



## Position and Speed Control of the Tractor-Trailer Robot by Considering the Dynamics of the Tractor Wheels Using the PID Controller

Mostafa Nazemizadeh <sup>a</sup>, Hamidreza Safari <sup>b</sup>, Pouya Mallahi Kolahi <sup>c\*</sup>

<sup>a</sup> Assistant Professor, Department of Mechanical Engineering, Faculty of Mechanics, Malek Ashtar University of Technology, Iran

<sup>b</sup> Ph.D. Student, Department of Mechanical Engineering, Faculty of Mechanics, Iran University of Science and Technology, Iran

<sup>c</sup> MSc, Department of Mechanical Engineering, Faculty of Mechanics, Malek Ashtar University of Technology, Iran

### Original Article

Use your device to scan  
and read the article online



**Citation:** Nazemizadeh M, Safari H, Mallahi Kolahi P. Position and Speed Control of the Tractor-Trailer Robot by Considering the Dynamics of the Tractor Wheels Using the PID Controller. *Mechanics of Advanced and Smart Materials*. 2023;3(1):53-66.



<https://10.52547/masm.3.1.53>

### KEYWORDS

Tractor-Trailer,  
Speed Control,  
Dynamic Modeling,  
PID Control.

### ABSTRACT

As a subset of mobile robots, the tractor-trailer mobile robot has been widely used in various applications in the past decades, including rescue, fire and military missions, due to its advantages, such as a more extensive working space, high maneuverability, and load-carrying capacity has been used. One of the main challenges in controlling the tractor-trailer robot's speed is the tractor drive's dynamics. In this article, to complete the modeling after investigating the kinematic and dynamic equations the tractor-trailer robot, coupled dynamics have been presented by considering the dynamics of the tractor wheels. In the following, using the coupled dynamics, a suitable controller has been designed to control the robot's speed to achieve the desired value and the position point by point. Various simulations are presented to demonstrate the dynamic performance and the proposed controller. According to the simulation results, the presented theory improves the performance of the designed control system.

### Extended Abstract

#### 1. Introduction

Among the features of mobile robots compared to fixed robots, we can mention a more expansive working space and high maneuverability to be used in various missions such as rescue, firefighting, and military applications in the past decades. Wheeled mobile robots are one of the most common types of mobile robots. The structural features of the mobile robot and the constraints governing the problem have led to the expression of non-holonomic constraints in the dynamic equations of motion. Therefore, this type of robot has been the focus of many robotics researchers [1-3,4,6,14,15]. Mallahi and Nazimizadeh presented the modeling of the nonlinear dynamics of the tractor-trailer mobile robot by considering the dynamics of the wheels of the tractor robot. In the presented dynamic model, the number of generalized coordinates of the system has increased compared to the previous modeling. Therefore, the tractor-trailer moving robot's inertia matrices and nonlinear forces have been rewritten. The method of Lagrange coefficients has been used to extract dynamic equations. In the Lagrange function of the system, the kinetic energy caused by the movement of the linearity and rotation of the wheels is considered. Then they used the feedback linearization controller to control the robot in a path and the optimal controller to design the optimal path [15].

In this article, the modeling of the nonlinear dynamics of the tractor-trailer wheeled mobile robot (TTWMR) is first discussed. Then the dynamics of the wheels of the tractor robot are considered coupled with the extracted dynamics. Then, coupled dynamics using a PID controller control the robot's position and speed to achieve the desired position and speed.

\* Corresponding author. Tel.: +98-9127376322

E-mail address: [pouya.mallahi@gmail.com](mailto:pouya.mallahi@gmail.com)

DOI: <https://10.52547/masm.3.1.53>.

Received: March 24, 2023; Received in revised form: April 12, 2023; Accepted: June 15, 2023, Published:

October 02, 2023

© Author



2. Methodology

In this part, the kinematic and nonlinear dynamics of the tractor-trailer mobile robot are presented. As it is shown in Figure 1, the robotic system consists of a leader tractor mobile platform driven by two independently driving wheels and a towing trailer mobile robot with passive wheels.

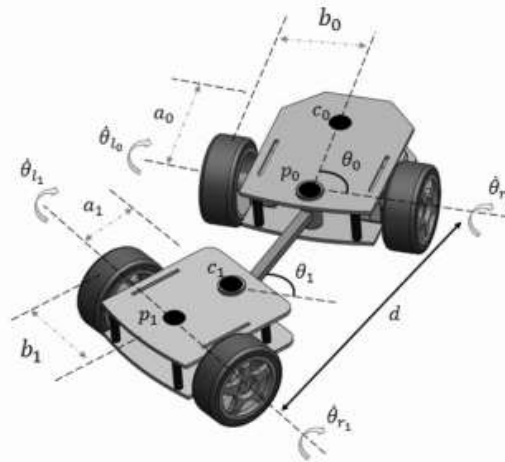


Figure 1. A tractor-trailer wheeled mobile robot

According to Figure (1), parameters of the tractor-trailer mobile robot are given as:  $c_0$  and  $c_1$  are the mass centers of the tractor and the trailer robot, respectively;  $2b_0$  and  $2b_1$  are the distances between the wheels of the tractor and the trailer robot, respectively;  $a_0$  and  $a_1$  are the distances between the wheels of the tractor and trailer to their center of mass, respectively;  $d$  is the distance between points  $p_0$  and  $p_1$ ;  $\theta_0$  and  $\theta_1$  are the orientation of the tractor and trailer robots, respectively;  $\dot{\theta}_{r_0}$  and  $\dot{\theta}_{l_0}$  are the angular velocities of the right and left wheel of the tractor robot and  $\dot{\theta}_{r_1}$  and  $\dot{\theta}_{l_1}$  are the angular velocities of the right and left wheel of the trailer robot, respectively.

to describe all physical characteristics of the TTWMR including the wheel inertia, an innovative set of the generalized coordinates are defined as  $\vec{q} = [x \ y \ \theta_0 \ \theta_1]^T$ . Therefore, the lateral and longitudinal non-slipping nonholonomic constraints of the articulated wheeled mobile robot can be derived as:

$$A\vec{q} = 0 \tag{1}$$

where A is the Jacobian matrix and can be written as:

$$A(q) = \begin{pmatrix} \sin\theta_1 & -\cos\theta_1 & 0 & d \\ \sin\theta_0 & \cos\theta_0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

The matrix S is defined in the null space of the Jacobian matrix A and calculated as:

$$S(q) = \begin{pmatrix} \cos\theta_0 & 0 \\ \sin\theta_0 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{1}{d}\sin(\theta_0 - \theta_1) & 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

the nonlinear dynamic equations of the system can be achieved as the follows:

$$M(\vec{q})\ddot{\vec{q}} + \vec{V}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) = E(\vec{q})\vec{U} + A^T(\vec{q})\vec{\lambda} \tag{4}$$

In which, M is the inertia matrix, the vector  $\vec{V}$  describes centrifugal and Coriolis terms of the system,  $\vec{U} = [\tau_r \ \tau_l]^T$  denotes the input torques exerted to the tractor wheels, E is the coefficient matrix of the input torques, and  $\vec{\lambda}$  is the vector of the Lagrangian multipliers related to the nonholonomic constraints of the system. The matrices in Eq. 10 are obtained as follows:

$$M = \begin{bmatrix} m_0 + m_1 & 0 & -a_0 m_0 \sin\theta_0 & -m_1(a_1 - d)\sin\theta_1 \\ 0 & m_0 + m_1 & a_0 m_0 \cos\theta_0 & m_1(a_1 - d)\cos\theta_1 \\ -a_0 m_0 \sin\theta_0 & a_0 m_0 \cos\theta_0 & m_1(a_1 - d)^2 + I_1 & 0 \\ -m_1(a_1 - d)\sin\theta_1 & m_1(a_1 - d)\cos\theta_1 & 0 & m_1 a_0^2 + I_0 \end{bmatrix} \tag{5}$$

$$C = \begin{bmatrix} -a_0 m_0 \cos \theta_0 \dot{\theta}_0^2 - m_1 (a_1 - d) \cos \theta_1 \dot{\theta}_1^2 \\ -a_0 m_0 \sin \theta_0 \dot{\theta}_0^2 - m_1 (a_1 - d) \sin \theta_1 \dot{\theta}_1^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6}$$

$$B = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} \cos \theta_0 & \cos \theta_0 \\ \sin \theta_0 & \sin \theta_0 \\ b & -b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{7}$$

to eliminate the Lagrange coefficients, the final equation is defined as follows:

$$\bar{M}(q)\ddot{q} + \bar{C}(q, \dot{q}) = \bar{B}(q)\tau \tag{8}$$

In which the parameters of  $\bar{M}$ ,  $\bar{C}$ ,  $\bar{B}$  are defined as follows:

$$\bar{M} = S^T M S \tag{9}$$

$$\bar{C} = S^T (M S \dot{v} + C) \tag{10}$$

$$\bar{B} = S^T B \tag{11}$$

The block diagram of coupled dynamics with consideration of motor dynamics is shown in Figure 2.

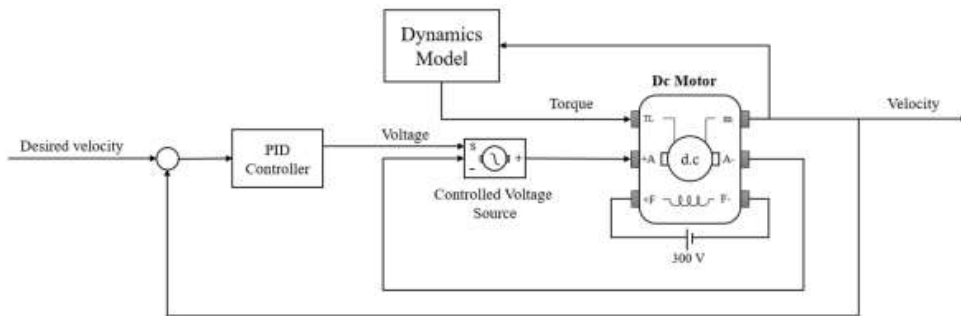


Figure 2. Tractor-trailer robot dynamics considering wheel dynamics

### 3. Discussion and Results

In this part, the speed control simulation of the tractor-trailer robot is discussed to achieve a reference speed of 100 rad/s for both the left and right wheels of the tractor. The open-loop response of the robot without considering the controller is shown in Figure 4.

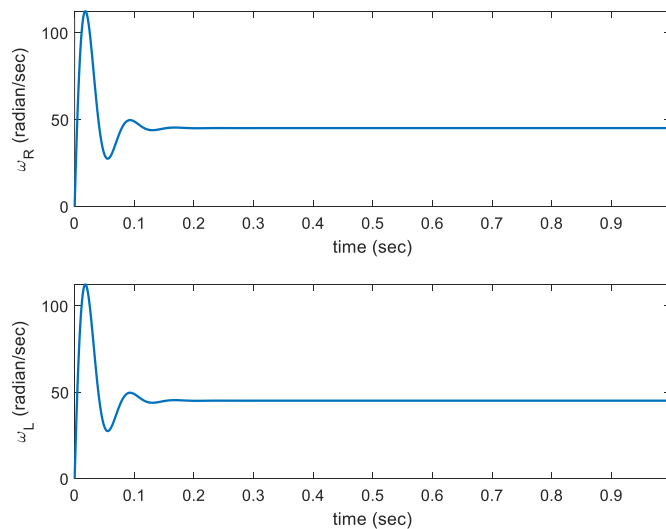


Figure 3 Angular velocity of robot wheels without controller design

According to the simulation result, the tractor robot's output speed is 50 radians/second, which has a significant error compared to the desired input speed. Therefore, it is necessary to use a suitable controller to compensate for the error made to achieve the desired speed. the speed of the robot using the proposed controller is shown in figure 5.

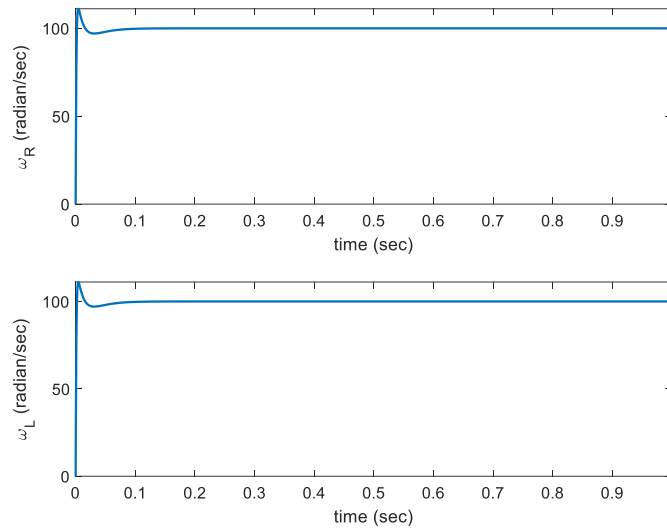


Figure 4 Angular velocity of robot wheels using PID controller

According to the initial conditions for the tractor-trailer robot  $q = [0 \quad 0 \quad \frac{\pi}{4} \quad \frac{\pi}{4}]$ , the robot's path is shown as a straight line in Figure 6.

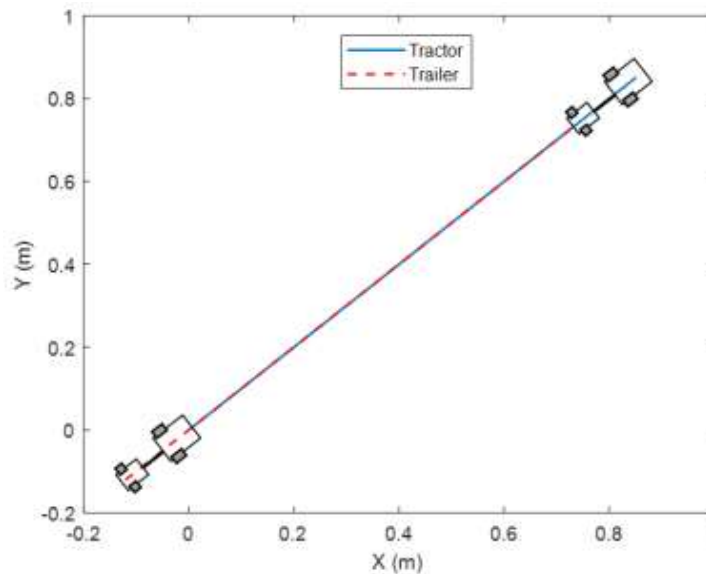


Figure 5. Trajectory obtained using PID controller

#### 4. Conclusions

One of the main challenges in controlling the tractor-trailer robot's speed is the wheel dynamics of the tractors. Therefore, to solve the expressed challenge, the dynamics of the actuators are also considered in the dynamic modeling of the tractor-trailer robot. In this article, the kinematic and dynamic equations of the tractor-trailer robot have been investigated. In the following, according to the mentioned cases, the dynamic modeling of the robot actuators has been coupled with the robot dynamics to complete the robot dynamics. After dynamic modeling of the robot using a suitable controller, the robot's speed was controlled to achieve the desired speed. According to the simulation results, the presented theory improves the performance of the designed control system. In the following, after the design of the controller, the control of the robot's position is discussed, considering the coupled dynamics. The simulation results show the system performance improvement in the controller's design to achieve the desired speed and position.



## کنترل موقعیت و سرعت ربات تراکتور-تریلر با در نظر گرفتن دینامیک چرخ‌های

## تراکتور با استفاده از کنترل کننده PID

مصطفی ناظمی زاده الف، حمیدرضا صفری ب، پویا ملاحی کلاهی ج\*

الف استادیار، مجتمع دانشگاهی مکانیک، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، ایران، [nazemi@mut-es.ac.ir](mailto:nazemi@mut-es.ac.ir)ب دانشجوی دکتری، گروه مهندسی مکانیک، دانشکده، دانشگاه علم و صنعت ایران، ایران، [h\\_safari@mecheng.iust.ac.ir](mailto:h_safari@mecheng.iust.ac.ir)ج کارشناس ارشد، مجتمع دانشگاهی مکانیک، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، ایران، [pouya.mallahi@gmail.com](mailto:pouya.mallahi@gmail.com)

واژگان کلیدی	چکیده
تراکتور-تریلر، کنترل سرعت، مدل‌سازی دینامیک، کنترل کننده PID.	ربات تراکتور-تریلر به‌عنوان یک زیرمجموعه از دسته ربات‌های متحرک در دهه‌های گذشته به‌صورت گسترده‌ای در طیف وسیعی از انواع کاربردهای مختلف از جمله مأموریت‌های نظامی و غیرنظامی به علت مزایایی چون فضای کاری وسیع‌تر، قدرت مانور بالا و حمل بار مورد استفاده قرار گرفته است. یکی از چالش‌های اصلی در کنترل سرعت ربات تراکتور-تریلر، دینامیک محرک‌های تراکتور می‌باشد. در این مقاله به‌منظور تکمیل مدل‌سازی، پس از بررسی معادلات سینماتیک و دینامیک حاکم بر ربات تراکتور-تریلر، با در نظر گرفتن دینامیک چرخ‌های تراکتور به ارائه دینامیک جفت <sup>۱</sup> شده می‌پردازد. در ادامه با استفاده از دینامیک ارائه شده، کنترل‌کننده‌ای مناسب به‌منظور کنترل سرعت ربات برای دستیابی به مقدار مطلوب و همچنین کنترل موقعیت به‌صورت نقطه‌به‌نقطه طراحی شده است. در پایان با انجام شبیه‌سازی‌های مختلف و ارائه نتایجی از قبیل ردیابی موقعیت و سرعت ربات و چرخ‌ها، کارایی و عملکرد روش پیشنهادی در مدل‌سازی دینامیک و کنترل ربات تراکتور-تریلر نشان داده می‌شود.
تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۰۱/۰۴	
تاریخ بازنگری: ۱۴۰۲/۰۱/۲۳	
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۰۳/۲۵	
تاریخ چاپ: ۱۴۰۲/۰۷/۰۹	

## ۱- مقدمه

از ویژگی‌های ربات‌های متحرک در مقایسه با ربات‌های ثابت می‌توان به فضای کاری وسیع‌تر و قدرت مانور بالا به‌منظور استفاده در انجام مأموریت‌های مختلف از جمله امداد رسانی، آتش‌نشانی و کاربردهای نظامی در دهه‌های گذشته اشاره کرد. ربات‌های متحرک چرخ‌دار یکی از متداول‌ترین نوع ربات‌های متحرک بوده و با توجه به ویژگی‌های ساختاری ربات متحرک و قيود حاکم بر مسئله منجر به بیان قيود غیرهولونومیک<sup>۲</sup> در معادلات دینامیک حرکت شده است. از این‌رو، این نوع ربات‌ها مورد توجه بسیاری از محققان علم رباتیک قرار گرفته است [۱-۵]. ناظمی زاده و همکاران [۶] به استخراج معادلات دینامیک ربات متحرک بر روی سطح شیب‌دار به‌منظور طراحی کنترل‌کننده غیرخطی مد لغزشی برای ردیابی مسیر پرداختند. در [۷] کنترل بازخورد تطبیقی برای ردیابی مسیر ربات متحرک غیرهولونومیک ارائه شد. همچنین اعذابی و نوری [۸] به طراحی یک کنترل‌کننده مقاوم ردیاب مسیر برای ربات متحرک غیرهولونومیک بر اساس روش کنترلی مد لغزشی با بهره تطبیقی پرداختند.

<sup>1</sup> couple<sup>2</sup> Nonholonomic

آن‌ها دینامیک غیرخطی ربات با اغتشاش نامعلوم را در طراحی کنترل کننده تطبیقی در نظر گرفتند.

از طرفی با توجه به تحقیقات گسترده صورت گرفته در مدل‌سازی دینامیکی و کنترل ربات‌های متحرک، اخیراً تحقیقات محدودی بر روی دسته‌ای از ربات‌های متحرک چرخ‌دار با عنوان تراکتور-تریلر انجام شده است. ربات تراکتور-تریلر مورد بررسی، متشکل از دو ربات متحرک متصل به یکدیگر می‌باشد که تنها ربات تراکتور دارای موتورهای رانش بوده و ربات تریلر دارای چرخ‌های بدون محرک بوده و صرفاً دنباله‌رو ربات اصلی است. گسترش این نوع ربات‌ها به منظور افزایش ظرفیت حمل سیستم بوده درحالی‌که هزینه ساخت و نگهداری آن‌ها بسیار کمتر از سیستم‌های دارای زنجیره‌ای از ربات‌های محرک متوالی است. لذا با توجه به ویژگی‌های ربات‌های تراکتور-تریلر، در چند دهه اخیر، برخی تحقیقات بر این نوع ربات‌های متحرک متمرکز شده است.

ناکامورا و همکاران [۹] به استخراج معادلات سینماتیکی حاکم بر ربات متحرک تراکتور-تریلر پرداختند. آن‌ها بیان کردند که این نوع ربات می‌تواند برای رسیدن به مسیر پایانی دلخواه، با استفاده از کنترل حرکت غیرهولونومیک چرخ‌ها، پایدار باشد. در [۱۰]، استخراج معادلات سینماتیکی ربات متحرک چرخ‌دار به همراه چندین ربات پیرو ارائه و کنترل پذیربری حرکت آن بررسی شد. آن‌ها تنها به مدل‌سازی سینماتیکی ربات متحرک کشنده-پیرو پرداختند درحالی‌که کنترل دقیق مسیر ربات متحرک بایستی محدودیت‌های اینرسی و گشتاور محرک‌ها را در نظر می‌گرفت. خلجی و موسویان [۱۱] از روش فیدبک<sup>۳</sup> کنترل متغیر با زمان برای کنترل و پایداری ربات متحرک کشنده-پیرو استفاده کردند. آن‌ها معادلات سینماتیکی سیستم را در نظر گرفته و از اثرات دینامیکی ربات صرف‌نظر نمودند. همچنین آن‌ها [۱۲] مدل‌سازی دینامیکی ربات متحرک کشنده دارای ربات پیرو با چرخ‌های کروی و بدون قیود غیرهولونومیک را مورد مطالعه قرار دادند. با در نظر گرفتن این نوع چرخ، مانور پذیری ربات افزایش یافته اما سیستم زیر محرک<sup>۴</sup> شده و کنترل ربات با استفاده از الگوریتم کنترل کلاسیک انجام گرفت. اگرچه معادلات سینماتیکی و دینامیکی سیستم استخراج شده است اما در بسیاری از کارهای ارائه شده از دینامیک چرخ‌های ربات متحرک کشنده-پیرو صرف‌نظر شده است. ملاحی و ناظمی زاده به مدل‌سازی دینامیک غیرخطی ربات متحرک کشنده-پیرو با در نظر گرفتن دینامیک چرخ‌های ربات تراکتور پرداختند [۱۳، ۱۴]. بدین منظور، تعداد مختصات تعمیم‌یافته سیستم نسبت به مدل‌سازی‌های پیشین افزایش یافته و لذا ماتریس‌های اینرسی و نیروهای غیرخطی ربات متحرک تراکتور-تریلر بازنویسی و همچنین به منظور استخراج معادلات دینامیکی از روش ضرایب لاگرانژ استفاده کرده و در تابع لاگرانژ سیستم، انرژی جنبشی ناشی از حرکت خطی و دورانی چرخ‌ها لحاظ شده است. سپس با استفاده از یک کنترل کننده خطی ساز فیدبک به کنترل ربات بر روی یک مسیر پرداختند. تارویردی زاده و همکاران [۱۵] به مدل‌سازی سینماتیکی و دینامیکی ربات متحرک چرخ‌دار تراکتور-تریلر پرداختند. آن‌ها از روش کنترلی خطی‌سازی فیدبک ورودی-خروجی برای کنترل ربات متحرک استفاده کردند. همچنین آن‌ها [۱۶] به مطالعه برخورد تراکتور-تریلر با یکدیگر در حین حرکت مجموعه ربات و اشباع محرک‌های آن پرداختند. آن‌ها از روش کنترلی پیش‌بین مدل خطی و غیرخطی به منظور ردیابی مسیر حرکت ربات متحرک استفاده کردند. آن‌ها قیود غیرهولونومیک حاکم بر چرخ‌های ربات تراکتور-تریلر را در نظر گرفته ولی از اثرات اینرسی چرخ‌ها صرف‌نظر کردند. ملاحی و همکاران [۱۷] به محاسبه ظرفیت حمل بار ربات متحرک تراکتور-تریلر با استفاده از نظریه کنترل بهینه غیرخطی پرداختند. در این مقاله با تعیین تابع هدف مناسب، یک الگوریتم تکراری به منظور افزایش بار ربات تریلر با در نظر گرفتن کمینه خطای نقطه پایانی و همچنین عدم اشباع گشتاور محرک‌های تراکتور در نظر گرفته شده است. در این الگوریتم شرایط بهینه‌سازی مسیر به عنوان مجموعه معادلات کوپله غیرخطی در نظر گرفته شده و ظرفیت حمل بار در مسیر بهینه نقطه به نقطه ربات متحرک محاسبه می‌شود. شجاعی و همکاران [۱۸] با استفاده از یک کنترل کننده مبتنی بر مشاهده‌گر برای یک تراکتور-تریلر به کنترل موقعیت آخرین تریلر در مسیر مشخص بدون هیچ‌گونه انحراف و چرخش در مسیر پرداختند.

همان‌طور که بیان گردید، مقالات متعددی به استخراج معادلات سینماتیکی و دینامیکی و کنترل مسیر ربات‌های متحرک چرخ‌دار تراکتور-تریلر پرداخته‌اند. از طرفی با توجه به عدم مدل‌سازی دقیق چرخ‌های ربات در معادلات دینامیکی سیستم در ادبیات موضوع، نیاز به استخراج معادلات دینامیکی حاکم بر ربات‌های متحرک تراکتور-تریلر همراه با در نظر گرفتن دینامیک

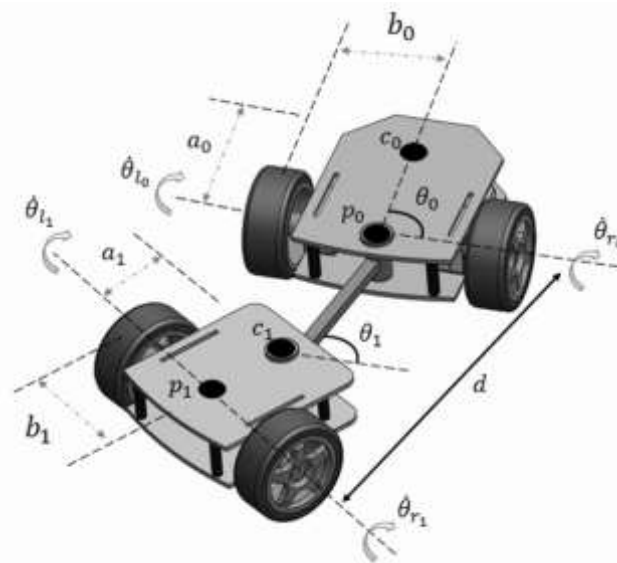
<sup>3</sup> Feedback

<sup>4</sup> Under-actuated

چرخ‌ها ضروری می‌باشد. لذا در این مقاله، ابتدا به مدل‌سازی دینامیک غیرخطی ربات متحرک تراکتور-تریلر پرداخته می‌شود و سپس دینامیک چرخ‌های ربات تراکتور به صورت جفت شده با آن در نظر گرفته می‌شود. سپس با استفاده از این دینامیک جفت شده و همچنین کنترل کننده PID به کنترل موقعیت و سرعت ربات به منظور دستیابی به موقعیت و سرعت مطلوب پرداخته می‌شود. در ادامه مقاله به شرح ذیل نگارش خواهد شد: در بخش دوم معادلات دینامیک غیرخطی ربات‌های متحرک تراکتور-تریلر استخراج می‌شود. در بخش سوم روش کنترل سرعت و موقعیت با استفاده از دینامیک جفت شده تشریح می‌شود و در بخش بعدی شبیه‌سازی‌های متنوعی برای کنترل سرعت به منظور دستیابی به سرعت مطلوب و موقعیت ارائه می‌شود. همچنین در بخش آخر به بیان نتیجه‌گیری مقاله پرداخته می‌شود.

## ۲- معادلات سینماتیک و دینامیک ربات تراکتور-تریلر

در این بخش به بررسی معادلات سینماتیک و دینامیک ربات نشان داده شده در شکل ۱ پرداخته می‌شود. ربات مورد بررسی شامل یک بخش تراکتور با دو چرخ محرک و مستقل و یک تریلر با چرخ‌های غیرفعال می‌باشد.



شکل ۱ شماتیک ربات تراکتور-تریلر

مطابق با شکل ۱، پارامترهای مربوط به ربات تراکتور-تریلر عبارت است از:  $c_1$  و  $c_0$  به ترتیب مرکز جرم ربات تراکتور و تریلر،  $2b_1$  و  $2b_0$  فاصله چرخ‌های ربات تراکتور و تریلر از یکدیگر،  $a_1$  و  $a_0$  فاصله میانی چرخ‌های تراکتور و تریلر تا مرکز جرم،  $d$  فاصله نقاط  $p_0$  و  $p_1$ ،  $\theta_0$  و  $\theta_1$  جهت گیری ربات تراکتور و تریلر، سرعت زاویه‌ای چرخ راست و چپ ربات تراکتور به ترتیب برابر با  $\dot{\theta}_{r_0}$  و  $\dot{\theta}_{r_1}$  می‌باشد. برای ربات تراکتور-تریلر ماتریس قیدی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$A(q) = \begin{pmatrix} \sin\theta_1 & -\cos\theta_1 & 0 & d \\ \sin\theta_0 & \cos\theta_0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

ماتریس قیدی بیانگر قیود غیرهولونومیک عدم لغزش جانبی ربات‌های تراکتور و تریلر می‌باشد. به منظور بیان معادلات، فضای پوچی این ماتریس برابر است با:

$$S(q) = \begin{pmatrix} \cos\theta_0 & 0 \\ \sin\theta_0 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{1}{d}\sin(\theta_0 - \theta_1) & 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

بنابراین مدل سینماتیکی ربات تراکتور-تریلر با در نظر گرفتن  $v$  به عنوان بردار شامل سرعت خطی و سرعت زاویه‌ای ربات



به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\vec{q} = Sv \quad (۳)$$

از طرفی با توجه به قیود غیرهولونومیک حاکم بر ربات متحرک تراکتور-تریلر، از اصل ضرایب لاگرانژ برای استخراج معادلات ربات به صورت زیر استفاده می‌شود:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial q_k} \right) = f_k - \sum_{i=1}^n \lambda_i a_{ik} \quad (۴)$$

که در آن  $n$  تعداد قیود سیستم،  $\lambda_i$  ضرایب لاگرانژ،  $f_k$  نیروهای تعمیم یافته و  $L$  تفاوت انرژی جنبشی و پتانسیل سیستم می‌باشد. لذا با بیان انرژی جنبشی سیستم و جاگذاری در اصل ضرایب لاگرانژ، در نهایت معادله دینامیک سیستم برابر است با:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q}) = B(q)\tau + A^T(q)\lambda \quad (۵)$$

که در رابطه بالا ماتریس اینرسی  $M(q)$ ، ماتریس نیروهای غیرخطی  $C(q, \dot{q})$  و ماتریس ضرایب  $B(q)$  برابر است با [۱۴]:

$$M = \begin{bmatrix} m_0 + m_1 & 0 & -a_0 m_0 \sin \theta_0 & -m_1 (a_1 - d) \sin \theta_1 \\ 0 & m_0 + m_1 & a_0 m_0 \cos \theta_0 & m_1 (a_1 - d) \cos \theta_1 \\ -a_0 m_0 \sin \theta_0 & a_0 m_0 \cos \theta_0 & m_1 (a_1 - d)^2 + I_1 & 0 \\ -m_1 (a_1 - d) \sin \theta_1 & m_1 (a_1 - d) \cos \theta_1 & 0 & m_1 a_0^2 + I_0 \end{bmatrix} \quad (۶)$$

$$C = \begin{bmatrix} -a_0 m_0 \cos \theta_0 \dot{\theta}_0^2 - m_1 (a_1 - d) \cos \theta_1 \dot{\theta}_1^2 \\ -a_0 m_0 \sin \theta_0 \dot{\theta}_0^2 - m_1 (a_1 - d) \sin \theta_1 \dot{\theta}_1^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (۷)$$

$$B = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} \cos \theta_0 & \cos \theta_0 \\ \sin \theta_0 & \sin \theta_0 \\ b & -b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (۸)$$

همچنین  $m_0$  و  $m_1$  و  $I_0$  و  $I_1$  به ترتیب بیانگر جرم و ممان اینرسی بخش تراکتور و تریلر ربات می‌باشد و  $a_0$  و  $a_1$  برابر با فاصله میان مراکز جرم و نقطه میانی چرخ‌ها،  $r$  شعاع چرخ‌های ربات مورد بررسی می‌باشد. به منظور حذف ضرایب لاگرانژ از رابطه (۵)، این رابطه در  $S^T$  ضرب شده و رابطه نهایی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\bar{M}(q)\ddot{q} + \bar{C}(q, \dot{q}) = \bar{B}(q)\tau \quad (۹)$$

که در معادلات دینامیکی نهایی، روابط زیر برقرار می‌باشد:

$$\bar{M} = S^T M S \quad (۱۰)$$

$$\bar{C} = S^T (M S \dot{v} + C) \quad (۱۱)$$

$$\bar{B} = S^T B \quad (۱۲)$$

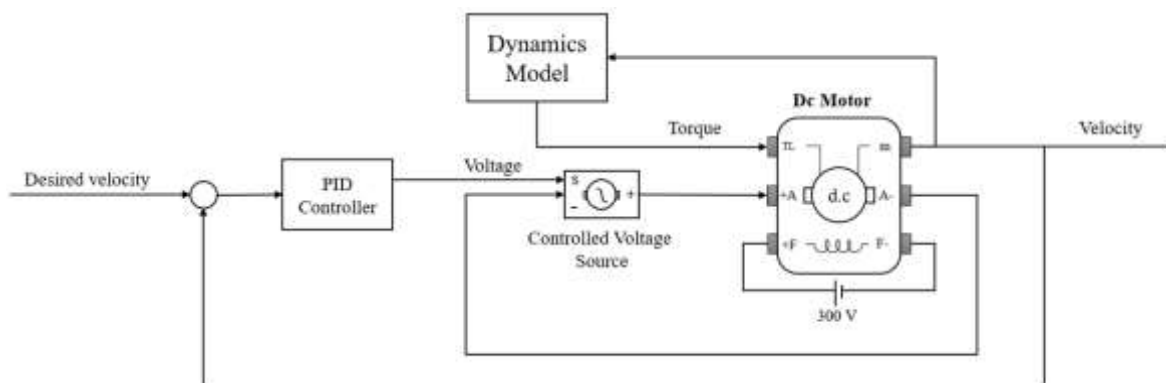
بردار حالت ربات کشنده-پیرو برابر با  $X = [x \ y \ \theta_0 \ \theta_1 \ v \ \omega]$  در نظر گرفته شده است.

### ۳- کنترل سرعت و موقعیت ربات تراکتور-تریلر

#### ۳-۱- کنترل سرعت ربات تراکتور-تریلر

در این قسمت با در نظر گرفتن دینامیک موتور چرخ‌های تراکتور به مسئله کنترل سرعت چرخ‌ها به منظور دستیابی به سرعت مطلوب پرداخته می‌شود. برای کنترل سرعت موتور، ولتاژ آرمیچر به ۲۴۰ ولت محدود می‌شود و دینامیک قسمت تراکتور و موتور به صورت یک دینامیک در نظر گرفته می‌شود. در ربات تراکتور از دو موتور استفاده شده است که چرخ سمت چپ به یک موتور و چرخ سمت راست به موتوری دیگر متصل است. در شکل ۲، نمودار کنترل کننده یکی از چرخ‌های تراکتور نشان داده شده است.





شکل ۲ بلوک دیاگرام کنترلی ارائه شده به منظور کنترل چرخ تراکتور

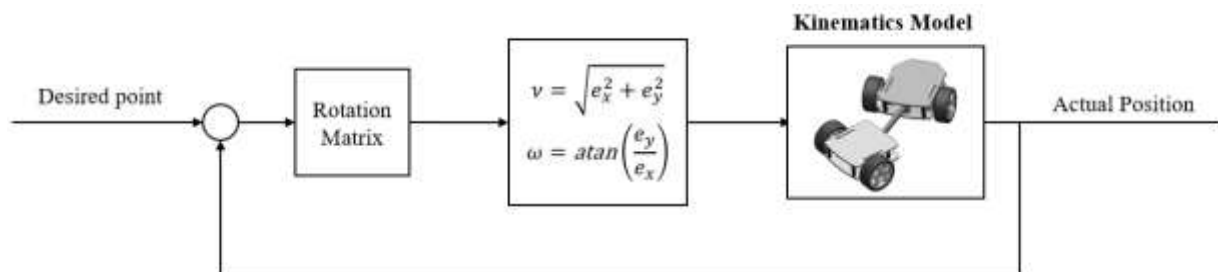
مطابق شکل ۲، از یک کنترل کننده PID و از طریق محاسبه خطای بین خروجی مطلوب و خروجی اندازه‌گیری شده، به عنوان سیگنال ورودی برای کنترل سرعت چرخ استفاده شده است.

$$u(t) = K_p e(t) + K_d \dot{e}(t) + K_i \int e(t) \quad (۱۳)$$

که در آن  $u(t)$  سیگنال ورودی تراکتور،  $e(t)$  سیگنال خطا،  $K_p$ ،  $K_d$  و  $K_i$  بهره متناسب، بهره مشتق و بهره انتگرال کنترل کننده PID هستند. ورودی‌های موتور در نظر گرفته شده شامل ولتاژ و گشتاور خروجی کنترلر است. با استفاده از سرعت موتور به عنوان یکی از خروجی‌های آن و دینامیک معکوس ربات، گشتاور محاسبه شده و سرعت واقعی با سرعت مورد نظر مقایسه خواهد شد.

### ۳-۲- کنترل موقعیت ربات تراکتور-تریلر

در این قسمت کنترل موقعیت ربات برای رسیدن به نقطه هدف بررسی می‌شود. شکل ۳ بلوک دیاگرام روش کنترل ربات مورد بررسی به صورت نقطه به نقطه نشان داده شده است.



شکل ۳ بلوک دیاگرام کنترل موقعیت ربات تراکتور-تریلر

با توجه به دیاگرام ارائه شده در شکل ۳، خطای موقعیت در هر لحظه از زمان به صورت معادله ۱۴ به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} e_x &= x_{desired} - x_{actual} \\ e_y &= y_{desired} - y_{actual} \end{aligned} \quad (۱۴)$$

سپس مقدار سرعت خطی و زاویه‌ای ربات به منظور دست‌یابی به نقطه مورد نظر محاسبه می‌شود. سپس با توجه به دیاگرام توضیح داده شده در شکل ۲ این سرعت‌ها مستقیماً وارد کنترل کننده PID می‌شوند.

### ۴- شبیه‌سازی و نتایج

در این بخش به شبیه‌سازی حرکت ربات به منظور نشان دادن عملکرد تئوری ارائه شده پرداخته می‌شود. مشخصات ربات

مورد بررسی و موتور در نظر گرفته شده در جدول ۱ و ۲ نشان داده شده است.

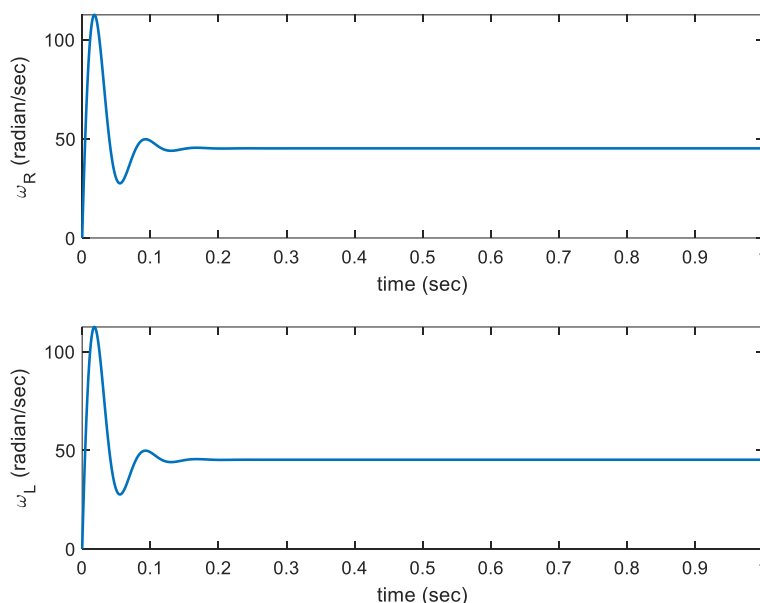
جدول ۱ مشخصات پارامتری ربات تراکتور-تریلر

Parameter	Value	Unit
Mass of Tractor and trailer	$m_0 = 0.9 \quad m_1 = 0.33$	kg
Distance from wheels to center of the robot	$a_0 = 0.029 \quad a_1 = 0$	m
Moment of inertia of Tractor and trailer	$I_0 = 0.0035 \quad I_1 = 0.00078$	kg.m <sup>2</sup>
Radius of wheels	$r = 0.026$	m
Mass of each wheel	$M_w = 0.005$	kg
Moment of inertia of each wheel	$I_{w_1} = I_{w_0} = 0.00005$	kg.m <sup>2</sup>

جدول ۲ مشخصات پارامتری موتور مورد بررسی برای ربات قسمت تراکتور

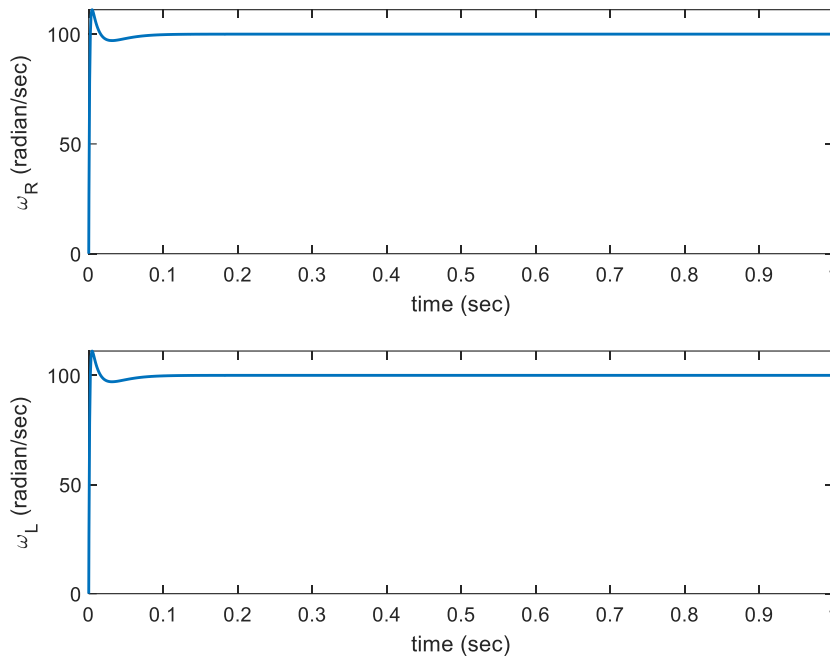
Parameter	Notation	Values
Armature resistance	$R_a$	0.1113Ω
Armature inductance	$L_a$	0.001558 H
Field resistance	$R_f$	84.91 Ω
Field inductance	$L_f$	13.39 H
Field-armature mutual inductance	$L_{af}$	0.3406 H
Total inertial	$J$	0.2053
Viscous friction coefficient	$B_m$	0.007032
Coulomb friction torque	$T_f$	5.286

در ادامه به شبیه‌سازی کنترل سرعت ربات تراکتور-تریلر به منظور دستیابی به سرعت مرجع ۱۰۰ رادیان بر ثانیه برای هر دو چرخ سمت چپ و راست تراکتور پرداخته می‌شود. پاسخ حلقه باز ربات بدون در نظر گرفتن کنترل کننده در شکل ۴ نشان داده شده است.



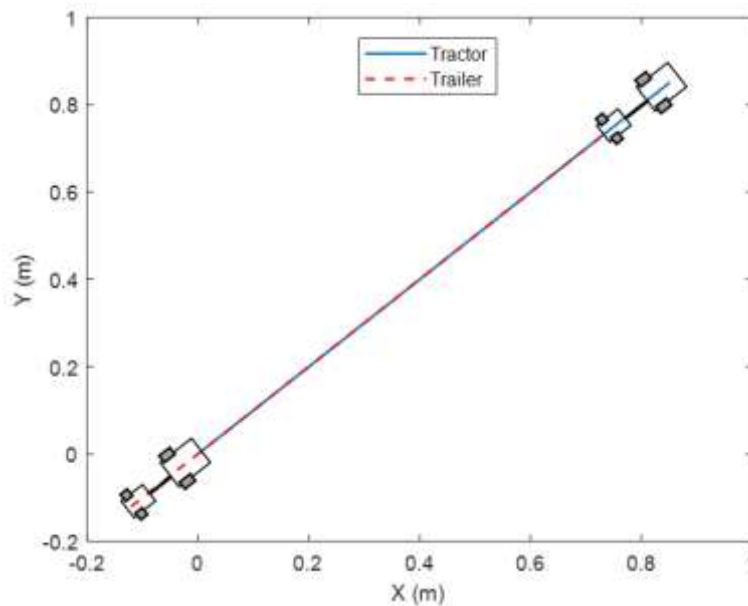
شکل ۴ سرعت زاویه‌ای چرخ‌های راست و چپ ربات تراکتور نسبت به زمان بدون در نظر گرفتن کنترل کننده

باتوجه به نتیجه حاصل از شبیه‌سازی، سرعت خروجی ربات تراکتور ۵۰ رادیان بر ثانیه می‌باشد که دارای خطای قابل توجهی در مقایسه با سرعت مطلوب ورودی می‌باشد. از این رو لازم است با استفاده از یک کنترل کننده مناسب برای جبران خطای ایجاد شده به منظور دستیابی به سرعت مطلوب استفاده شود. با توجه به مطالب بیان شده از یک کنترل کننده PID برای دستیابی به سرعت مطلوب استفاده می‌شود. شکل ۵ سرعت ربات با استفاده از کنترل کننده پیشنهاد شده را نشان می‌دهد.



شکل ۵ سرعت زاویه‌ای چرخ‌های راست و چپ ربات تراکتور نسبت به زمان با استفاده از کنترل کننده PID

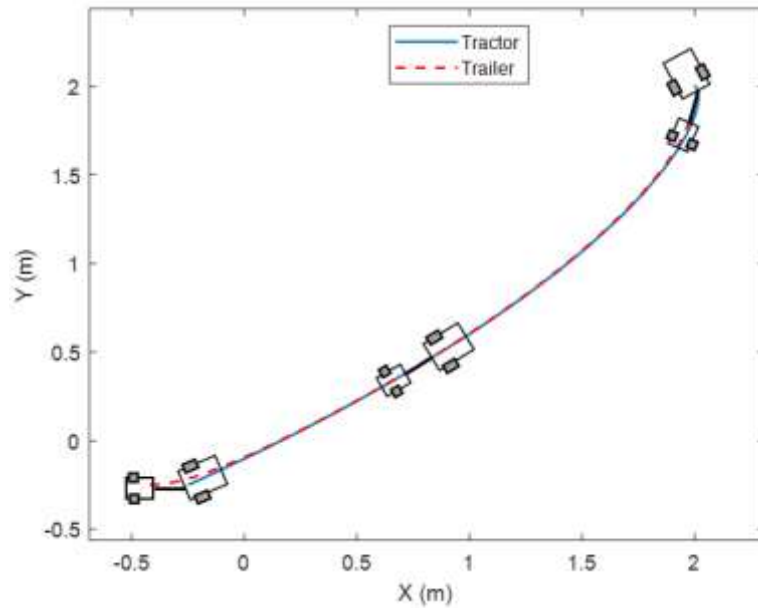
با توجه به نتایج حاصل از شبیه‌سازی و کنترل کننده پیشنهاد شده در مدت زمان ۰/۱۵ ثانیه، ربات به سرعت مطلوب همگرا شده است. با توجه به شرایط اولیه در نظر گرفته شده برای ربات تراکتور-تریلر  $q = [0 \quad 0 \quad \frac{\pi}{4} \quad \frac{\pi}{4}]$ ، مسیر حرکت ربات به صورت یک خط مستقیم در شکل ۶ نشان داده شده است.



شکل ۶ مسیر حرکت ربات با استفاده از سرعت‌های ورودی

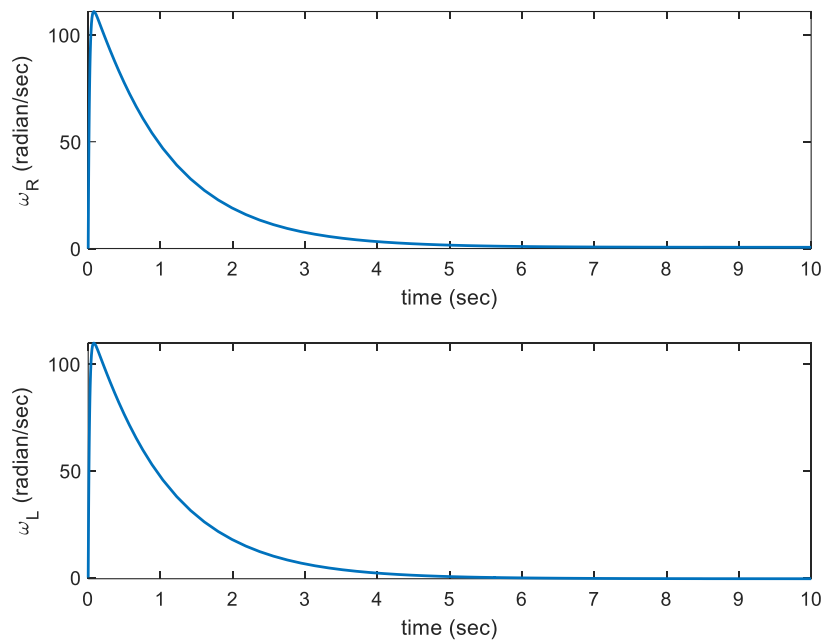
همان گونه که انتظار می‌رود با توجه به سرعت برابر در نظر گرفته شده برای هر یک از چرخ‌ها سمت چپ و راست در شبیه‌سازی، مسیر به دست آمده به صورت مستقیم می‌باشد. در ادامه به کنترل موقعیت ربات برای رسیدن به نقطه مطلوب پرداخته می‌شود.

در این شبیه‌سازی، موقعیت اولیه ربات  $q_{initial} = [-0.25 \quad -0.25 \quad \frac{\pi}{6} \quad 0]$  و موقعیت هدف  $q_{destination} = [2 \quad 2]$  در نظر گرفته می‌شود. سیگنال خطا در هر لحظه محاسبه شده و به عنوان ورودی به کنترل کننده PID اعمال می‌شود. شکل ۷ مسافت طی شده توسط ربات تا رسیدن به نقطه مورد نظر را نشان می‌دهد.



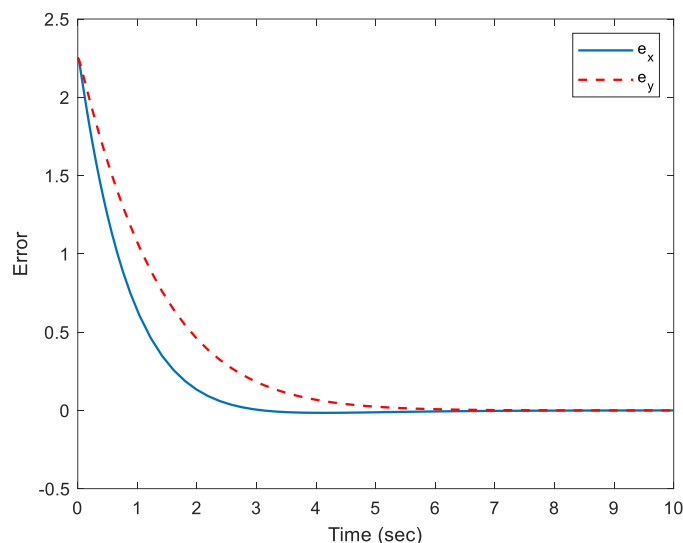
شکل ۷ مسیر حرکت ربات با استفاده از کنترل کننده پیشنهاد شده به منظور دستیابی به موقعیت مطلوب

همچنین سرعت چرخ‌های ربات با توجه به مسیر حرکت در شکل ۸ نشان داده شده است.



شکل ۸ سرعت زاویه ای ربات تراکتور به منظور دستیابی به موقعیت مطلوب

مطابق با شکل ۸، سرعت چرخ‌های ربات با گذشت زمان و نزدیک شدن به نقطه مورد نظر به سمت صفر میل می‌کند. در شکل ۹ خطای موقعیت نسبت به زمان نشان داده شده است.



شکل ۹ خطای ردیابی مسیر حرکت ربات با استفاده از کنترل کننده پیشنهاد شده به منظور دستیابی به موقعیت مطلوب

با توجه به خطای موقعیت به دست آمده، کنترل کننده ارائه شده ربات را از حالت اولیه تا نقطه هدف کنترل کرده است.

## ۵- نتیجه گیری

یکی از چالش‌های اصلی در کنترل سرعت ربات تراکتور-تریلر، دینامیک محرک‌های تراکتور می‌باشد؛ بنابراین برای حل چالش بیان شده، دینامیک محرک‌ها نیز در مدل‌سازی دینامیکی ربات تراکتور تریلر در نظر گرفته شده است. در این مقاله ابتدا به بررسی معادلات سینماتیک و دینامیک ربات تراکتور تریلر پرداخته شده است. در ادامه با توجه به موارد بیان شده برای تکمیل دینامیک ربات، مدل‌سازی دینامیکی محرک‌های ربات به صورت جفت شده با دینامیک ربات انجام شده است. پس از مدل‌سازی دینامیکی ربات با استفاده از کنترل کننده‌ای مناسب، سرعت ربات برای دستیابی به سرعت مطلوب کنترل شده است. با توجه به نتایج حاصل از شبیه‌سازی، تئوری ارائه شده باعث بهبود عملکرد سیستم کنترلی شده است. در ادامه پس از طراحی کنترل کننده به کنترل موقعیت ربات با در نظر گرفتن دینامیک جفت شده پرداخته شده است. نتایج حاصل از شبیه‌سازی بهبود عملکرد سیستم را در طراحی کنترل کننده به منظور دستیابی به سرعت و موقعیت مطلوب را نشان می‌دهد.

## ۶- مراجع

- [1] Yousuf B M, Khan A S, Khan S M. Dynamic Modeling and Tracking for Nonholonomic Mobile robot using PID and Back Stepping. *Advanced Control for Applications: Engineering and Industrial Systems*. 2021;71.
- [2] Nazemizadeh M, Mallahi Kolahi P. Trajectory Tracking of an Intelligent Mobile Robot on a Slope Surface using the Nonlinear Sliding Mode Control. *Mechanic of Advanced and Smart Materials*. 2021;1:1-14. (In Persian)
- [3] Korayem M H, Nazemizadeh M, Rahimi H N. Trajectory optimization of nonholonomic mobile manipulators departing to a moving target amidst moving obstacles. *Acta Mechanica*. 2013;5:995-1008.
- [4] Sadedel M, Ebrahimi M. simulation and control of omni-directional mobile robot. *The Iranian Journal of Mechanical Engineering*. 2021;24:181-207. (In Persian)
- [5] Korayem M H, Nazemizadeh M, Nohooji H R. Smooth jerk-bounded optimal path planning of tricycle wheeled mobile manipulators in the presence of environmental obstacles. *International Journal of Advanced Robotic Systems*. 2012;9:105.
- [6] Nazemizadeh M, Mallahi Kolahi P. Trajectory Tracking of an Intelligent Mobile Robot on a Slope Surface using the Nonlinear Sliding Mode Control. *Mechanic of Advanced and Smart Materials*. 2021;1:1-14.

- [7] Huang J, Wen C, Wang W, Jiang Z P. Adaptive output feedback tracking control of a nonholonomic mobile robot. *Automatica*. 2014;50:821-831.
- [8] Azzabi A, Nouri K. Design of a robust tracking controller for a nonholonomic mobile robot based on sliding mode with adaptive gain. *International Journal of Advanced Robotic Systems*. 2021;1-18.
- [9] Nakamura Y, Ezaki H, Chung W. Design of steering mechanism and control of nonholonomic trailer systems. *Journal of the Robotics Society of Japan*. 1999;17:839-847.
- [10] Altafini C. Some properties of the general n-trailer. *International Journal of Control*. 2021;74:409-424.
- [11] Khalaji A K, Moosavian S A A. Stabilization of a tractor-trailer wheeled robot. *Journal of Mechanical Science and Technology*. 2016;30:421-428.
- [12] Khanpoor A, Khalaji A K, Moosavian S A A. Modeling and control of an underactuated tractor-trailer wheeled mobile robot. *Robotica*. 2017;35: 2297-2318.
- [13] Mallahi Kolahi P, Nazemizadeh M. Nonlinear dynamic modeling of tractor-trailer mobile robots with consideration of wheels inertia and their optimal point-to point path planning. *Meccanica*. 2022;25: 1-9.
- [14] Nazemizadeh M, Mallahi Kolahi P. Derivation of nonlinear dynamic equations of tractor-trailer mobile robots and their motion control employing input-output linearization control method. *The Iranian Journal of Mechanical Engineering*. 2022;24:92-106.
- [15] Tarvirdizadeh B, Spanogianopoulos S, Alipour K. Control of Nonholonomic Electrically-Driven Tractor-Trailer Wheeled Robots based on Adaptive Partial Linearization. 6th RSI International Conference on Robotics and Mechatronics (IcRoM). 2018;331-336.
- [16] Kassaeiyan P, Tarvirdizadeh B, Alipour K. Control of tractor-trailer wheeled robots considering self-collision effect and actuator saturation limitations. *Mechanical Systems and Signal Processing*. 2019;127:388-411.
- [17] Mallahi Kolahi P, Nazemizadeh M. Load carrying capacity of tractor-trailer mobile robots considering the nonlinear optimal control. *Mechanical Engineering Journal*. 2022;30:77-84. (In Persian)
- [18] Shojaei, K, Taghavifar H. Input-output feedback linearization control of a tractor with n-trailers mechanism considering the path curvature. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*. 2022; 236: 9700-9715.