدهم باید دانش‌آموزان را قادر سازند تا:

- استدلال و اثبات را به عنوان جنبه‌های اساسی در ریاضیات بشناسند؛
- حدسیه سازی کرده و بتوانند این حدسیه‌ها را مورد بررسی قرار دهند؛
- ادعاها و اثبات‌های ریاضی را تکمیل و سپس ارزیابی کنند؛
- روش‌های مختلف استدلال و اثبات را فرا گرفته و به کار گیرند.
بنابراین، بررسی درک و فهم دانش‌آموزان از اثبات و استدلال از اهمیت ویژه‌ای برخوردار می‌باشد.

بال و باس (Ball & Bass) [۲۰] در تحقیقات خود به اهمیت استدلال و اثبات در ریاضیات مدرسه‌ای اشاره می‌کنند. آنها نشان دادند که درک مفاهیم ریاضی بدون تأکید بر استدلال غیرممکن است و جنبه ابزاری و

ایجاد گفتمان در ریاضی، خلق نظریه‌های جدید در ریاضی و ساخت گزاره‌های نظام‌مند در یک سیستم اصل موضوعی. او معتقد است به سه دلیل اصلی دانش‌آموزان باید توانایی اثبات خود را بهبود بخشند. اول اینکه وجود اثبات هم برای یادگیری و هم برای کشف ریاضیات حیاتی است. دوم، توانایی دانش‌آموزان در اثبات، سبب می‌شود آنها مهارت‌های ریاضی خود را به طور گسترده‌تری بهبود بخشند. سوم، عدم یادگیری عمیق ریاضی سبب بروز مشکلاتی در توانایی دانش‌آموزان و دانشجویان در انجام اثبات ریاضی در سطوح پیشرفته می‌گردد؛ بنابراین یادگیری اثبات‌های ریاضی در آموزش‌های قبلی آنها از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است.

براساس ادبیات تحقیق، تعاریف متفاوتی برای استدلال و اثبات وجود دارد. برودی (Brodie) (نقل شده در [۴]) استدلال کردن را شامل فرایند تفکر، نتیجه‌گیری و ارتباطات بین تجربه‌ها می‌داند و دانشی است که فرد برای توضیح آنچه که می‌بیند، مورد استفاده قرار می‌دهد. برای اثبات نیز تعاریف متفاوتی بیان شده است؛ مثلاً وارجیس (Varghese) [۵] اثبات را «برهانی برای بیان درستی چیزی» مطرح می‌کند. شورای ملی معلمان ریاضی [۶] نیز اثبات را روش و شیوه ارائه صوری و رسمی یک استدلال یا توجیه می‌داند. از دیدگاه معرفت‌شناختی، اثبات شامل فکر کردن در مورد شرایط جدید، تمرکز بر جنبه‌های قابل توجه، استفاده از دانش قبلی برای قرار دادن ایده‌های نو به شیوه‌های جدید، در نظر گرفتن روابط، حدسیه‌سازی، تعریف‌ها در صورت لزوم و ایجاد یک استدلال معتبر می‌باشد [۷]. برخی از ریاضیدانان و برنامه‌ریزان درسی، استدلال ریاضی را با اثبات برابر دانسته‌اند؛ درحالی‌که برخی دیگر معتقدند اثبات، شکلی از استدلال و توجیه است [۸]. هارل و ساوور (Harel & Sowder) [۹] در پاسخ به این سؤال که ماهیت اثبات ریاضی چیست، بیان می‌کنند که اثبات یک فعالیت پیچیده ریاضی است و بررسی ماهیت آن به عوامل زیادی از جمله عوامل شناختی، ریاضی، تاریخی، معرفت‌شناسی و اجتماعی بستگی دارد. استایلیانیدز (Stylianides) [۱۰] فرآیند اثبات در کلاس درس ریاضی را بدین‌گونه تعریف می‌کند که اثبات یک استدلال ریاضی متشکل از دنباله‌ای منطقی و به هم پیوسته از گزاره‌ها است که یک ادعای ریاضی را تأیید یا رد می‌کند.

پژوهشگران ریاضی معتقدند که استدلال و اثبات تنها جهت تأیید درستی یا نادرستی یک گزاره ریاضی یا یک ادعا به کمک قضایا و قواعد منطقی نیست و اهداف و کارکردهایی مختلفی را برای آن بیان کرده‌اند. یکی از اهداف مهم استدلال و اثبات، ایجاد استقلال فکری است. در این فرآیند ابتدا دانش‌آموز در یک موضوع، حدسی را مطرح می‌کند؛ سپس به کمک روش‌های مختلف استدلال، حدس خود را تأیید یا رد می‌کند. این فرآیند سبب ایجاد استقلال فکری در وی می‌گردد [۱۱]. به گفته کوهن (Kuhn) (نقل شده در [۱۲]) اثبات شرایطی را فراهم می‌کند تا فراگیران مهارت‌های استدلال خود را توسعه دهند و فعالیت‌هایی را انجام دهند که شخص را به تعادل فکری می‌رساند. از دلایل اهمیت اثبات

- دانش‌آموزان قادر به درک و استفاده از زبان و علائم ریاضی نیستند.
- دانش‌آموزان نمی‌دانند که چگونه می‌توانند اثبات را شروع کنند.
- دی وانس‌پرونسن (DeeVanspronsen) [۲۲] نیز بر اساس نتایج تحقیقات انجام شده، مشکلات دانش‌آموزان در رویارویی با اثبات را به دلایل متعددی عنوان می‌کند:
 - فقدان دانش محتوایی
 - عدم توانایی به‌کارگیری دانش محتوایی
 - تمرکز روی رویه‌ها به جای مفاهیم
 - فقدان دانش راهبردی
 - عدم درک درست از صحت اعتبار یک نتیجه اثبات شده
- بیکر و کمپبل (Baker & Campbell) [۲۶] معتقدند که دانش‌آموزان در درک روند ساخت اثبات‌ها و دقت در نوشتن ریاضیات مقاومت می‌کنند. آنها همچنین دریافتند که برخی از بدفهمی‌های دانش‌آموزان در مورد اثبات، ریشه در استفاده از منطق دارد. آنها مشاهدات خود را به شرح زیر بیان کردند:
 - دانش‌آموزان در استفاده صحیح از استدلال منطقی دچار مشکل هستند.
 - اغلب دانش‌آموزان قبل از ارزیابی کامل صورت مسأله و پیامدهای آن، سعی در نوشتن اثبات دارند.
 - دانش‌آموزان در درک ظرافت و دقت زبان ریاضی و استفاده از آن راحت نیستند.
 - بسیاری از دانش‌آموزان از تعاریف ریاضی استفاده نمی‌کنند. همچنین آنها نمی‌توانند تفاوت بین زبان روزمره و زبان ریاضی را درک کنند.
 - ساری (Sari) [۲۴] نیز مشکلات اصلی و علل احتمالی مشکلات پیش‌روی اثبات را به نقل از برخی پژوهشگران به صورت زیر بیان می‌کند:
 - عدم درک نیاز به اثبات و اهمیت آموزش آن.
 - عدم توانایی در انجام اثبات.
 - عدم درک و استفاده از تعاریف ریاضی.
 - آگاهی ناقص از قضایا و مفاهیم ریاضی.
 - عدم تسلط لازم در استفاده از قضایای ریاضی و مفاهیم.
 - عدم آگاهی از قوانین منطقی و سورها.
 - عدم توانایی در دنبال کردن زنجیره‌ای از استدلال‌ها و فقدان بلوغ منطقی.
 - نداشتن دانش کافی در مورد روش‌های اثبات و عدم توانایی در استفاده از آنها.
 - عدم درک تفاوت بین زبان روزمره و زبان ریاضی و مواجهه با بدفهمی‌ها در استفاده از زبان ریاضی.
 - عدم توانایی در بیان تفکر خود و در نوشتن اثبات‌ها.
 - مدل‌ها و چارچوب‌های مختلفی برای سنجش و ارزیابی فرآیند اثبات در سطوح آموزشی وجود دارد. برای مثال، ریحانی و همکاران [۲۷] بر

رویه‌ای پیدا می‌کند. علاوه بر این، آنها به این نتیجه دست یافتند که چنانچه ریاضیات به جای مجموعه‌ای از رویه‌ها، به عنوان یک علم مستدل یاد گرفته شود، به راحتی می‌تواند بازآفرینی شود، حتی در زمانی که حافظه فرد، رویه‌ها را فراموش کند. آناپا و سامکار (Anapa & Samkar) [۲۱] نیز در زمینه اثبات و استدلال طی مطالعاتی به این نتیجه رسیدند که دانشجویان و دانش‌آموزان تعدادی از قضایا و اثبات‌هایی را که در دوره تحصیلی فرا گرفته بودند به‌خاطر می‌سپارند؛ ولی در موقعیت‌های جدید نمی‌توانند روش‌ها و تکنیک‌های ضروری را مورد استفاده قرار دهند و علت چنین باور و عملکرد را عدم توانایی آنها در فرآیند اثبات و تأکید بیشتر بر روی رویه‌ها در ریاضیات مدرسه‌ای می‌دانند.

دی‌وانس‌پرونسن (DeeVanspronsen) [۲۲] عدم توانایی استفاده از دانشی که در اختیار دارند یا فقدان دانش ریاضی مورد نیاز برای اثبات را از دلایل عدم موفقیت دانش‌آموزان در انجام اثبات‌های دقیق و درست می‌داند. بسیاری از محققان عقیده دارند از آنجا که هدف اثبات فقط متقاعد کردن و تأیید یک ادعا نیست؛ فرآیند اثبات باید بتواند نوعی بینش ریاضی را در دانش‌آموز ایجاد کند [۲۳]. دانش‌آموزان در مدارس بیشتر با جنبه‌های محاسباتی ریاضی آشنا می‌شوند و ریاضیات را به عنوان فهرستی از حقایق، قوانین و رویه‌ها می‌بینند. بنابراین وقتی آنها به سطح دانشگاه می‌رسند، با مشکلاتی روبرو می‌شوند. اگرچه اثبات بخش بسیار مهمی از ریاضیات پیشرفته است؛ مطالعات نشان می‌دهند که تصور دانشجویان دوره کارشناسی نیز از اثبات مناسب نیست و در ساختن برهان‌های مناسب دارای مشکلات هستند که ریشه در ساختارهای فکری ساخته شده در آموزش ریاضی مدرسه‌ای دارد. درک ساختار انتزاعی و محوری از ریاضیات بر اساس مفاهیم، روابط بین مفاهیم، تعاریف، قضیه‌ها و اثبات ایجاد می‌گردد [۲۴].

مشکلات دانش‌آموزان در ساخت اثبات از نگاه پژوهشگران

بررسی درک و فهم دانش‌آموزان از استدلال و اثبات سبب شناسایی نقاط قوت و ضعف دانش‌آموزان در امر یادگیری ریاضی می‌گردد. تحقیقات نشان می‌دهند که دانش‌آموزان در ارتباط با درک و فهم از استدلال و اثبات با مشکلات گسترده‌ای روبرو هستند. مور (Moore) [۲۵] هفت عامل اصلی عدم موفقیت دانش‌آموزان در ساختن اثبات‌ها را به‌صورت زیر بیان می‌کند:

- دانش‌آموزان تعاریف را نمی‌دانند. به عبارت دیگر، آنها قادر به درک و بیان تعاریف نیستند.
- دانش‌آموزان درک شهودی مناسبی از مفاهیم ندارند.
- نقشه‌های مفهومی دانش‌آموزان برای انجام اثبات کامل نیست.
- دانش‌آموزان توانایی تولید یا استفاده از مثال‌هایی در مورد موضوع مورد بحث را ندارد.
- دانش‌آموزان نمی‌دانند چگونه از تعاریف برای ایجاد ساختار کلی برهان استفاده کنند.

(Chin & Lin) [۲۹] در تایوان، کاترین ناگل (Kathrin Nagel) و همکاران [۳۰] در شیلی، در مورد اثبات و سطوح آن‌ها در ارائه اثبات، صورت گرفته است.

مطالعات هیلی و هویلز (Healy & Hoyles) [۲۸] و همچنین مطالعه چین و لین (Chin & Lin) [۲۹] نشان می‌داد که اکثر دانش‌آموزان شرکت‌کننده (در سنین ۱۴ و ۱۵ ساله) در ساخت اثبات‌های معتبر در زمینه جبر مشکل دارند. آنها در تحقیقات خود مشاهده نمودند اغلب دانش‌آموزان از استدلال تجربی استفاده می‌کنند؛ اما می‌دانند که در این نوع استدلال‌ها، نمی‌توانند از معلم نمره بالایی کسب کنند. هیلی و هویلز در مطالعه خود مشاهده نمودند استدلال‌های استقرایی که دانش‌آموزان برای اثبات گزاره‌های مورد نظر استفاده می‌کنند، به این معنی نیست که این‌گونه استدلال‌ها را معتبر می‌دانند؛ بلکه این مفاهیم و این نوع از استدلال‌ها، تنها منابع قابل درک و در دسترس آنها می‌باشند. کاترین ناگل (Kathrin Nagel) و همکاران [۳۰] از سه جنبه، استدلال ریاضی دانشجویان سال اول دانشگاه را مورد بررسی قرار دادند که عبارت بود از: کیفیت استدلال، نوع استدلال و فرم نمادین در پاسخ آنها. نتایج بررسی آنها نشان داد که تنها تعداد کمی از دانشجویان از استدلال تحلیلی استفاده می‌کنند. بیشتر روش‌های استقرایی و تجربی مورد توجه دانش‌آموزان است و روش روایتی بیشتر از روش نمادین مورد استفاده قرار گرفته است.

استایلیانیدیز (Stylianides) [۳۱] نیز در انگلستان مطالعاتی را در مورد نقش نوشتن اثبات در مقابل حالت گفتاری استدلال در ساختارهای اثبات شده دانش‌آموزان انجام داد. توانایی یک فرد برای ساختن اثبات نمی‌تواند از آمادگی فرد برای ارائه استدلال با استفاده از روش‌های مناسب بازنمایی مجزا باشد و دو روش بازنمایی یعنی نوشتن و کلام، مهم‌ترین وسیله ارتباطی است که از طریق آن دانش‌آموزان فرایندهای تفکر خود را در ریاضیات توضیح می‌دهند. دانش‌آموزان عموماً از طریق آن‌ها موضوع مورد اثبات را به مخاطب منتقل می‌کنند؛ بنابراین پژوهش او به حالت‌های استدلال متمرکز بود. یافته‌های او نشان می‌دهد که در یک کلاس درس در سطح دبیرستان، استفاده از روش کلامی سبب درک بیشتر اثبات‌ها در مقایسه با حالت نوشتن می‌گردد و اگر از روش «نوشتن-کلام-نوشتن» استفاده گردد؛ اثبات ادراک شده با ساختن استدلال‌های دانشجویی مطابقت دارد و می‌تواند با استاندارد تعریف شده از اثبات برابری کند.

تحقیقات متعددی در ارتباط با استدلال و اثبات ریاضی در ایران انجام شده است. برای مثال، باقری‌طاقانکی [۳۲] در مطالعه خود بر روی دانش‌آموزان پایه نهم و دهم به این نتیجه دست یافت که دانش‌آموزان قادر به فهم اثبات‌های صوری نمی‌باشند و به خوبی نمی‌توانند مراحل اثبات را پیگیری کنند. پژوهش انجام شده توسط کلاهدوز [۴] نیز روی دانش‌آموزان پایه دهم مشخص می‌کند که رویکرد دانش‌آموزان برای متقاعدکردن خودشان متفاوت از رویکرد آن‌ها برای دریافت بهترین نمره از معلم است و اغلب آنها استدلال‌های صوری را برای دریافت بهترین

اساس تحلیل مدل‌های ارائه شده در ادبیات تحقیق و همچنین بر مبنای نتایج یک کار پژوهشی که به منظور بررسی درک و فهم دانش‌آموزان از اثبات انجام گرفته است، یک طبقه‌بندی کلی ارائه می‌کنند. این طبقه‌بندی با توجه به شکل و روش استدلال دانش‌آموزان در پاسخ به سوالات مرتبط با اثبات، انجام گرفته است. استدلال‌های ارائه شده توسط یک شخص برای اثبات درستی یک ادعای ریاضی را از لحاظ شکل استدلال می‌توان مطابق جدول ۱ در سه دسته طبقه‌بندی کرد.

جدول ۱: طبقه‌بندی استدلال افراد بر اساس شکل استدلال [۲۷]

Table 1: Classify the reasoning of individuals by the shape of reasoning [27]

The form of reasoning	Reasoning features
Experimental	Reasoning based on form (image presentation) or some examples, They confirm the correctness of the statement
Formal	Reasoning expressed using mathematical symbols. Regardless of whether or not they are presented correctly
Narrative	Reasoning that are explanatory without the use of mathematical symbols. Regardless of whether or not they are presented correctly

همچنین می‌توان مطابق جدول ۲ استدلال‌ها را از لحاظ محتوا و روش استدلال در سه دسته استقرایی، استنتاجی و بدون پایه و اساس طبقه‌بندی نمود.

جدول ۲: طبقه‌بندی استدلال افراد بر اساس روش استدلال [۲۷]

Table 2: Classification of individuals reasoning based on the method of reasoning [27]

The method of reasoning	Reasoning features
Inductive	It means concluding and discovering general facts based on partial comparisons and a limited set of observations.
Deductive	This method consists of a sequence of statements that are reasonably related and based on accepted facts and facts it leads to a correct conclusion.
Basis-free	Reasoning that are irrelevant regardless of their form, are not relevant to the proposition or have no valid reason for their various stages.

تحقیق‌های متعددی در ارتباط با اثبات انجام شده است. برای مثال، هارل و ساوذر (Harel & Sowder) [۱۸ و ۹] برای بررسی درک و فهم دانش‌آموزان در زمینه اثبات از مدلی استفاده کرده‌اند که در این مدل فرد برای متقاعد کردن خود و دیگران و برای تأیید یا رد یک گزاره از آن استفاده می‌کند.

آن‌ها [۱۸] معتقدند اثبات کردن یا توجیه کردن یک حدس ریاضی، شامل متقاعد کردن خود و دیگران است و باور دارند که طرح اثبات دانش‌آموزان می‌تواند در موقعیت‌های مختلف، متفاوت باشد. تحقیقات آنها نشان می‌دهد که طرح اثبات دانش‌آموزان در ارتباط با متقاعدکردن خود، متقاعد کردن همکلاسی و معلم‌شان از درستی یک گزاره ریاضی با یکدیگر متفاوت است. مشابه پژوهش آنها، پژوهش‌هایی توسط هیلی و هویلز (Healy & Hoyles) [۲۸] در انگلستان و چین و لین

می‌توان گفت ارائه استدلال و اثبات در ریاضی، بدین معنی است که فرد باید نه تنها خود را در موضوع خاصی قانع کند؛ بلکه باید بتواند دیگران را از طریق توضیح و توجیه نتایج خود، متقاعد سازد. به بیان دیگر متقاعد کردن دیگران، بُعد عمومی اثبات و یک عمل اجتماعی، نه فقط برای ریاضیدانان، بلکه برای تمام دانش‌آموزان ریاضی است؛ بل (Bell) (نقل شده در [۸]) معتقد است، اثبات شامل دو فرآیند است: درک و متقاعد کردن. غلام آزاد [۳۸] بر این باور است، قانع ساختن خود معمولاً ساده‌تر است. مرحله بعد شامل متقاعد ساختن یک دوست می‌باشد. مزیت این کار آن است که توضیح چیزی برای دیگری، حداقل شخص را مجبور می‌کند، ایده‌هایش را به صورت عبارات‌های مرتبط، مرتب کند. مرحله نهایی متقاعد ساختن دشمن است؛ یعنی فردی که با منطق قوی، هر مرحله از اثبات را برای یافتن حلقه‌های ضعیف این زنجیره، واریسی و داوری می‌کند.

پژوهش‌های متعددی در ارتباط با این که دانش‌آموزان در متقاعد کردن خود و دیگران به چه معیارهایی توجه می‌کنند انجام شده است. برای مثال، نتایج تحقیقات هارل و ساوودر (Harel & Sowder) [۱۸] در این زمینه گویای آن بود که طرح اثبات دانش‌آموزان در موقعیت‌های مختلف، متفاوت است و دانش‌آموزان در ارتباط با متقاعد کردن خود، متقاعد کردن دوستان و معلمشان از درستی یک گزاره ریاضی با یکدیگر متفاوت است. هیللی و هویلز (Healy & Hoyles) [۲۸] در مطالعه خود مشاهده کردند دانش‌آموزانی که در موقعیت ساخت اثبات، استدلال‌های درست و یا ناقصی را ارائه داده‌اند، در انتخاب استدلال‌های ریاضی بهتر از ساخت آن عمل نموده‌اند. آنها در مصاحبه‌ای که با برخی از دانش‌آموزان شرکت‌کننده در تحقیق خود داشتند به این نتیجه رسیدند که مباحث تجربی و استدلال‌های استقرایی که دانش‌آموزان برای اثبات گزاره‌های مورد نظر ارائه می‌دهند، به این معنی نیست که آنها این‌گونه استدلال‌ها را معتبر می‌دانند؛ بلکه این مفاهیم و این نوع از استدلال، تنها منابع در دسترس برای دانش‌آموزان می‌باشند. پژوهش مشابهی توسط کاترین ناگل (Kathrin Nagel) و همکاران [۳۰] انجام پذیرفت آنها نیز از سه جنبه استدلال ریاضی را مورد بررسی قرار دادند که عبارت بود از: کیفیت استدلال، نوع استدلال و فرم نمادین در پاسخ‌ها.

نمره از معلم انتخاب می‌کنند. پژوهش انجام شده توسط فتح‌الهی [۳۳] که جهت بررسی درک و فهم دانشجویان از فرآیند اثبات ریاضی صورت گرفت، نشان می‌دهد که تعداد قابل توجهی از دانشجویان در درک جنبه کلی اثبات ضعیف عمل می‌کنند. در واقع، اکثر دانشجویان در فهم روند منطقی اثبات مشکل دارند و به طور کلی چارچوب منطقی اثبات را به درستی درک نمی‌کنند.

با توجه به اهمیت نقش استدلال و اثبات در یادگیری عمیق ریاضی در مدرسه، تحقیقات انجام شده نشان می‌دهند که درک و فهم دانش‌آموزان از اثبات و استدلال‌های منطقی در سطح مطلوبی نیست؛ به طوری که دانش‌آموزان اثبات‌ها را در بیشتر موارد صرفاً حفظ می‌کنند و وقتی کوچک‌ترین تغییر در مسأله ایجاد می‌شود؛ در درک و ایجاد ارتباط با مسأله دچار مشکل می‌شوند. تحقیقات انجام شده توسط برخی از محققان [۴ و ۵ و ۱۰] این موضوع را تأیید می‌کند. بررسی نتایج مطالعه تیمز ریاضی ۲۰۱۱ و ۲۰۱۵ نشان می‌دهد میانگین نمرات دانش‌آموزان ایرانی در پایه‌های چهارم و هشتم در حیطه استدلال ریاضی از میانگین بین‌المللی پایین‌تر است [۳۴ و ۳۵] (جدول ۳).

اما آموزش ریاضی زمانی می‌تواند موفق باشد که دانش‌آموزان در سایه این آموزش، توانایی حل چالش‌های روزمره دنیای واقعی را بر پایه حقایق، روش‌ها و مفاهیم ریاضی کسب کرده باشند بر این اساس دانش‌آموزان باید با فرایندهای ریاضی نظیر حل مسئله و به کارگیری راهبردهای حل مسئله و مدل سازی آشنا شده و در آن مهارت یابند. با توجه به اینکه متخصصان آموزش معتقدند دانش‌آموزان برای ورود به محیط‌های دانشگاهی و بازار کار به هر دو مولفه مهارت‌های ارتباطی و توانایی حل مسئله نیازمند هستند و این دو مهم از تقویت از طریق تقویت سواد ریاضی و استدلال به دست می‌آیند [۳۷].

بنابراین، بررسی درک و فهم دانش‌آموزان از استدلال و اثبات از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. برای تقویت زیرساخت‌های اثبات دانش‌آموزان، باید استدلال دانش‌آموزان را تقویت کنیم. یکی از ابعاد بررسی درک دانش‌آموزان از استدلال و اثبات ریاضی، آن است که معلوم شود، آیا دانش‌آموزان می‌توانند استدلال‌های معتبر را تشخیص دهند و اینکه چه نوع استدلال‌هایی را برای متقاعد کردن خود و دیگران به کار می‌گیرند و به چه معیارهایی در این زمینه توجه می‌کنند [۳۱].

جدول ۳: مقایسه عملکردی دانش‌آموزان در حیطه استدلال ریاضی در تیمز [۳۶]

Table 3: The comparison of students' performance in mathematical reasoning in Timss [36]

Subject	Cognitive context	Average percentage of Iran in 2011	Average global percentage in 2011	Average percentage of Iran in 2015	Average global percentage by 2015
Display data	Reasoning	50	65.66	30	55.25
Shapes and geometric measurement	Reasoning	13	26	37.83	52.75
Numbers	Reasoning	18.1	23.7	16	34.7

استفاده شده است. بر این اساس استدلال‌ها از نظر روش به سه دسته استنتاجی، استقرایی و بدون پایه و اساس و همچنین از نظر شکل استدلال به نمادین، روایت‌گونه، تجربی و یا ترکیبی از این موارد، تقسیم‌بندی می‌شوند. لازم به ذکر است که دسته استدلال نمادین می‌تواند به صورت نمادین خاص (فقط استدلال در یک حالت خاص) باشد که در مقایسه با نمادین در حالت کلی از ارزش کمتری دارد.

بنابراین با توجه به روش طبقه‌بندی ارائه شده در چارچوب فوق، می‌توان نوع تفکر و طرح اثبات ارائه شده از سوی دانش‌آموزان را مشخص نمود. جامعه آماری، دانش‌آموزان پایه یازدهم شهر زنجان و نمونه، ۳۹۳ نفر از دانش‌آموزان پسر و دختر به روش تصادفی خوشه‌ای از مدارس تیزهوشان، نمونه، شاهد و دولتی می‌باشند و انتخاب نمونه به گونه‌ای بود که تمامی سطح‌های دانش‌آموزی را شامل گردد. ابزار اندازه‌گیری، یک آزمون محقق‌ساخته بود که شامل ۳ مسأله در موقعیت‌های آشنا و کاملاً آشنا و ناآشنا که در هر مسأله ۵ پاسخ به شکل‌های مختلف (نمادین درست، نمادین نادرست، نمادین خاص، تجربی، روایتی و ترکیبی) ارائه شده بود تا دانش‌آموزان در بین پاسخ‌ها مشخص کنند که کدام پاسخ‌ها را برای متقاعد کردن خود و کدام را برای متقاعد کردن دوستان و بالاخره کدام مورد را برای دریافت بهترین نمره از معلم انتخاب می‌کنند. روایی صوری و محتوایی آزمون پژوهش توسط اساتید ریاضی و آموزش ریاضی و دبیران باتجربه ریاضی تأیید شده است. برای تجزیه و تحلیل داده‌ها، روش آمار توصیفی و استنباطی مورد استفاده قرار گرفت.

در بررسی عملکرد دانش‌آموزان و استدلال‌هایی که انتخاب می‌کنند توجه به دو مورد ضروری است؛ اول اینکه، استدلال‌هایی که انتخاب می‌کنند از نظر شکل و ارائه استدلال به چه صورت است و دیگر اینکه، آیا این استدلال‌های انتخاب شده از اعتبار لازم برخوردار هستند. جهت بررسی اعتبار استدلال‌های انتخابی دانش‌آموزان با استفاده از نظرات متخصصان و اساتید آموزش ریاضی و مطالعه ادبیات تحقیق، به استدلال‌های انتخاب شده مطابق جدول ۴ نمره داده شد.

در واقع، در این جدول به پاسخ‌های دانش‌آموزان نمره داده می‌شود تا اعتبار کار آنان در انتخاب پاسخ‌ها مورد سنجش قرار گیرد و جمع کل نمرات (امتیازات) از آن جهت اهمیت پیدا می‌کند که سبب مقایسه بهتر عملکرد گروه‌ها (دختران و پسران) می‌شود و تفاوت انتخاب‌های گروه‌ها با امتیاز مشخص می‌گردد. برای محاسبه امتیاز در هر موقعیت (کاملاً آشنا، آشنا و ناآشنا)، انتخاب‌های افراد از پاسخ‌ها، مشخص شده و نمره هر پاسخ در درصد انتخاب‌ها، ضرب و حاصل آنها با هم جمع می‌شوند

نتایج بررسی نشان می‌داد که تنها تعداد کمی از دانش‌آموزان (۱۹٪) از استدلال تحلیلی استفاده می‌کنند و آنها از روش‌های استقرایی و تجربی استفاده می‌کنند و روش روایتی را بیشتر از روش نمادین می‌پسندند. مطالعات کلاهدوز [۴] نشان داد برخی از دانش‌آموزان شرکت‌کننده در تحقیق، دارای «طرح اثبات استقرایی» می‌باشند؛ زیرا برای تأیید یک گزاره کلی بر اساس چند مثال و مورد خاص متقاعد می‌شوند. همچنین نتایج نشان می‌دهد که طرح اثبات اغلب دانش‌آموزان شرکت‌کننده در موقعیتی که می‌خواهند معلم خود را متقاعد نمایند به صورت «طرح اثبات متقاعدکننده بیرونی» است. زیرا اغلب آن‌ها برای دریافت بهترین نمره از معلم، بیشتر از محتوای اثبات به ساختار رسمی آن توجه می‌کنند (طرح اثبات آیینی) و استفاده از نمادها و زبان جبری را حتی اگر نادرست باشد در ارائه اثبات به منظور دریافت بهترین نمره از معلمشان لازم و ضروری می‌دانند (طرح اثبات نمادین و آیینی).

بنابراین بررسی ارزیابی دانش‌آموزان از درستی و اعتبار استدلال‌های ریاضی و استفاده از این استدلال‌ها در متقاعد کردن خود و دیگران از اهمیت شایانی برخوردار است و شایسته توجه و پژوهش‌های بیشتر می‌باشد. اما پژوهش حاضر برای داشتن عملکرد متفاوت نسبت به سایر پژوهش‌ها بر آن شد که مسائل را در سه حالت کاملاً آشنا، آشنا و ناآشنا در اختیار دانش‌آموزان قرار دهد و عملکرد آنان را مورد بررسی قرار دهد و به سؤالات زیر پاسخ دهد.

سوال ۱) آیا دانش‌آموزان پایه یازدهم در متقاعد کردن خود یا دیگران از درستی یک گزاره، علاوه بر شکل استدلال بر اعتبار و درستی اثبات نیز توجه کافی دارند؛ یعنی آیا آنها ملاک‌های مورد قبول برای پذیرش یک استدلال منطقی را می‌دانند؟

سوال ۲) آیا تفاوتی بین درک و فهم دانش‌آموزان در حیطه استدلال و اثبات نسبت به جنسیت وجود دارد؟

سوال ۳) آیا دانش‌آموزان برای گرفتن بهترین نمره از معلم، در درستی یک گزاره، به روش ارائه استدلال توجه دارند یا بیشتر به اعتبار آن استدلال‌ها اهمیت می‌دهند؟

روش پژوهش

هدف پژوهش حاضر آن است که توانایی دانش‌آموزان پایه یازدهم رشته‌های نظری را در ارزیابی استدلال‌های ریاضی به روش زمینه‌یابی بررسی کند. برای این منظور از چارچوب ارائه شده توسط هارل و ساوودر (Harel & Sowder) [۱۸] و هیلز و هویلز (Healy & Hoyles) [۲۸]

جدول ۴: نمره‌های مورد نیاز برای محاسبه امتیاز

Table 4: Marks needed to calculate the score

	No response	Narrative	Specific formal	Mixed		Experimental	Correct formal	Incorrect formal
				Problem 3	Problem 1,2			
Mark in convincing themselves and others	0	5	3	3	5	2	5	0

(با امتیاز ۳۴۷/۹) را برای دریافت بهترین نمره از معلم مناسب می‌دانند. همان‌طور که ملاحظه می‌شود پاسخ‌های درست انتخابی حدوداً ۵۰٪ است؛ یعنی کمی بیشتر از نصف دانش‌آموزان موفق عمل کرده‌اند. با توجه به درصد پاسخ‌های انتخابی توسط دانش‌آموزان برای قانع ساختن خود و دوستان می‌توان نتیجه گرفت هر چقدر موقعیت ناآشنا تر باشد؛ دانش‌آموزان به ملاک‌های مورد قبول برای پذیرش یک استدلال منطقی کمتر توجه می‌کنند و پاسخ‌های ناقص و یا نادرست را انتخاب کردند. برای دریافت نمره کامل از معلم، توجه دانش‌آموزان به پاسخ‌های نمادین درست و نادرست افزایش یافته و به نظر می‌رسد شکل ارائه برای آنها مهم‌تر است. بر اساس نتایج، دانش‌آموزان در موقعیت‌های ناآشنا که باید اساس اصلی تحقیق باشد در توجه به ملاک‌های مورد قبول برای پذیرش یک استدلال منطقی، دچار ضعفند و می‌توان ادعا کرد که توجه به ملاک‌های مورد قبول برای پذیرش یک استدلال منطقی در خیلی از موقعیت‌ها از ۵۰٪ کمتر است.

جدول ۵ همچنین نشان می‌دهد دانش‌آموزان در موقعیت کاملاً آشنا توانسته‌اند علاوه بر شکل اثبات‌ها، بر اعتبار پاسخ‌ها نیز توجه کنند؛ ولی در موقعیت ناآشنا با انتخاب پاسخ‌های تجربی و نمادین خاص، به شکل ارائه و اعتبار پاسخ‌ها توجه لازم نداشته و پاسخ‌هایی را انتخاب نموده‌اند که برای خود قابل درک بوده‌اند.

سوال ۲) آیا تفاوتی بین عملکرد دانش‌آموزان از درک و فهم در حیطه استدلال و اثبات نسبت به جنسیت وجود دارد؟

در جدول ۶ به مقایسه درصدی عملکرد دانش‌آموزان بر حسب جنسیت در مسأله آشنا از بعد توصیفی و استنباطی پرداخته شده است. نتایج نشان می‌دهد برای قانع ساختن خود، در موقعیت آشنا پسران به ترتیب از پاسخ‌های نمادین درست، ترکیبی و نمادین نادرست (با امتیاز ۳۴۰/۲)، و دختران از پاسخ‌های نمادین نادرست، نمادین درست و تجربی (با امتیاز ۲۶۴/۵)، برای قانع ساختن خود بهره برده‌اند.

پسران بیش از دختران به ملاک‌های مورد قبول در استدلال منطقی توجه داشته‌اند و چون هر دو گروه از اثبات‌های نمادین استفاده کرده‌اند؛ بنابراین به شکل اثبات توجه ویژه دارند. همچنین پسران بیش از دختران به اعتبار اثبات توجه دارند. البته نتایج به‌دست آمده از آزمون خی‌دو بیانگر این موضوع است که جنسیت تأثیری در پاسخ‌های ارائه شده برای قانع ساختن خود، ندارد. در موقعیت آشنا پسران برای قانع ساختن دوستان به ترتیب از پاسخ‌های ترکیبی، نمادین درست و تجربی (با امتیاز ۳۲۷/۳) و دختران از پاسخ‌های نمادین نادرست، تجربی و نمادین درست (با امتیاز ۲۶۷/۹) بهره جسته‌اند. همچنین شکل ارائه در هر دو گروه یکسان بود.

در انتخاب ملاک‌های مورد قبول برای استدلال منطقی، پسران بهتر از دختران عمل کرده بودند و دختران به اعتبار اثبات توجه کمتری مبذول داشتند. البته نتایج به‌دست آمده از آزمون خی‌دو نشان می‌دهد که جنسیت تأثیری در پاسخ‌های ارائه شده برای قانع ساختن دوستان، ندارد و تفاوت عملکرد دو گروه تأیید نمی‌شود.

تا امتیاز در هر مسأله مشخص گردد. مقایسه عملکرد دانش‌آموزان در دو مرحله انجام می‌گیرد؛ ابتدا مقایسه کلی افراد در پاسخ دادن به سه مسأله بدون توجه به جنسیت و سپس بررسی عملکرد آنان بر حسب جنسیت به عمل می‌آید. بعد از امتیازدهی، داده‌های به‌دست آمده با استفاده از نرم‌افزار آماری spss و به کمک روش‌های آماری، به طبقه‌بندی پاسخ‌ها، تنظیم جدول توزیع فراوانی و نمودارهای درصد فراوانی پرداخته شد و با استفاده از روش‌های تحلیل کیفی، تفاوت یا رابطه‌های احتمالی بین پاسخ دانش‌آموزان نسبت به جنسیت بررسی گردید و مقایسه عملکرد دانش‌آموزان دختر و پسر به وسیله آزمون خی‌دو در سطح اطمینان ۹۵ درصد مورد تحلیل قرار گرفت.

یافته‌های پژوهش

سوال ۱) آیا دانش‌آموزان پایه یازدهم در متقاعد کردن خود یا دیگران از درستی یک گزاره، علاوه بر شکل استدلال بر اعتبار و درستی استدلال نیز توجه کافی دارند؛ یعنی آیا آنها ملاک‌های مورد قبول برای پذیرش یک استدلال منطقی را می‌دانند؟

برای پاسخ به این سؤال پژوهش، عملکرد دانش‌آموزان در قانع ساختن خود، دوستان و دریافت بیشترین نمره از معلم مورد بررسی قرار می‌گیرد؛ بنابراین ابتدا پاسخ‌های دانش‌آموزان جمع‌بندی و با توجه به امتیاز کسب شده به مقایسه عملکرد دانش‌آموزان در موقعیت‌های مختلف پرداخته می‌شود.

عملکرد افراد نمونه در انتخاب پاسخ‌ها برای قانع ساختن خود و دوستان و انتخاب بهترین پاسخ برای دریافت بیشترین نمره از معلم به سه مسأله در جدول ۵، ارائه شده است. نتایج نشان می‌دهد رفتار دانش‌آموزان در شرایط متفاوت یکسان نیست. در مسأله ۱ (آشنا) دانش‌آموزان پاسخ‌های نمادین درست، نمادین نادرست و ترکیبی (با امتیاز ۳۰۸/۲) و در مسأله ۲ (کاملاً آشنا) دانش‌آموزان پاسخ‌های نمادین درست، تجربی و ترکیبی (با امتیاز ۲۴۳/۵) و در مسأله ۳ (ناآشنا) دانش‌آموزان پاسخ‌های تجربی، نمادین ناقص و روایتی (با امتیاز ۳۳۲/۸) را برای خود انتخاب کرده‌اند.

مشاهدات بیانگر آن است که استدلال‌های انتخاب شده دانش‌آموزان برای قانع ساختن دوستان در مسأله ۱ (آشنا)، پاسخ‌های نمادین درست، نمادین نادرست و ترکیبی (با امتیاز ۳۰۲/۵) است. در مسأله ۲ (کاملاً آشنا) دانش‌آموزان پاسخ‌های نمادین درست، ترکیبی و نمادین نادرست (با امتیاز ۳۶۷/۷) و در مسأله ۳ (ناآشنا) دانش‌آموزان پاسخ‌های روایتی و نمادین خاص (با امتیاز ۳۳۳/۷) را برای دوستان مناسب می‌دانند.

دانش‌آموزان برای دریافت بهترین نمره از معلم در مسأله ۱ (آشنا) پاسخ‌های ترکیبی و نمادین درست و نمادین نادرست (با امتیاز ۳۴۴/۸) را بهترین پاسخ می‌دانند. در مسأله ۲ (کاملاً آشنا) دانش‌آموزان پاسخ‌های نمادین درست، ترکیبی و تجربی (با امتیاز ۴۲۱/۷) و در مسأله ۳ (ناآشنا) دانش‌آموزان پاسخ‌های نمادین ناقص، تجربی و نمادین درست

جدول ۵: درصد استدلال‌های انتخابی دانش‌آموزان در سه مسأله

Table 5: Percentage of students' selective reasoning on three problems

		Getting the best mark	f	p	Convincing friends	f	p	Convincing yourself	f	p
Problem 1 (Familiar)	Response	Mixed	130	33.1	Correct formal	102	25.8	Correct formal	121	30
		Correct formal	114	31.3	Incorrect formal	100	25.3	Incorrect formal	109	26.9
		Incorrect formal	103	26.2	Mixed	100	25.3	Mixed	97	24
		Experimental	46	11.4	Experimental	93	23.5	Experimental	77	19.1
Problem 2 (Fully Familiar)	Response	Correct formal	243	55.2	Correct formal	224	52.7	Correct formal	263	58.3
		Mixed	80	18.2	Experimental	88	20.7	Experimental	80	17.7
		Experimental	51	11.6	Mixed	76	17.9	Mixed	80	17.7
		Specific formal	46	10.5	Incorrect formal	24	5.6	Incorrect formal	16	3.5
Problem 3 (unfamiliar)	Response	Incorrect formal	20	4.5	Specific formal	13	3.1	Specific formal	12	2.7
		Specific formal	160	37.3	Experimental	121	29.8	Experimental	137	31.5
		Experimental	96	22.۴	Specific formal	108	26.6	Specific formal	127	29.2
		Correct formal	90	21	Narrative	92	22.7	%Narrative	83	19.1
		Narrative	60	14	Specific Mixed	49	12.1	Correct formal	56	12.9
		Specific mixed	23	5.4	Correct formal	36	8.9	Specific mixed	32	7.4

جدول ۶: مقایسه درصد پاسخ‌ها از نظر جنسیت در مسأله ۱ برای سه سؤال

Table 6: Percentage of gender responses in problem 1 for three questions

		Getting the best mark			Convincing friends			Convincing yourself		
		Boy	Girl	Total	Boy	Girl	Total	Boy	Girl	Total
Problem 1 (Familiar)	Answers	34.8	30.8	Mixed 33.1	27.2	23.9	Correct formal 25.8	31.8	27.5	Correct formal 30
		29	26	Correct formal 31.3	21.1	32.3	Incorrect formal 25.3	21.5	34.5	Incorrect formal 26.9
		21.8	32	Incorrect formal 26.2	29.3	19.6	Mixed 25.3	29.2	17	Mixed 24
		12.1	11.2	Experimental 11.4	22.4	25.2	Experimental 23.5	17.6	21.1	Experimental 19.1
Test analysis	Chi-square test	χ^2	sig	df	χ^2	sig	df	χ^2	sig	df
		6.057	0.195	4	8.160	0.086	4	13.801	0.08	4
	Results	The difference in performance between the two groups is not verified.			The difference in performance between the two groups is not verified.			The difference in performance between the two groups is not verified.		
	Best performance according to marks	343.2	306.4	Score	327.3	267.9	Score	340.2	264.7	Score
		Boys			Boys			Boys		

انتخاب پاسخ‌های نمادین نادرست نشان می‌دهد هر دو گروه به شکل اثبات نیز توجه ویژه دارند و پسران ابتدا به اعتبار اثبات و سپس به شکل استدلال توجه بیشتری داشته و عملکرد بهتری نسبت به دختران دارند و برای ملاک‌های مورد قبول یک استدلال منطقی ارزش بیشتری قائلند. آزمون‌های دو مشخص می‌کند که جنسیت تأثیری در پاسخ‌های ارائه

در موقعیت آشنا، پسران برای دریافت بیشترین نمره از معلم به ترتیب پاسخ‌های ترکیبی، نمادین درست و نمادین نادرست (با امتیاز ۳۴۳/۲) و دختران، پاسخ‌های نمادین نادرست، ترکیبی و نمادین درست (با امتیاز ۳۰۶/۴)، را انتخاب نموده‌اند که پاسخ نمادین انتخاب مشترک دو گروه می‌باشد.

در موقعیت ناآشنا پسران برای قانع ساختن دوستان از پاسخ‌های نمادین خاص، تجربی و روایتی (با امتیاز ۳۳۶/۱) و دختران از پاسخ‌های تجربی، روایتی و نمادین خاص (با امتیاز ۳۲۷/۳) استفاده کرده‌اند، که نشان می‌دهد هر دو گروه به ملاک‌های قابل قبول در استدلال منطقی توجه کافی نداشته‌اند و پسران به شکل اثبات توجه بیشتر داشته و اعتبار پاسخ‌های آنان با تفاوت کمی از دختران بهتر بوده است. نتایج به‌دست آمده از آزمون‌های دو بیان می‌کند که بین پاسخ دانش‌آموزان و جنسیت ارتباط معناداری وجود دارد و جنسیت تأثیری در پاسخ‌های ارائه شده برای قانع ساختن دوستان دارد و تفاوت عملکرد دو گروه تأیید می‌شود. در موقعیت ناآشنا پسران برای دریافت بیشترین نمره از معلم پاسخ‌های نمادین خاص، روایتی و نمادین درست (با امتیاز ۴۳۵/۱)، و دختران پاسخ‌های نمادین خاص، تجربی و نمادین درست (با امتیاز ۳۳۸/۹)، را انتخاب کرده‌اند، که پاسخ‌ها نسبت به دو موقعیت قبل متفاوت می‌باشد و نقطه مشترک هر دو گروه، انتخاب نمادین خاص و نمادین درست است که نشان می‌دهد هر دو گروه به شکل اثبات بیش از اعتبار آن توجه دارند. انتخاب پاسخ روایتی از سوی پسران نشان می‌دهد که عملکرد پسران بهتر از دختران بوده است. نتایج آزمون‌های دو تأکید می‌کند که بین پاسخ دانش‌آموزان و جنسیت ارتباط معناداری وجود دارد و جنسیت در پاسخ‌های ارائه شده برای دریافت بیشترین نمره از معلم، تأثیر دارد و تفاوت عملکرد دو گروه تأیید می‌شود.

سوال ۳) آیا دانش‌آموزان برای گرفتن بهترین نمره از معلمان، در درستی یک گزاره، به روش ارائه استدلال توجه دارند یا بیشتر به اعتبار آن استدلال‌ها اهمیت می‌دهند؟ مقایسه عملکرد دانش‌آموزان در دریافت بهترین نمره از معلم در سه مسأله در شکل ۱ ارائه شده است. بر اساس نتایج به‌دست آمده از جدول ۵ و شکل ۱، مقایسه عملکرد دانش‌آموزان برای دریافت بهترین نمره از معلم در سه مسأله مشخص می‌کند که دانش‌آموزان در همه موقعیت‌ها برای دریافت بهترین نمره از معلم از پاسخ‌های نمادین و نمادین خاص استفاده کرده‌اند و بیانگر این است که شکل اثبات‌ها بیشتر برای دانش‌آموزان مهم است و اعتبار اثبات‌ها اولویت اول در انتخاب پاسخ‌ها نیست؛ به‌طوری‌که در مسأله ناآشنا اولویت اول دانش‌آموزان برای دریافت نمره از معلم پاسخ نمادین خاص، ولی برای قانع ساختن خود یا دوستان اولویت اول، پاسخ‌های تجربی می‌باشد.

نتایج به‌دست آمده در پژوهش حاضر نیز مانند نتایج هارل و ساوادر [۱۸] گویای آن بود که طرح اثبات دانش‌آموزان در موقعیت‌های مختلف، متفاوت است. دانش‌آموزان در ارتباط با متقاعد کردن خود، متقاعد کردن دوستان و معلمشان از درستی یک گزاره ریاضی با یکدیگر متفاوت است. نتایج به‌دست آمده از مطالعه هیلی و هوپلز [۲۸]، نشان داد دانش‌آموزان در ساخت اثبات‌های معتبر در زمینه جبر مشکل دارند. همچنین آن‌ها در تحقیق خود مشاهده کردند اغلب دانش‌آموزان در ارائه اثبات‌هایشان از استدلال تجربی استفاده می‌کنند؛ اما آن‌ها تشخیص دادند که این نوع از استدلال نمره بالایی از معلم دریافت نمی‌کند.

شده برای دریافت بیشترین نمره از معلم ندارد و بین پاسخ دانش‌آموزان و جنسیت ارتباط معناداری وجود ندارد. در جدول ۷ به مقایسه عملکرد دانش‌آموزان بر حسب جنسیت در مسأله کاملاً آشنا از بعد توصیفی و استنباطی پرداخته می‌شود.

بررسی‌ها نشان می‌دهد برای قانع ساختن خود، در موقعیت کاملاً آشنا پسران به ترتیب از پاسخ‌های نمادین درست، ترکیبی و تجربی (با امتیاز ۴۳۱/۳) و دختران به ترتیب از پاسخ‌های نمادین درست، تجربی و ترکیبی (با امتیاز ۴۱۳/۸) برای قانع ساختن خود سود برده‌اند. بررسی‌ها نشان می‌دهد پسران ملاک‌های پذیرش یک استدلال منطقی را بیشتر می‌دانسته‌اند و آنان بیش از دختران به اعتبار و شکل اثبات توجه دارند. نتایج به‌دست آمده از آزمون‌های دو بیانگر این موضوع است که جنسیت در پاسخ‌های ارائه شده برای قانع ساختن خود تأثیر دارد و تفاوت عملکرد دو گروه تأیید می‌شود. پسران در موقعیت کاملاً آشنا برای قانع ساختن دوستان از پاسخ‌های نمادین، ترکیبی و تجربی (با امتیاز ۴۰۸) و دختران از پاسخ‌های نمادین، تجربی و ترکیبی (با امتیاز ۴۰۱) استفاده نموده‌اند. عملکرد پسران نسبت به دختران بهتر و منطقی‌تر بوده و آنان به اعتبار اثبات توجه ویژه‌ای داشته‌اند. نتایج به‌دست آمده از آزمون‌های دو مشخص می‌کند در بین پاسخ دانش‌آموزان و جنسیت ارتباط معناداری وجود دارد و جنسیت تأثیری در پاسخ‌های ارائه شده برای قانع ساختن دوستان دارد و تفاوت عملکرد دو گروه تأیید می‌شود.

در موقعیت کاملاً آشنا پسران جهت دریافت بیشترین نمره از معلم به ترتیب پاسخ‌های نمادین درست، ترکیبی و نمادین خاص (با امتیاز ۴۲۴/۷) و دختران به ترتیب پاسخ‌های نمادین درست، تجربی و ترکیبی (با امتیاز ۴۱۶/۹) را انتخاب کرده‌اند؛ بنابراین پسران در این موقعیت عملکرد بهتری داشته و به اعتبار و شکل اثبات توجه بیشتری نسبت به دختران دارند و هر دو گروه به ملاک‌های مورد قبول در استدلال منطقی توجه نموده‌اند.

نتایج به‌دست آمده از آزمون‌های دو نیز تأیید می‌کند که بین پاسخ دانش‌آموزان و جنسیت ارتباط معناداری وجود دارد و تفاوت عملکرد دو گروه تأیید می‌شود. در جدول ۸ به مقایسه عملکرد دانش‌آموزان بر حسب جنسیت در مسأله ناآشنا از بعد توصیفی و استنباطی پرداخته می‌شود. نتایج گویای این موضوع است که در موقعیت ناآشنا پسران برای قانع ساختن خود از پاسخ‌های نمادین خاص، تجربی و روایتی (با امتیاز ۳۳۱)، استفاده کرده و دختران به ترتیب پاسخ‌های تجربی، نمادین خاص و روایتی (با امتیاز ۳۳۴/۵)، را انتخاب نموده‌اند. بنابراین پسران به شکل اثبات توجه بیشتری دارند. از طرفی هر دو گروه به ملاک‌های قابل قبول در استدلال منطقی توجه کمتری نموده و با تفاوت بسیار جزئی، دختران به اعتبار اثبات‌ها بیشتر توجه داشته‌اند. نتایج به‌دست آمده از آزمون‌های دو مشخص می‌کند جنسیت تأثیری در پاسخ‌های ارائه شده برای قانع ساختن خود ندارد و تفاوت عملکرد دو گروه تأیید نمی‌شود.

جدول ۷: مقایسه درصد پاسخ‌ها از نظر جنسیت در مسأله ۲ برای سه سؤال

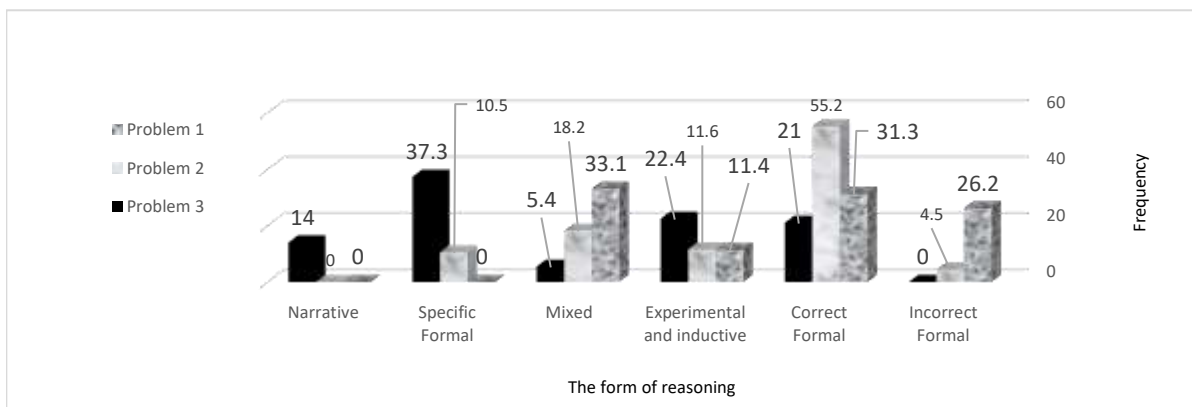
Table 7: Comparison percentage of gender responses in question 2 for three questions

	Getting the best mark			Convincing friends			Convincing yourself			
	Boy	Girl	Total	Boy	Girl	Total	Boy	Girl	Total	
Problem 2 (Fully Familiar)	answers	54.6	56	Correct formal 55.2	49.9	57.2	Correct formal 52.7	57.8	59	Correct formal 58.3
		21.3	14.1	Mixed 18.2	22.4	24.4	Experimental 20.7	15.6	20.5	Experimental 17.7
		8.8	15.2	Experimental 11.6	23.3	10.6	Mixed 17.9	21.5	12.8	Mixed 17.7
		9.2	12	Specific formal 10.5	7.3	3.3	Incorrect formal 5.6	3.9	3.1	Incorrect formal 3.5
		6	2.9	Incorrect formal 4.5	2	4.4	Specific forma 3.1	1.2	4.6	Specific formal 2.7
Test analysis	Chi-square test	χ^2	sig	df	χ^2	sig	df	χ^2	sig	df
		10.407	0.034	4	17.609	0.001	4	11.348	0.023	4
	Results	The difference in performance between the two groups is confirmed.			The difference in performance between the two groups is confirmed.			The difference in performance between the two groups is confirmed.		
Best performance according to marks	424.7	416.9	Score	408	401	Score	431.3	413.8	Score	
	Boys			Boys			Boys			

جدول ۸: مقایسه درصد پاسخ‌ها از نظر جنسیت در مسأله ۳ برای سه سؤال

Table 8: Comparison percentage of gender responses in question 3 for three questions

	Getting the best mark			Convincing friends			Convincing yourself			
	Boy	Girl	Total	Boy	Girl	Total	Boy	Girl	Total	
Problem 3 (unfamiliar)	answers	42.4	30.4	Specific formal 37.3	25.4	35.6	Experimental 29.8	28.6	35	Experimental 31.5
		16.3	30.4	Experimental 22.4	31.9	19.5	Specific formal 26.6	33.2	24.4	Specific formal 29.2
		22.4	19	Correct formal ۲۱	21.6	24.1	Narrative 22.7	15.5	23.4	Narrative 19.1
		29	15.8	Narrative 14	11.2	13.2	Specific Mixed 12.1	14.3	11.2	Correct formal ۱۲,۹
		6.1	4.3	Specific mixed 5.4	9.6	7.5	Correct formal 8.9	8.4	6.1	Specific mixed 7.4
Test analysis	Chi-square test	χ^2	sig	df	χ^2	sig	df	χ^2	sig	df
		15.345	0.004	4	10.474	0.033	4	9.340	0.053	4
	Results	The difference in performance between the two groups is confirmed.			The difference in performance between two groups is confirmed.			The difference in performance between the two groups is not verified.		
Best performance according to marks	435.1	338.9	Score	336.1	327.3	Score	331	334.5	Score	
	Boys			Boys			girls			



شکل ۱: مقایسه عملکرد دانش‌آموزان برای دریافت بهترین نمره از معلم در سه مسأله

Fig. 1: compares the performance of students to get the best mark from the teacher in three problems

نیستند و تنها بر این باورند که استدلال‌های غیرنمادین قابلیت دریافت نمره کامل از معلم را ندارند.

یافته‌ها نشانگر انتخاب استدلال‌های غیرنمادین توسط دانش‌آموزان برای متقاعد کردن دوستان در موقعیت ناآشنا است. این موضوع نیز شاید به شناخت دانش‌آموزان از دوستان خود وابسته باشد که آنان با استدلال‌های غیرنمادین راحت‌تر قانع می‌شوند و یا خود دانش‌آموز، هنوز در فهم پاسخ‌های نمادین و یا توضیح آن برای دیگران دچار مشکل می‌باشد و یا دانش‌آموز با استدلال‌های تجربی و استقرایی آسانتر قانع می‌شود. نکته قابل توجه در موقعیت ناآشنا توجه محدود دانش‌آموزان به پاسخ روایتی بود که بیشترین کاربرد آن برای قانع ساختن دوستان بود. با وجود اینکه این پاسخ به زبان فارسی و نه به صورت علائم بیان شده بود، کمتر مورد توجه و اقبال قرار گرفت. این موضوع نشان می‌دهد که دانش‌آموزان با پاسخ‌هایی که با زبان فارسی و طولانی بیان می‌شوند، راحت ارتباط برقرار نمی‌کنند. نتایج نشان می‌دهد جنسیت در برخی موارد روی عملکرد دانش‌آموزان تأثیر می‌گذارد در مسأله ۱ (آشنا) عملکرد پسران بهتر از دختران بود. در مسأله ۲ (کاملاً آشنا) پسران در قانع ساختن خود و دوستان موفق‌تر بودند و در دریافت بهترین نمره از معلم تفاوت معناداری نداشتند.

بنابراین می‌توان ادعا کرد که شیوه آموزش فعلی در ریاضیات نتایج قابل توجهی در حیطه استدلال و اثبات به همراه نداشته و برای رسیدن به اهداف موجود در سند برنامه درسی و اسناد بالا دستی باید اقدامات قابل توجهی در بعد کلاس، کلاس‌داری، کتب درسی و شیوه‌های جدید آموزش انجام گیرد. نتایج این تحقیق می‌تواند مورد استفاده سیاست‌گذاران تعلیم و تربیت و مولفان کتب درسی قرار گیرد تا با آگاهی از دیدگاه دانش‌آموزان به اثبات‌های ریاضی، به جایگاه اثبات در کتاب‌های ریاضی توجه ویژه‌ای نمایند و شاید با تغییر نحوه نگارش کتب درسی گامی اساسی برای رفع مشکلات بردارند. همچنین معلمان ریاضی با آگاهی از عملکرد دانش‌آموزان در زمینه استدلال و اثبات، می‌توانند به نقاط ضعف و قوت دانش‌آموزان خود در فرایند اثبات‌های ریاضی پی‌ببرند و بدفهمی آن‌ها در این زمینه شناسایی کنند.

مشارکت نویسندگان

مشارکت نویسندگان در نگارش مقاله یکسان است.

تشکر و قدردانی

با تشکر از مدیران مدارس شهر زنجان و دانش‌آموزانی که در انجام این پژوهش ما را یاری نمودند.

تعارض منافع

«هیچ‌گونه تعارض منافع توسط نویسندگان بیان نشده است.»

نتایج پژوهش‌های ناگل و همکاران [۳۰] نیز با پژوهش حاضر همسو بوده و نتایج آنها بیان می‌کند روش‌های استقرایی و تجربی بیشتر مورد توجه دانش‌آموزان می‌باشد و روش روایتی بیشتر از روش نمادین مورد استفاده قرار گرفته است و مشاهدات نشان می‌دهد که دانش‌آموزان در مرحله توسعه توانایی‌های استدلال ریاضی قرار دارند. نتایج پژوهش کلاهدوز [۲۹] نیز بیان می‌کند اکثر دانش‌آموزان از روش‌های نمادین استفاده می‌کنند و شکل اثبات از اعتبار آن مهم‌تر است.

نتیجه‌گیری

از اهداف آموزش ریاضی ایجاد تعادل بین محتوا و نحوه آموزش محتوا می‌باشد به گونه‌ای که ریشه‌های ضعف در یادگیری، شناسایی و برطرف گردد. بر این اساس، پژوهش حاضر نیز با هدف ارزیابی درک و فهم دانش‌آموزان پایه یازدهم از استدلال و اثبات طراحی گردید تا نقاط قوت و ضعف دانش‌آموزان در این زمینه مشخص گردد. برای رسیدن به این هدف سه مسأله در موقعیت‌های آشنا، کاملاً آشنا و ناآشنا طراحی شد. بررسی‌های به عمل آمده گویای این موضوع می‌باشد که دانش‌آموزان در موقعیت‌های مختلف رفتارهای متفاوتی دارند؛ به طوری که در موقعیت کاملاً آشنا دانش‌آموزان به پاسخ‌های نمادین بیش از پاسخ‌های دیگر علاقه نشان می‌دهند و برای دریافت بهترین نمره از معلم و حتی برای قانع ساختن خود و دوستان این روش‌ها را انتخاب می‌کنند. به نظر می‌رسد در موقعیت کاملاً آشنا آنها به شکل و ظاهر اثبات توجه ویژه دارند و اولین انتخاب آنها، بدون تفکر و بررسی دقیق‌تر و از روی عادت یاد گرفته شده در کلاس، پاسخ‌های نمادین می‌باشد. در موقعیت آشنا برای قانع ساختن خود و دوستان از پاسخ‌های ترکیبی استفاده نمودند و دانش‌آموزان برای دریافت بهترین نمره از معلم به پاسخ‌های نمادین و ترکیبی علاقه‌مند بوده‌اند؛ بنابراین دانش‌آموزان در موقعیت‌های آشنا رفتار منطقی‌تری داشته و عملکرد آنها از حالت کاملاً آشنا حساب شده‌تر بود و نه از روی عادت، که وقتی جواب را می‌بینند، بدون تفکر پاسخ‌ها را انتخاب می‌کردند. در موقعیت ناآشنا دانش‌آموزان رفتار حساب شده‌ای داشته‌اند؛ زیرا برای قانع ساختن خود از روش تجربی استفاده کرده‌اند و برای قانع ساختن دوستان از پاسخ‌های روایتی و تجربی بهره برده‌اند و برای دریافت نمره کامل از معلم به پاسخ‌های نمادین توجه ویژه داشته‌اند. کاهش پاسخ‌های نمادین نادرست و نمادین درست و افزایش پاسخ‌های تجربی و ترکیبی از بارزترین تفاوت عملکرد دانش‌آموزان در موقعیت آشنا بوده و کاهش پاسخ نمادین و افزایش پاسخ روایتی در موقعیت ناآشنا نکته قابل توجه در قانع ساختن دوستان در مقابل قانع ساختن خود می‌باشد. از طرفی تفاوت بین عملکرد دانش‌آموزان در متقاعد کردن خود و دوستان از درستی گزاره‌ها و دریافت بهترین نمره از معلم می‌تواند دلایل مختلفی داشته باشد. شاید دانش‌آموزان از محدودیت استدلال‌های نادرست برای اثبات گزاره‌ها آگاه باشند؛ ولی برای قانع ساختن خود، آنچه را که خوشایند خود می‌دانند، انتخاب می‌کنند و یا از محدودیت‌های استدلال‌های تجربی و استقرایی مطلع

منابع و مآخذ

- [16] Hanna G. *Rigorous proof in mathematics education*. 1983.
- [17] Lucast EK. *Proof as method: A new case for proof in mathematics curricula*. [master's thesis] Pittsburgh, PA, USA: Carnegie Mellon University. 2003.
- [18] Harel G, Sowder L. Students' proof schemes: Results from exploratory studies. *American Mathematical Society*. 1998;7:234-83.
- [19] Schoenfeld AH. What do we know about mathematics curricula? *The Journal of Mathematical Behavior*. 1994;13(1):55-80.
- [20] Ball DL, Bass H. *Making mathematics reasonable in school. A research companion to principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics 2003.
- [21] Anapa P, Şamkar H. Investigation of undergraduate students' perceptions of mathematical proof. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*. 2010;2(2):2700-6.
- [22] VanSpronsen HD. *Proof processes of novice mathematics proof writers* [doctoral dissertation]. US: University of Montana; 2008.
- [23] Stylianou DA, Blanton ML, Rotou O. Undergraduate students' understanding of proof: Relationships between proof conceptions, beliefs, and classroom experiences with learning proof. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*. 2015;1(1):91-134.
- [24] Sarı M. Undergraduate students' difficulties with mathematical proof and proof teaching, devam eden doktora tezi, Hacettepe Üniversitesi. Fen Bilimleri Enstitüsü tr/YermePappers/MeltemSari pdf. 2008.
- [25] Moore RC. Making the transition to formal proof. *Educational Studies in mathematics*. 1994;27(3):249-66.
- [26] Baker D, Campbell C. Fostering the development of mathematical thinking: Observations from a proofs course. *Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies*. 2004;14(4):345-53.
- [27] Reyhani A, Koolahdooz F. The study and analysis of the basic models of reasoning and proof in mathematical education. *Empirical Innovations*. 2013; 48(12): 45-70.
- [28] Healy L, Hoyles C. A study of proof conceptions in algebra. *Journal for research in mathematics education*. 2000:396-428.
- [29] Chin E, Lin F. A comparative study on junior high school students' proof conceptions in algebra between Taiwan and the UK. *Journal of Mathematics Education*. 2009;2(2):52-67.
- [30] Nagel K, Schyma S, Cardona A, Reiss K. Analysis of mathematical argumentation of first-year students. *Pensamiento Educativo*. 2018;55(1).
- [31] Stylianides AJ. Secondary students' proof constructions in mathematics: The role of written versus oral mode of argument representation. *Review of Education*. 2019;7(1):156-82.
- [1] Nurhidayah N, Rosjanuardi R, Nurlaelah E, editors. Investigating 10th grade students' understanding of the structure of deductive proof. *Journal of Physics: Conference Series*. UK: IOP Publishing; 2019.
- [2] Stylianou DA, Blanton ML, Knuth EJ. *Teaching and learning proof across the grades: A K-16 perspective*. UK: Routledge; 2010.
- [3] Noto MS, Priatna N, Dahlan JA. Mathematical Proof: The Learning Obstacles of Preservice Mathematics Teachers on Transformation Geometry. *Journal on Mathematics Education*. 2019;10(1):117-126.
- [4] Koolahdooz F. *A Survey of Understanding and Understanding Secondary High School Students in Mathematical Proof* [master's thesis]. Tehran: Shahid Rajaei Teacher Training University. 2011
- [5] Varghese T. *Secondary-Level Student Teachers' Conceptions of Mathematical Proof. Issues in the Undergraduate Mathematics Preparation of School Teachers*. 2009.
- [6] National Council of Teachers of Mathematics. *Principles and standards for school mathematics*. Reston VA; 2000.
- [7] Tall D, Yevdokimov O, Koichu B, Whiteley W, Kondratieva M, Cheng YH. Cognitive development of proof. In Hanna G, de Villiers M (eds) *Proof and proving in mathematics education* 2011. Dordrecht: Springer. pp. 13-49.
- [8] Brodie K. *Teaching mathematical reasoning in secondary school classrooms*. Switzerland: Springer Science & Business Media; 2009.
- [9] Harel G, Sowder L. Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*. 2007;2:805-42.
- [10] Stylianides AJ. Proof and proving in school mathematics. *Journal for research in Mathematics Education*. 2007:289-321.
- [11] Weber K. *Students' difficulties with proof*. MAA Online: Research Sampler. 2003.
- [12] Reyhani A, Fatah Allah F, koolahdooz F. Students Understand and Understand the Math Proof Process Based on the Model of Mija Ramos and Associates. *Educational Technology*. 2015; (10)2:215-27.
- [13] Samkoff A, Weber K. Lessons learned from an instructional intervention on proof comprehension. *The Journal of Mathematical Behavior*. 2015;39:28-50.
- [14] Weber K. Proofs that develop insight. *For the Learning of Mathematics*. 2010;30(1):32-6.
- [15] Hemmi K. Three styles characterising mathematicians' pedagogical perspectives on proof. *Educational Studies in Mathematics*. 2010;75(3):271-91.

معرفی نویسندگان

AUTHOR(S) BIOSKETCHES



نرگس یافتیان کارشناسی خود را در رشته دبیری ریاضی و کارشناسی ارشد را در رشته ریاضی کاربردی از دانشگاه خوارزمی اخذ نمود و مقطع دکترای ریاضی را در دانشگاه علم و صنعت گذراند و در حال حاضر استادیار دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی می‌باشد.

علائق پژوهشی و مطالعاتی وی در زمینه آموزش ریاضی است.

Yaftian, N. Assistant Professor, Mathematics, Shahid Rajaei Teacher Training University, Tehran, Iran

yaftian@sru.ac.ir



محمدرضا انصاری کارشناسی خود را در رشته دبیری ریاضی از دانشگاه زنجان و کارشناسی ارشد را در رشته آموزش ریاضی از دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی تهران اخذ نمود و در حال حاضر دبیر ریاضی دبیرستان‌های ناحیه یک زنجان می‌باشد.

Ansari, M. R. Math Teacher, Zanjan Office of Education, Zanjan, Iran

rezaansari1351@gmail.com

[32] Bagheri Tahahnaki H. *Understanding and Understanding First and Second High School Students from Proof* [master's thesis]. Tehran: Shahid Beheshti University; 2009.

[33] Fatehallahi F. *Students' understanding and understanding of the process of mathematical proofing and their attitude towards mathematical proofs* [master's thesis] Tehran: Shahid Rajaei Teacher Training University; 2013.

[34] BakhshAlizadeh S. Masoumeh K. *Questions published by TIMSS 2015*. Tehran: School Publishing; 2017.

[35] BakhshAlizadeh S. *TIMSS Science and Mathematics Questions Collection*. Tehran: School Publishing; 2013.

[36] Pejman HR, Gooya Z. *TIMSS: A Mirror to See Ourselves!, Roshd Mathematics Education Journal*;129. 2018:4-14.

[37] Yaftian N, Shayan M. [Mathematic literacy of students in 9th grade: Research based on the PISA study test]. *Technology of Education Journal*. 2019;14(1):121-40. Persian

[38] Gholam-azad S, Gooya Z. *The Role of Proof in a school Mathematics Curricula. Roshd Mathematics Education Journal*, 83. 2006:2-17.

Citation (Vancouver): Yaftian N, Ansari M.R. [The ability of 11th grade students to evaluate mathematical reasoning]. *Tech. Edu. J.* 2020; 14(3): 643-656

<http://dx.doi.org/10.22061/tej.2020.5808.2284>



COPYRIGHTS



©2020 The author(s). This is an open access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution (CC BY 4.0), which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, as long as the original authors and source are cited. No permission is required from the authors or the publishers.