Mechanics of Advanced and Smart Materials Journal 4(1) (2024) 40 – 63

Mechanics of Advanced and Smart Materials Journal

http://masm.araku.ac.ir

ISSN: 2783-4220

Natural Frequency analysis of Multi-directional Functionally Graded Rectangular Plates on elastic Foundation using Three-dimensional Elasticity Theory

Mahdi Adineh [a*]

[a] Department of Mechanical Engineering, University of Gonabad, Gonabad, 9691957678, Iran

Original Article

Use your device to scan and read the article online

Citation: Adineh M. Natural Frequency analysis of Multi-directional Functionally Graded Rectangular Plates on elastic Foundation using Three-dimensional Elasticity Theory. Mechanics of Advanced and Smart Materials. 2024;4(1):40-63.

https://10.61186/masm.4.1.40

KEYWORDS

Natural frequency,
Functionally graded plate,
Three-dimensional elasticity.

ABSTRACT

In the present study, the natural frequencies of rectangular plates made of multi-directional functionally graded materials on an elastic substrate was investigated for the first time. The mechanical properties of the material in the examined plate can be changed in all three coordinate directions according to a power law function. Equations of motion are written according to the three-dimensional theory of elasticity and then discretized using the method of Generalized Differential Quadratics. By comparing the results of several examples in the published articles, the validity of the method and the solution was examined, indicating the high accuracy of the method used. The influence of a change in direction on the mechanical properties is examined using several examples and the results are examined. In addition, the effects of plate thickness, plate dimension ratio and the effects of elastic foundation parameters for different boundary conditions were investigated and presented in the form of diagrams. The results show that the direction of change in material properties can have a significant effect on the natural frequency of the plate.

Extended Abstract

1. Introduction

In recent years, the investigation of the mechanical behaviors of functionally graded rectangular plates, including their free vibrations, has garnered significant attention from researchers [1-18]. A review of the literature reveals that the vibrations of plates made from multi-directional functionally graded materials have received less attention [19,20]. Tahouneh and Naei [21] studied the free vibrations of two-directional functionally graded plates on an elastic foundation with two opposite simply supported edges using three-dimensional elasticity theory. Khorshidi et al. [22] studied the effect of a thermal environment on the free vibrations of functionally graded rectangular plates on an elastic foundation using one of the plate theories. Adineh and Kadkhodayan [23] investigated the bending and dynamic response of skew plates made from multi-directional functionally graded materials on an elastic foundation. Yin et al. [24] performed free vibrations and buckling of in-plane functionally graded plates using higher-order shear deformation theory and the Isogeometric method. Thai et al. [19] investigated the three-dimensional bending and free vibrations of multi-directional functionally

* Corresponding author. Tel.: +989156190256
E-mail address: mahdi.adineh@gonabad.ac.ir
DOI: https://10.61186/masm.4.1.40.
Received: April 13, 2024; Received in revised form: May 14, 2024; Accepted: May 20, 2024

graded rectangular plates in a thermal environment using the Isogeometric method. Xiang et al. [25] conducted a three-dimensional solution for the free vibrations and buckling of rectangular plates with gradual variations of material properties in two in-plane directions.

By reviewing published articles, it can be observed that there have been few studies on the natural frequencies of multi-directional functionally graded rectangular plates using three-dimensional elasticity theory. The existing studies have limitations such as limited boundary conditions type, limited material distribution, and neglecting the effects of an elastic foundation [19, 21, 24, 25]. As the thickness of the plate increases, the errors in plate theories also increase [26]. Therefore, the use of three-dimensional elasticity theory for plates is crucial. Additionally, in many structural applications involving beams [27] and plates [21], considering an elastic foundation is effective in bringing analyses closer to reality. In this study, for the first time, the natural frequencies of such plates were investigated using a generalized three-dimensional differential quadrature method. This solution method allows for the consideration of material variations in all coordinate directions and the independent definition of support conditions for each edge. Comparing the obtained results with those in published articles shows good agreement. The influence of various parameters such as material distribution indices, thickness, and length-to-width ratio on free vibrations has been examined. Since this study utilized three-dimensional elasticity theory, the results obtained can serve as a suitable reference for validating future work.

1. 2. Problem definition

Consider a functionally graded rectangular plate on an elastic foundation, similar to that shown in Figure 1. The parameters *a*, *b*, and *h*, which are used in this article to represent the dimensions of the plate, are also specified in the figure.

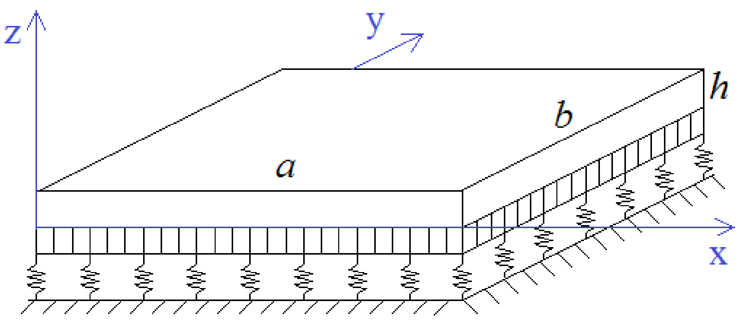


Figure 1. Multi-Directional Functionally Graded Rectangular Plate on an Elastic Foundation

2. Material Distribution

In this research, the material properties can vary in all three coordinate directions. The plate is composed of two phases. The functionally graded material distribution follows the rule of linear mixture according to the following equation:

$$\mathrm{P} = (\mathrm{P}_1 - \mathrm{P}_2)\mathrm{V}_1 + \mathrm{P}_2 \tag{1}$$

In the above equation, P represents each of the material properties, such as the modulus of elasticity, and V_1 and V_2 are the volume fractions of each of the phases forming the plate, with the following relationship between them:

$$\mathrm{V}_1 + \mathrm{V}_2 = 1 \quad , \quad \mathrm{V}_1 = \left(\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{a}}\right)^{\mathrm{n_x}} \left(\frac{\mathrm{y}}{\mathrm{b}}\right)^{\mathrm{n_y}} \left(\frac{\mathrm{z}}{\mathrm{h}}\right)^{\mathrm{n_z}} \tag{2}$$

n_x, n_y, and n_z are called the material distribution indices of the material distribution function.

3. Equations and Boundary Conditions

The equations of motion in Cartesian coordinates based on three-dimensional elasticity theory are as follows:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \qquad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{3}$$

The stress components in the above equations are related to the corresponding strain components as follows:

$$\sigma_x = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_x + \nu(\varepsilon_y + \varepsilon_z)\right] \tag{4}$$

$$\sigma_y = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_y + \nu(\varepsilon_x + \varepsilon_z)\right] \tag{5}$$

$$\sigma_z = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_z + \nu(\varepsilon_x + \varepsilon_y)\right] \tag{6}$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{(1+\nu)}\varepsilon_{xy}, \tau_{xz} = \frac{E}{(1+\nu)}\varepsilon_{xz}, \tau_{yz} = \frac{E}{(1+\nu)}\varepsilon_{yz} \tag{7}$$

The strain components also relate to the deformations as follows:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right), \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right), \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \tag{8}$$

By combining equations 3 to 8, the equations of motion based on the strain components can be derived. The boundary conditions used are defined as follows:

$$\begin{array}{llll} \text{SSSS} & \begin{cases} x = 0, a \to v = w = \sigma_x = 0 \\ y = 0, b \to u = w = \sigma_y = 0 \end{cases} & \text{CCCC} & \begin{cases} x = 0, a \\ y = 0, b \end{cases} \to u = 0, v = 0, w = 0 \\ \text{SCSC} & \begin{cases} S: x = 0, a \to v = w = \sigma_x = 0 \\ C: y = 0, b \to u = v = w = 0 \end{cases} & \text{CFCF} & \begin{cases} C: x = 0, a \to u = v = w = 0 \\ F: y = 0, b \to \sigma_y = \tau_{xy} = \tau_{yz} = 0 \end{cases} \end{array} \tag{9}$$

Additionally, boundary conditions on the top and bottom surfaces of the plate are introduced as follows:

$$\sigma_z = 0, \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \text{ at } z = h \tag{10}$$

$$\sigma_z = k_w w - k_{sx}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - k_{sy}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \text{ at } z = 0 \tag{11}$$

In equation 11, the parameters of the elastic foundation are according to the following relationships:

$$k_w = \frac{K_w D_c}{a^4}, k_{sx} = \frac{K_{sx} D_c}{a^2}, k_{sy} = \frac{K_{sy} D_c}{b^2}, D_c = \frac{E_c h^3}{(12(1-\nu_c{}^2))} \tag{12}$$

In the above equation, K_{sx}, K_{sy}, and K_w are constant values that determine the stiffness of the elastic foundation. E_c and ν_c are the modulus of elasticity and Poisson's ratio of one of the phases forming the functionally graded material.

4. Differential Quadrature Method

In this paper, the differential quadrature method is used to discretize the equations.

5. Calculation of Natural Frequencies

To obtain the natural frequencies, the nodal points related to the motion equations (d) and the nodal points where the boundary conditions are determined (b) are separated. As a result, the stiffness matrix is also divided into four separate parts. Using the calculated matrices and solving the eigenvalue problem, the natural frequencies are obtained.

6. Validation

To validate the results, the natural frequencies of several similar plates have been compared with the results from references [28], [29], [30], [17], [31], [32], [33], [21], [24], [25] and [19], revealing a good agreement.

7. Numerical Results

A rectangular plate with functionally graded materials that can vary in all three coordinate directions has been investigated. The constituent materials of the plate are Si3N4 and SUS304.

The influence of a material property variations, plate thickness, plate dimension ratio and elastic foundation parameters on the first natural frequency for different boundary conditions were investigated and the results presented in similar figures to those shown below.

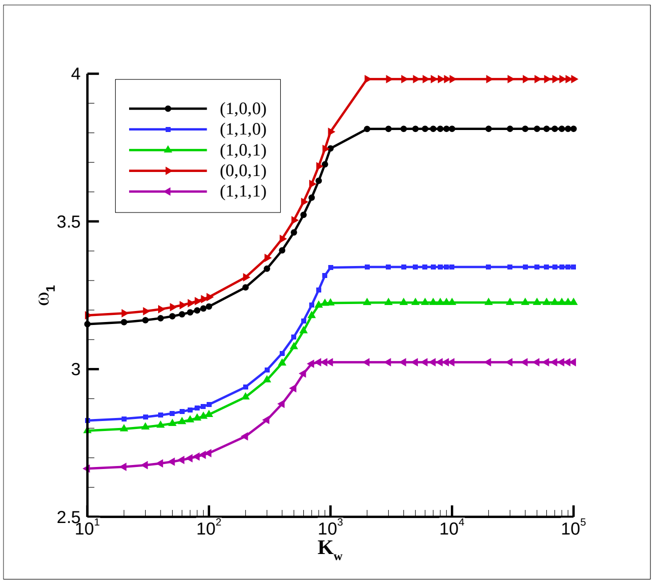


Figure 2. Variation of the first natural frequency of a multi-directional functionally graded rectangular plate with power-law distribution exponents (n_x, n_y, n_z) under SSSS boundary conditions on an elastic foundation against K_w. (a=1 m, b=1 m, h=0.1 m, K_{sx}=K_{sy}=100)

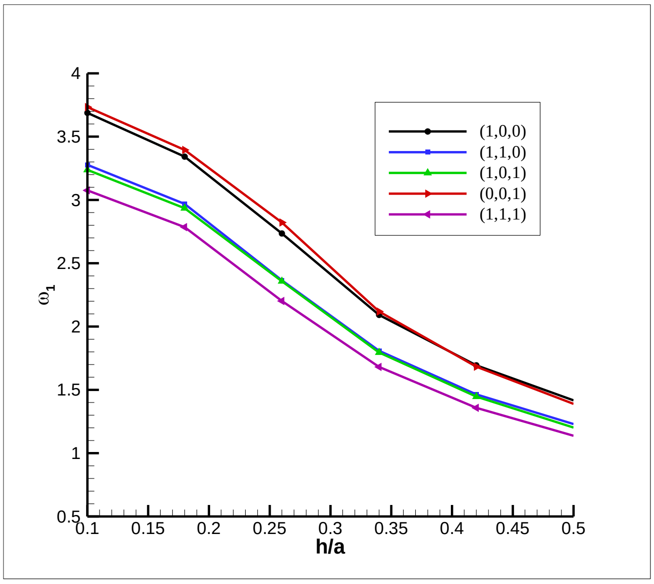


Figure 3. Variation of the first natural frequency of a multi-directional functionally graded rectangular plate with power-law distribution exponents (n_x, n_y, n_z) under clamped conditions (CCCC) on an elastic foundation against an increase in thickness. The dimensions of the plate are a=b=1 m, and the elastic foundation coefficients are K_w=K_{sx}=K_{sy}=100.

8. Conclusion

In this research, for the first time, the free vibrations of a functionally graded rectangular plate with a multi-directional power distribution function, which can vary in all directions, were studied on an elastic foundation using three-dimensional elasticity theory and independent support conditions. The generalized differential quadrature method was employed for discretizing the equations. Various aspects such as the effect of material property variations, the influence of elastic foundation parameters, support conditions, and geometric dimensions ratios of the plate were investigated. The results indicated that material property variations (in thickness direction, in-plane, or different combinations) could have a significant impact on the natural frequency of the plate. Additionally, the manner in which material property variations affect the plate can be influenced by factors such as geometric dimension ratios and support conditions, which were reported in graphical form. Based on the results of this study, it can be inferred that in cases where the volumes of the constituent phases of the two plates are equal, the material distribution direction can create different frequencies. The results also showed that within the studied range, increasing the elastic foundation coefficients how can effect on the natural frequencies of different plates with different material distributions. Furthermore, it was observed that increasing the length-to-width ratio of the plate could change their natural frequencies. The impact of changing the plate thickness on the natural frequency also demonstrated that increasing the thickness of the plates under investigation led to a decrease in their first natural frequency. Increasing the size of the material distribution indices in all plates resulted in a decrease in the first natural frequency due to the materials' properties approaching those of the metal phase. Additionally, studying the effect of the support type showed that changing the support conditions from free support to simply supported and then to clamped support led to an increase in the first natural frequency of the plate.

مکانیک مواد پیشرفته و هوشمند، دوره ۴ شماره ۱ سال ۱۴۰۳ صفحات ۴۰ تا ۶۳

M A.S.M
مجله علمی مکانیک مواد پیشرفته و هوشمند

مکانیک مواد پیشرفته و هوشمند

شاپا: ۲۷۸۳-۴۲۲۰

دانشگاه اراک
۱۳۵۰

مطالعه فرکانس‌های طبیعی ورق مستطیلی مدرج تابعی چندجهته روی بستر الاستیک با استفاده از تئوری الاستیسیته سه‌بعدی

مهدی آدینه [الف*]

[الف] استادیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشکده مهندسی، مجتمع آموزش عالی گناباد، گناباد، ایران، mahdi.adineh@gonabad.ac.ir

واژگان کلیدی

فرکانس طبیعی،
ورق¬ مدرج تابعی،
الاستیسیته سه-بعدی.

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۰۱/۲۵
تاریخ بازنگری: ۱۴۰۳/۰۲/۲۴
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۰۲/۳۰

چکیده

در پژوهش حاضر، فرکانس‌های طبیعی ورق مستطیلی ساخته شده از مواد مدرج تابعی چند جهته روی بستر الا ستیک مورد برر سی قرار گرفته ا ست. تغییرات تدریجی خواص مکانیکی ماده در ورق مورد برر سی، در هر سه جهت مخت صاتی امکان‌پذیر ا ست. روابط مربوطه بر طبق تئوری الا ستی‌سیته سه‌بعدی نگارش شده و با ا ستفاده از روش تعمیم‌یافته مربعات دیفرانسیلی گسسته سازی شده ا ست. با مقایسه نتایج برای چند مثال موجود در مقالات منتشر شده، صحت‌سنجی روش و حل انجام شده مورد بررسی قرار گرفته که نشان‌دهنده دقت بالای شیوه مورد استفاده است. در ادامه، اثر تغییرات خواص مکانیکی ماده در هر یک از جهات مختصاتی و یا ترکیبی از جهات مختلف برای چند نمونه مورد توجه قرار گرفته و نتایج با هم مقایسه شده‌اند. همچنین اثر تغییرات ضخامت ورق، تغییر نسبت ابعاد ورق و نیز تأثیر پارامترهای بستر الا ستیک برای چند شرط مرزی مختلف مطالعه شده و در قالب نمودارهایی گزارش شده ا ست. نتایج نشان می‌دهد جهت تغییر خواص ماده نیز می‌تواند تأثیر قابل‌توجهی بر فرکانس طبیعی ورق داشته باشد.

۱- مقدمه

مواد مدرج تابعی[1] در دهه‌های اخیر مورد توجه پژوهشگران بسیاری قرار گرفته است. این گونه مواد به دلیل مدل خاص ترکیب آن که از نقطه‌ای به نقطه دیگر خواص مکانیکی متفاوتی دارند، از جهت بررسی، تحلیل و آشکارسازی نحوه رفتار تحت بارگذاری‌های مختلف یا در شرایط کاری متفاوت مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. بررسی رفتار ارتعاشی سازه‌های ساخته شده از این مواد در سالیان اخیر مورد توجه بسیاری قرار گرفته است [۱]، از جمله، ورق‌های مستطیلی ساخته شده از این مواد نیز از این حیث در مقالات متعددی مطالعه شده‌اند. ول و باترا [۲] یک حل دقیق سه‌بعدی برای ارتعاشات ورق‌های مستطیلی مدرج تابعی با تکیه‌گاه ساده ارائه دادند. لی و همکاران [۳] ارتعاشات سه‌بعدی ورق‌های مستطیلی مدرج تابعی را با چندجمله‌ای چبیشف[2] و روش ریتز[3] مورد مطالعه قرار دادند. ژو و لی [۴] خمش ایستایی و ارتعاشات آزاد ورق مستطیلی مدرج تابعی را برای شرایط تکیه‌گاه ساده با استفاده از یک روش عددی بررسی کردند. حسینی هاشمی و همکاران [۵] ارتعاشات آزاد ورق‌های مستطیلی مدرج تابعی را با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول[4] ورق حل نمودند. حسینی هاشمی و همکاران [۶] از یک رهیافت

[1] Functionally Graded Materials
[2] Chebyshev
[3] Ritz method
[4] First order shear deformation theory

* نویسنده مسئول؛ تلفن: ۰۹۸۹۱۵۶۱۹۰۲۵۶+
آدرس پست الکترونیک: mahdi.adineh@gonabad.ac.ir

تحلیلی دقیق برای ارتعاشات آزاد ورق مستطیلی مدرج تابعی استفاده کردند. آن‌ها [۷] همچنین از یک روش فرم‌بسته برای مطالعه ارتعاشات آزاد ورق‌های ضخیم مستطیلی مدرج تابعی استفاده کردند. حسنی بافرانی و همکاران [۸] حل دقیقی برای ارتعاشات آزاد ورق‌های مستطیلی مدرج تابعی روی بستر الاستیک ارائه دادند. چاکراورتی و پرادان [۹] ارتعاشات آزاد ورق‌های مستطیلی مدرج تابعی در محیط حرارتی را با استفاده از تئوری‌های ورق مورد مطالعه قرار دادند. جین و همکاران [۱۰] ارتعاشات آزاد ورق‌های ضخیم مستطیلی مدرج تابعی را با استفاده از یک روش حل دقیق مورد بررسی قرار دادند. آکاوچی [۱۱] از یک تئوری برشی مرتبه بالا برای محاسبات مربوط به ارتعاشات آزاد ورق‌های مستطیلی مدرج تابعی روی بستر الاستیک استفاده نمود. چاکراورتی و پرادان [۱۲] از روش ریلی-ریتز برای بررسی ارتعاشات آزاد ورق‌های نازک مستطیلی مدرج تابعی روی بستر الاستیک استفاده نمودند. کومار و همکاران [۱۳] از روش سختی پویا برای مطالعه ارتعاشات آزاد ورق‌های نازک مستطیلی مدرج تابعی استفاده کردند. زینگ و همکاران [۱۴] حل تحلیلی فرم‌بسته‌ای برای ارتعاشات آزاد ورق‌های مستطیلی مدرج تابعی در محیط حرارتی به دست آوردند. در [۱۵] ارتعاشات آزاد ورق‌های مستطیلی مدرج تابعی با استفاده از تئوری برشی مرتبه اول و روش مربعات دیفرانسیلی[5] مورد مطالعه قرار گرفت. زو و زینگ [۱۶] حل بسته‌ای برای ارتعاشات آزاد ورق‌های نازک مستطیلی مدرج تابعی روی بستر الاستیک به دست آوردند. کانگ و همکاران [۱۷] ارتعاشات آزاد ورق‌های مستطیلی مدرج تابعی در محیط حرارتی را با استفاده از تئوری الاستیسیته سه‌بعدی مطالعه نمودند. هوانگ و چانگ [۱۸] حل تحلیلی‌ای برای ارتعاشات ورق مستطیلی مدرج تابعی با دو تکیه‌گاه ساده را بر اساس تئوری الاستیسیته سه‌بعدی ارائه دادند.

از مرور مقالات می‌توان تشخیص داد که ارتعاشات ورق‌های ساخته شده از مواد مدرج تابعی چند جهته کمتر مورد بررسی قرار گرفته‌اند. این موضوع با توجه به اینکه بسیاری از کاربردهای ورق‌های مدرج تابعی به گونه‌ای است که عملاً نیاز به توزیع تغییرات ماده در دو یا سه جهت می‌باشد [۱۹، ۲۰] حایز اهمیت است. پژوهش‌های انجام شده درزمینه‌ی ارتعاشات ورق‌های مستطیلی ساخته شده از مواد مدرج تابعی چندجهته عمدتاً مربوط به سالیان اخیر است. طاحونه و نائی [۲۱] ارتعاشات آزاد ورق‌های مدرج تابعی دو جهته روی بستر الاستیک با دو تکیه‌گاه ساده در دو سمت روبروی هم را با استفاده از تئوری الاستیسیته سه‌بعدی مورد بررسی قرار دادند. به دلیل روش حل نیمه تحلیلی مورد استفاده در این پژوهش، تغییرات خواص مواد فقط در راستای ضخامت به همراه یکی از جهات درون‌صفحه‌ای مطالعه شد و امکان تغییرات خواص مواد در دو راستای درون‌صفحه‌ای یا در هر سه جهت مختصاتی فراهم نبود. همچنین محدودیتی در شرایط تکیه‌گاهی ورق وجود داشت که دو لبه روبروی هم می‌بایست از نوع تکیه‌گاه ساده می‌بودند. خورشیدی و همکاران [۲۲] تاثیر محیط حرارتی روی ارتعاشات آزاد ورق‌های مستطیلی مدرج تابعی روی بستر الاستیک را با استفاده از یکی از تئوری‌های ورق مطالعه کردند. آدینه و کدخدایان [۲۳] خمش و پاسخ دینامیکی ورق متوازی‌الاضلاع ساخته شده از مواد مدرج تابعی چندجهته روی بستر الاستیک تحت بار ناگهانی را مورد مطالعه قرار دادند. در آن پژوهش، حل مسئله مقدار ویژه و محاسبه فرکانس‌های طبیعی ورق مورد توجه قرار نگرفت. ین و همکاران [۲۴] ارتعاشات آزاد و کمانش ورق‌های مدرج تابعی درون صفحه‌ای را با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالا[6] و تحلیل ایزوژئومتریک[7] انجام دادند. تای و همکاران [۱۹] خمش و ارتعاشات آزاد سه‌بعدی ورق‌های مستطیلی مدرج تابعی چند جهته در محیط حرارتی را با استفاده از روش ایزوژئومتریک بررسی کردند. شیانگ و همکاران [۲۵] حل سه‌بعدی ارتعاشات آزاد و کمانش ورق‌های مستطیلی با تغییرات تدریجی خواص ماده در دو جهت درون صفحه‌ای را انجام دادند.

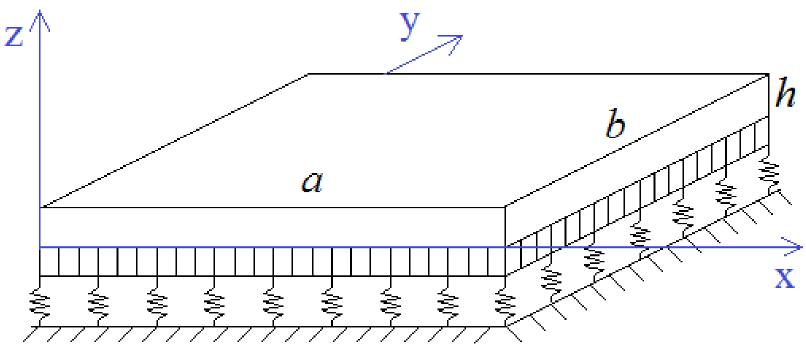
با بررسی مقالات منتشر شده می‌توان گفت تاکنون کارهای کمی در زمینه مطالعه فرکانس‌های طبیعی ورق‌های مستطیلی مدرج تابعی چند جهته با استفاده از تئوری الاستیسیته سه‌بعدی انجام شده است. همچنین کارهای انجام شده نیز به دلایلی مانند روش حل مورد استفاده، دارای محدودیت‌هایی از جمله شرایط خاص و محدود تکیه‌گاهی و شرایط محدود توزیع ماده [۲۱] و در نظر نگرفتن تأثیرات بستر الاستیک [۱۹، ۲۴، ۲۵] بوده‌اند. در شرایط واقعی و کاربردی، هر کدام از لبه‌ها ممکن است شرایط مرزی متفاوتی داشته باشند که امکان اعمال مستقل آن‌ها، شبیه‌سازی رفتار ورق‌ها را به شرایط واقعی نزدیک می‌نماید. شرایط تکیه‌گاه گیردار، تکیه‌گاه ساده و لبه آزاد که در مقالات معمولا به عنوان شرایط مختلف تکیه‌گاهی ورق‌ها مورد بررسی

[5] Differential quadrature method
[6] higher-order shear deformation theory
[7] Isogeometric analysis

قرار می‌گیرند و نمونه‌های متعددی از آن‌ها در شرایط کاربردی مانند تکیه‌گاه‌های موجود در پل‌ها مشاهده می‌شود در این پژوهش مورد توجه قرار گرفته است. تعدادی از کارهای منتشر شده نیز بر اساس تئوری‌های ورق [۲۲, ۲۴] انجام شده‌اند. ورق‌ها سازه‌هایی هستند که یکی از ابعاد آن‌ها در مقابل دو بعد دیگر کوچک در نظر گرفته می‌شود و با توجه به این خاصیت، تئوری‌های مختلفی برای تحلیل رفتار مکانیکی ورق‌ها معرفی شده است، اما با افزایش ضخامت ورق، خطای تئوری‌های ورق افزایش می‌یابد [۲۶]. ازاین‌رو استفاده از تئوری الاستیسیته سه‌بعدی در مورد ورق‌ها از اهمیت برخوردار است. همچنین در بسیاری از کاربردهای سازه‌ها از جمله تیرها [۲۷] و ورق‌ها [۲۱]، با توجه به فیزیک مساله، در نظر گرفتن بستر الاستیک، در نزدیک کردن تحلیل‌ها به واقعیت موثر است. در این پژوهش برای اولین بار فرکانس طبیعی چنین ورق‌هایی با استفاده از روش تعمیم‌یافته مربعات دیفرانسیلی سه‌بعدی و در نظر گرفتن مشتقات در هر سه جهت مختصاتی مطالعه شده است. این روش حل، امکان می‌دهد که تغییرات ماده را بتوان در تمام جهات مختصاتی در نظر گرفته و شرایط تکیه‌گاهی هر کدام از لبه‌ها را به طور مستقل تعریف نمود. مقایسه نتایج به دست آمده با نتایج موجود در مقالات منتشر شده، تطابق خوبی را نشان می‌دهد. تاثیر پارامترهای مختلفی مانند توان‌های توزیع ماده، ضخامت و نسبت طول به عرض ورق بر ارتعاشات آزاد بررسی شده است. با توجه به اینکه در این مقاله از تئوری الاستیسیته سه‌بعدی استفاده شده، نتایج به دست آمده می‌تواند به عنوان مرجع مناسبی برای صحت سنجی کارهای آینده نیز مورد استفاده قرار گیرد.

۲- تشریح مساله

یک ورق مستطیلی مدرج تابعی روی بستر الاستیک مشابه آنچه در شکل ۱ نشان داده شده است را در نظر بگیرید. مبدا مختصات در شکل مشخص شده است. پارامترهای a، b و h که در این مقاله برای نشان دادن ابعاد ورق استفاده شده، در شکل مشخص شده است.



شکل ۱ ورق مستطیلی مدرج تابعی چندجهته روی بستر الاستیک

۲-۱- توزیع ماده

همان‌گونه که در مقدمه اشاره شد، در این پژوهش، تغییرات تدریجی ماده می‌تواند در هر سه جهت مختصاتی وجود داشته باشد. در تحقیق حاضر، ورق از دو فاز تشکیل می‌شود که طبق روابطی، خواص ماده در نقاط مختلف ورق، به طور تدریجی بین خواص این دو فاز تغییر می‌کند. توزیع ماده مدرج تابعی از قانون ترکیب خطی مطابق رابطه زیر تبعیت می‌کند.

$$P = P_1V_1 + P_2V_2 \tag{۱}$$

در رابطه بالا، P هر کدام از خواص ماده موثر در تحلیل ارتعاش آزاد ورق مانند مدول الاستیسیته است و V_1 و V_2 نسبت حجمی هر کدام از فازهای تشکیل‌دهنده ورق هستند و رابطه زیر بین آن‌ها برقرار است.

$$V_1 + V_2 = 1 \tag{۲}$$

V_1 در هر نقطه از رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$V_1=\left(\frac{x}{a}\right)^{n_x}\left(\frac{y}{b}\right)^{n_y}\left(\frac{z}{h}\right)^{n_z} \tag{۳}$$

n_x، n_y و n_z را توان‌های تابع توزیع ماده می‌نامیم. با توجه به روابط ۱ و ۲ رابطه زیر برای هر خاصیت ماده تشکیل‌دهنده ورق در هر کدام از نقاط آن به دست می‌آید.

$$P=(P_1-P_2)V_1+P_2 \tag{۴}$$

۲-۲- معادلات و شرایط مرزی

معادلات حرکت در مختصات کارتزین و بر اساس تئوری الاستیسیته سه‌بعدی عبارت است از:

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}=\rho\frac{\partial^2u}{\partial t^2} \tag{۵}$$

$$\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}=\rho\frac{\partial^2v}{\partial t^2} \tag{۶}$$

$$\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}=\rho\frac{\partial^2w}{\partial t^2} \tag{۷}$$

مؤلفه‌های تنش در روابط بالا به شکل زیر با مؤلفه‌های کرنش مرتبط می‌شوند.

$$\sigma_x=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_x+\nu\left(\varepsilon_y+\varepsilon_z\right)\right] \tag{۸}$$

$$\sigma_y=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_y+\nu(\varepsilon_x+\varepsilon_z)\right] \tag{۹}$$

$$\sigma_z=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_z+\nu\left(\varepsilon_x+\varepsilon_y\right)\right] \tag{۱۰}$$

$$\tau_{xy}=\frac{E}{(1+\nu)}\varepsilon_{xy},\tau_{xz}=\frac{E}{(1+\nu)}\varepsilon_{xz},\tau_{yz}=\frac{E}{(1+\nu)}\varepsilon_{yz} \tag{۱۱}$$

مؤلفه‌های کرنش نیز مطابق روابط زیر با تغییر شکل‌ها رابطه دارند.

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x},\varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y},\varepsilon_z=\frac{\partial w}{\partial z} \tag{۱۲}$$

$$\varepsilon_{xy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right),\varepsilon_{xz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right),\varepsilon_{yz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right) \tag{۱۳}$$

با ترکیب روابط ۵ تا ۱۳، معادلات حرکت بر اساس مؤلفه‌های تغییر شکل مطابق روابط زیر حاصل می‌شود.

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\frac{\partial E}{\partial x}(1+\nu)(1-2\nu)-E\left(\frac{\partial \nu}{\partial x}(1-2\nu)-2\frac{\partial \nu}{\partial x}(1+\nu)\right)}{(1+\nu)^2(1-2\nu)^2}\right)\left[(1-\nu)\frac{\partial u}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right]\\&+\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[-\frac{\partial \nu}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+(1-\nu)\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial \nu}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right.\\&\left.+\nu\left(\frac{\partial^2v}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2w}{\partial x\partial z}\right)\right]+\frac{1}{2}\frac{\frac{\partial E}{\partial y}(1+\nu)-E\frac{\partial \nu}{\partial y}}{(1+\nu)^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\\&+\frac{1}{2}\frac{E}{(1+\nu)}\left(\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2v}{\partial x\partial y}\right)+\frac{1}{2}\frac{\frac{\partial E}{\partial z}(1+\nu)-E\frac{\partial \nu}{\partial z}}{(1+\nu)^2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)\\&+\frac{1}{2}\frac{E}{(1+\nu)}\left(\frac{\partial^2w}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}\right)=\rho\frac{\partial^2u}{\partial t^2}\end{aligned} \tag{۱۴}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\frac{\partial E}{\partial x}(1+\nu)-E\frac{\partial \nu}{\partial x}}{(1+\nu)^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{1}{2}\frac{E}{(1+\nu)}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)\\
&\quad+\left(\frac{\frac{\partial E}{\partial y}(1+\nu)(1-2\nu)-E\left(\frac{\partial \nu}{\partial y}(1-2\nu)-2\frac{\partial \nu}{\partial y}(1+\nu)\right)}{(1+\nu)^2(1-2\nu)^2}\right)\left[(1-\nu)\frac{\partial v}{\partial y}\right.\\
&\quad\left.+\nu\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right]\\
&\quad+\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[-\frac{\partial \nu}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+(1-\nu)\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial \nu}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right.\\
&\quad\left.+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial z}\right)\right]+\frac{1}{2}\frac{\frac{\partial E}{\partial z}(1+\nu)-E\frac{\partial \nu}{\partial z}}{(1+\nu)^2}\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)\\
&\quad+\frac{1}{2}\frac{E}{(1+\nu)}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial z}\right)=\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}
\end{aligned} \quad (۱۵)$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\frac{\partial E}{\partial x}(1+\nu)-E\frac{\partial \nu}{\partial x}}{(1+\nu)^2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)+\frac{1}{2}\frac{E}{(1+\nu)}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)+\frac{1}{2}\frac{\frac{\partial E}{\partial y}(1+\nu)-E\frac{\partial \nu}{\partial y}}{(1+\nu)^2}\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)\\
&\quad+\frac{1}{2}\frac{E}{(1+\nu)}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial z}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\\
&\quad+\left(\frac{\frac{\partial E}{\partial z}(1+\nu)(1-2\nu)-E\left(\frac{\partial \nu}{\partial z}(1-2\nu)-2\frac{\partial \nu}{\partial z}(1+\nu)\right)}{(1+\nu)^2(1-2\nu)^2}\right)\left[(1-\nu)\frac{\partial w}{\partial z}+\nu\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right]\\
&\quad+\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[-\frac{\partial \nu}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial z}+(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+\frac{\partial \nu}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial z}\right)\right]=\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}
\end{aligned} \quad (۱۶)$$

شرایط تکیه‌گاه‌های مورد استفاده نیز مطابق روابط زیر تعریف می‌شوند.

$$\text{SSSS} \quad \begin{cases} x=0,a\rightarrow v=w=\sigma_x=0 \\ y=0,b\rightarrow u=w=\sigma_y=0 \end{cases} \quad (۱۷)$$

$$\text{CCCC} \quad \begin{cases} x=0,a \\ y=0,b \end{cases}\rightarrow u=0,v=0,w=0 \quad (۱۸)$$

$$\text{SCSC} \quad \begin{cases} S:x=0,a\rightarrow v=w=\sigma_x=0 \\ C:y=0,b\rightarrow u=v=w=0 \end{cases} \quad (۱۹)$$

$$\text{CFCF} \quad \begin{cases} C:x=0,a\rightarrow u=v=w=0 \\ F:y=0,b\rightarrow \sigma_y=\tau_{xy}=\tau_{yz}=0 \end{cases} \quad (۲۰)$$

همچنین شرایط مرزی در سطوح بالا و پایین ورق مطابق روابط زیر معرفی می‌گردد.

$$\sigma_z=0,\tau_{xz}=\tau_{yz}=0 \text{ at } z=h \quad (۲۱)$$

$$\sigma_z=k_w w-k_{sx}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-k_{sy}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2},\tau_{xz}=\tau_{yz}=0 \text{ at } z=0 \quad (۲۲)$$

در رابطه ۲۲ پارامترهای بستر الاستیک مطابق روابط زیر مقداردهی می‌شوند.

$$k_w=\frac{K_w D_c}{a^4},k_{sx}=\frac{K_{sx}D_c}{a^2},k_{sy}=\frac{K_{sy}D_c}{b^2},D_c=\frac{E_c h^3}{(12(1-\nu_c{}^2))} \quad (۲۳)$$

در رابطه بالا، K_{sx}، K_{sy} و K_w اعداد ثابتی هستند که با افزایش یا کاهش آن‌ها میزان سختی بستر الاستیک تعیین می‌گردد. E_c و ν_c نیز مدول الاستیک و ضریب پواسون یکی از فازهای تشکیل‌دهنده ماده مدرج تابعی است.

Archive of SID.ir

۲-۳- روش مربع‌سازی مشتق

در این مقاله، از روش مربع‌سازی مشتق برای گسسته سازی معادلات تشریح شده در بخش قبلی استفاده می‌شود. اگر تعداد نقاط گرهی N عدد برای گسسته‌سازی دامنه پارامتر l مورد استفاده قرار گیرد، مشتق مرتبه m تابع نسبت به پارامتر l طبق رابطه زیر با مقادیر تابع در تمام نقاط گرهی آن دامنه مرتبط می‌شود.

$$\left.\frac{d^m f(x)}{dl^m}\right|_{n=n_i} = \sum_{j=1}^{N} C_{ij}^{(m)} f(l_j), \quad i = 1,2,\dots,N \tag{۲۴}$$

ضرایب وزنی $C_{ij}^{(m)}$ در رابطه بالا، برای مشتق مرتبه اول از رابطه ۲۵ و برای مشتقات مرتبه بالاتر از رابطه ۲۶ محاسبه می‌شود.

$$C_{ij}^{(1)} = \frac{\prod_{j=1,j\neq i}^{N}(l_i - l_j)}{(l_i - l_k)\prod_{j=1,j\neq k}^{N}(l_k - l_j)}, \qquad i,j,k = 1,2,\dots,N$$

$$C_{ii}^{(1)} = -\sum_{j=1,j\neq i}^{N} C_{ij}^{(1)}, \qquad i = 1,2,\dots,N \tag{۲۵}$$

$$C_{ij}^{(m)} = m\left[C_{ii}^{(m-1)}C_{ij}^{(1)} - \frac{C_{ij}^{(m-1)}}{l_i - l_k}\right], \qquad i,k = 1,2,\dots,N$$

$$C_{ii}^{(m)} = -\sum_{j=1,j\neq i}^{N} C_{ij}^{(m)}, \qquad i = 1,2,\dots,N \tag{۲۶}$$

برای تعیین چگونگی توزیع نقاط دامنه از چندجمله‌ای چبیشف[8] طبق رابطه ۲۷ استفاده می‌گردد.

$$l_i = 0.5L\left(1 - \frac{\cos(i-1)\times\pi}{N-1}\right) \tag{۲۷}$$

در رابطه بالا، L طول دامنه است. با گسسته سازی معادلات ۱۴ تا ۲۳، یک ماتریس K از ضرایب جملات مربوط به‌سختی ورق و یک ماتریس M از ضرایب جملات مربوط به چگالی به دست می‌آید.

۲-۴- محاسبه فرکانس‌های طبیعی

به جهت به دست آوردن فرکانس‌های طبیعی، نقاط گرهی مربوط به معادلات حرکت (d) و نقاط گرهی که در آن‌ها شرایط مرزی تعیین می‌شود (b) از هم جدا می‌شوند. بدین ترتیب ماتریس سختی نیز به چهار بخش جدا از هم تقسیم شده و می‌توان نوشت:

$$[[K_{db}][K_{dd}]]\begin{Bmatrix}\{b\}\\\{d\}\end{Bmatrix} - \omega^2[[M_{db}][M_{dd}]]\begin{Bmatrix}\{b\}\\\{d\}\end{Bmatrix} = \{0\} \tag{۲۸}$$

$$[K_{bd}]\{d\} + [K_{bb}]\{b\} = \{0\} \tag{۲۹}$$

با توجه به روابط بالا، ضرایب سختی و جرم مرتبط با محاسبات فرکانس طبیعی را می‌توان طبق روابط زیر به دست آورد.

$$K_{nf} = [K_{dd}] - [K_{db}][K_{bb}]^{-1}[K_{bd}] \tag{۳۰}$$

$$M_{nf} = [M_{dd}] - [M_{db}][K_{bb}]^{-1}[K_{bd}] \tag{۳۱}$$

$$[K_{nf}] - \omega^2[M_{nf}]\{d\} = \{0\} \tag{۳۲}$$

با استفاده از ماتریس‌های محاسبه شده در روابط ۳۰ و ۳۱ و حل مسئله مقدار ویژه رابطه ۳۲، فرکانس‌های طبیعی به دست می‌آید.

۲-۵- صحت‌سنجی

برای صحت سنجی نتایج، ابتدا نتایج ۸ فرکانس طبیعی اول یک ورق مربعی ساخته شده از ماده مدرج تابعی با نتایج مراجع

[8] Chebyshev polynomial

[۲۸]، [۲۹] و [۳۰] مقایسه می‌شود. یک ورق مربعی را در نظر بگیرید که مواد سازنده آن در ضخامت ورق به طور تدریجی و مطابق رابطه زیر تغییر می‌کنند.

$$P(z) = (P_U - P_L)\left(\frac{2z+h}{2h}\right)^P + P_L \tag{۳۳}$$

که در آن P یک خاصیت ماده مانند مدول الاستیسیته می‌باشد و P_U و P_L اشاره به مقادیر آن خاصیت ماده در بالاترین و پایین ترین سطح ورق (z=h/2 و z=-h/2) دارند. p توان رابطه توزیع ماده و در این مثال برابر ۲ می‌باشد. در این مثال، سطح پایین ورق از ماده SUS304 و سطح بالایی آن از ماده Si_3N_4 تشکیل شده است که خواص مکانیکی آن مطابق جدول ۱ مقداردهی شده است.

جدول ۱ خواص مکانیکی مواد SUS304 و Si_3N_4 در دمای ۳۰۰ کلوین

	E	ν	ρ
Si_3N_4	۳۲۲ /۲۷۱۵×۱۰^۹	۰/۲۴	۲۳۷۰
SUS304	۲۰۷/۷۸۷۷×۱۰^۹	۰/۳۱۷۸	۸۱۶۶

ابعاد ورق عبارتند از a=b=0.2 m و a/h=10 و هر چهار گوشه آن شرایط تکیه‌گاهی لبه گیردار دارد. فرکانس طبیعی بی‌بعد مورد استفاده از رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$\omega = \frac{\omega b^2}{\pi^2}\sqrt{\frac{I_0}{D_0}} \tag{۳۴}$$

که در آن $I_0 = h\rho$ و $D_0 = Eh^3/12(1-\nu^2)$. همچنین ρ، E و ν در این روابط دارای مقادیر مربوط به ماده SUS304 در دمای مرجع یعنی ۳۰۰ کلوین می‌باشد. جدول ۲ نشان‌دهنده همگرایی خوب و تطابق مناسب با نتایج منتشرشده در مراجع مورد اشاره است.

جدول ۲ بررسی همگرایی و تطابق فرکانس‌های طبیعی ورق مربعی مدرج تابعی، a=b=0.2 m و a/h=10 با شرایط تکیه‌گاهی CCCC

مرجع	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7	ω_8
یانگ و شن [۲۸]	۴/۱۰۶۲	۷/۸۹۰۲	۷/۸۹۰۲	۱۱/۱۸۳۴	۱۲/۵۸۸۱	۱۳/۷۸۶۷	۱۵/۴۵۳۰	۱۶/۰۰۱۷
کیم [۲۹]	۴/۱۱۶۵	۷/۹۶۹۶	۷/۹۶۹۶	۱۱/۲۱۹۸	۱۳/۱۰۶۰	۱۳/۲۰۸۹	۱۵/۹۴۷۱	۱۵/۹۴۷۱
لی و همکاران [۳۰]	۴/۱۶۵۸	۷/۹۳۸۹	۷/۹۳۸۹	۱۱/۱۲۱۲	۱۳/۰۹۷۳	۱۳/۲۲۳۴	۱۵/۳۶۲۷	۱۵/۳۶۲۷
۷×۷×۷	۴/۱۴۳۰	۸/۱۱۱۹	۸/۱۱۱۹	۱۱/۲۶۸۳	۱۳/۸۵۰۵	۱۳/۷۴۷۰	۱۵/۴۵۵۴	۱۵/۴۵۵۴
۹×۹×۹	۴/۱۲۲۲	۷/۸۶۴۸	۷/۸۶۴۸	۱۱/۰۲۷۱	۱۲/۹۷۸۶	۱۳/۱۰۱۷	۱۵/۴۳۹۹	۱۵/۴۳۹۹
۱۱×۱۱×۱۱	۴/۱۱۵۲	۷/۸۵۴۶	۷/۸۵۴۶	۱۱/۰۱۵۰	۱۲/۹۸۶۷	۱۳/۱۱۱۴	۱۵/۴۳۷۵	۱۵/۴۳۷۵
۱۳×۱۳×۱۳	۴/۱۱۲۷	۷/۸۵۱۰	۷/۸۵۱۰	۱۱/۰۱۰۸	۱۲/۹۷۸۹	۱۳/۱۰۳۰	۱۵/۴۳۶۲	۱۵/۴۳۶۲

در جدول ۳، مساله قبلی با جایگزینی شرایط SSSS در لبه‌ها به‌جای CCCC مورد توجه قرار گرفته و با نتایج مرجع [۱۷] مقایسه شده است.

جدول ۳ بررسی همگرایی و تطابق فرکانس‌های طبیعی ورق مربعی مدرج تابعی، a=b=0.2 m و a/h=10 با شرایط تکیه‌گاهی SSSS

مرجع	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7	ω_8
کانگ [۱۷]	۲/۴۰۰۳	۵/۷۳۱۶	۵/۷۳۱۶	۸/۱۰۳۳	۸/۱۰۳۳	۸/۸۰۴۰	۱۰/۷۳۰۵	۱۰/۷۳۱۸
۷×۷×۷	۲/۴۰۰۲	۵/۶۹۹۸	۵/۶۹۹۸	۸/۱۰۳۵	۸/۱۰۳۵	۸/۷۶۵۷	۱۰/۴۹۳۱	۱۰/۴۹۳۱
۹×۹×۹	۲/۳۹۹۶	۵/۵۷۴۰	۵/۷۳۴۰	۸/۱۰۳۳	۸/۱۰۳۳	۸/۸۰۵۶	۱۰/۷۶۸۵	۱۰/۷۶۸۵
۱۱×۱۱×۱۱	۲/۳۹۹۷	۵/۷۳۰۵	۵/۷۳۰۵	۸/۱۰۳۳	۸/۱۰۳۳	۸/۸۰۱۴	۱۰/۷۲۷۰	۱۰/۷۲۷۰
۱۳×۱۳×۱۳	۲/۳۹۹۷	۵/۷۳۰۶	۵/۷۳۰۶	۸/۱۰۳۳	۸/۱۰۳۳	۸/۸۰۱۴	۱۰/۷۲۹۷	۱۰/۷۲۹۷

در ادامه به صحت سنجی نتایج برای یک ورق مربعی ایزوتروپیک روی بستر الاستیک می پردازیم. مشخصات ماده تشکیل‌دهنده ورق $Ceramic(Alumina,Al_2O_3)$ عبارتند از: $E_c = 3800 \times 10^9 \frac{N}{m^2}$، $\nu_c = 0.3$ و $\rho_c = 3800 \frac{kg}{m^3}$ و شرط مرزی فونداسیون مطابق رابطه زیر است.

$$\sigma_z = K_w - K_g \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \tag{۳۵}$$

ضرایب بی‌بعد بستر الاستیک مطابق رابطه زیر است:

$$k_g = K_g b^2 / D_c, k_w = K_w b^4 / D_c \tag{۳۶}$$

که در آن‌ها $D_c = E_c h^3 / 12(1 - \nu_c{}^2)$ است. در جدول ۴، فرکانس‌های طبیعی ورق مورد اشاره با نتایج مراجع [۳۱]، [۳۲]، [۳۳] و [۲۱] مقایسه شده است.

جدول ۴ بررسی همگرایی و تطابق فرکانس‌های طبیعی ورق ایزوتروپیک روی بستر الاستیک با شرایط تکیه‌گاهی SSSS، $K_g = 10$، b/h=5

مرجع	ω_1	
	$k_w = 0$	$k_w = 10$
ژو و همکاران [۳۱]	۲/۲۳۳۴	۲/۲۵۳۹
ماتسوناگا [۳۲]	۲/۲۳۳۴	۲/۲۵۳۹
یاس و عراق [۳۳]	۲/۲۳۳۴۰۹	۲/۲۵۳۹۲۴
طاحونه و نائی [۲۱]	۲/۲۳۳۴	۲/۲۵۳۹
۹×۹×۹	۲/۲۳۳۴	۲/۲۵۳۹
۱۱×۱۱×۱۱	۲/۲۳۳۴	۲/۲۵۳۹
۱۳×۱۳×۱۳	۲/۲۳۳۴	۲/۲۵۳۹

در مثال بعدی، ورقی با مواد مدرج تابعی تغییر کننده در راستاهای درون صفحه‌ای مورد بررسی قرار گرفته است. مواد تشکیل‌دهنده ورق Si3N4 و SUS304 بوده و پارامترهای خواص آن عبارتند از:

$$\begin{gathered} E_c = 348.43 \times 10^9 \frac{N}{m^2}, \nu_c = 0.24\ \rho_c = 2370 \frac{kg}{m^3} \\ \rho_m = 8166 \frac{kg}{m^3}\ \nu_m = 0.3262\ , E_m = 201.04 \times 10^9 \frac{N}{m^2} \end{gathered} \tag{۳۷}$$

توزیع مواد در این ورق طبق روابط زیر می‌باشد:

$$\begin{gathered} E = V_m E_m + V_c E_c \\ \nu = V_m \nu_m + V_c \nu_c \\ \rho = V_m \rho_m + V_c \rho_c \end{gathered} \tag{۳۸}$$

$$V_m + V_c = 1 \tag{۳۹}$$

$$V_c = \left(\frac{x}{a}\right)^{n_x} \left(\frac{y}{b}\right)^{n_y} \tag{۴۰}$$

که در آن V_m و V_c نسبت‌های حجمی هستند و m اشاره به فاز فلز و c اشاره به فاز سرامیک دارد. a وb به ترتیب طول و عرض ورق و n_x و n_y توان‌های تابع توزیع هستند. همچنین فرکانس بی‌بعد از رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$\begin{gathered} D_c = E_c h^3 / 12(1 - \nu_c{}^2) \\ \omega = \frac{\omega a^2}{\pi^2} \sqrt{\frac{h\rho}{D_c}} \end{gathered} \tag{۴۱}$$

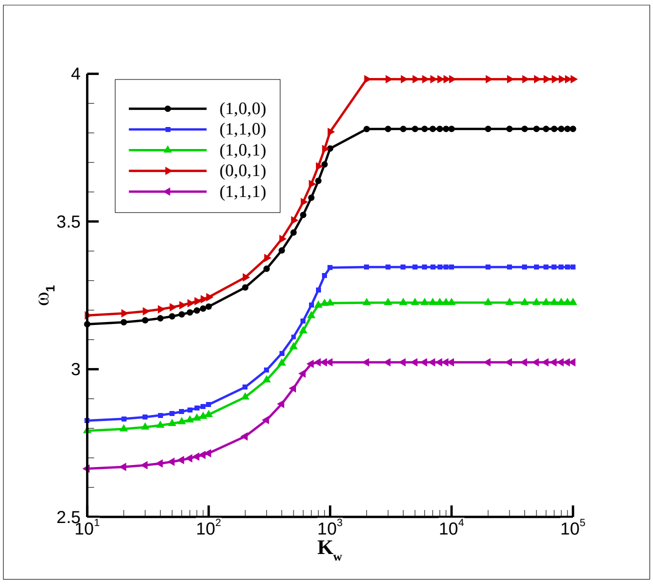
در جدول ۵، فرکانس‌های اول برای چند ترکیب توان‌های تابع توزیع نشان داده‌شده و با سه مرجع مقایسه شده است.

جدول ۵ بررسی همگرایی و تطابق فرکانس‌های طبیعی ورق مدرج تابعی دوجهته با شرایط تکیه‌گاهی SSSS، *a*=*b*=50*h*=1m

n_x	n_y	مرجع					
		شیانگ و همکاران [۲۵]	ین و همکاران [۲۴]	تای و همکاران [۱۹]	۷×۷×۷	۹×۹×۹	۱۱×۱۱×۱۱
۰	۰	۱/۹۹۷۸	۱/۹۹۷۳	۱/۹۹۷۴	۱/۹۹۷۸	۱/۹۹۷۳	۱/۹۹۷۴
۰	۱			۱/۱۷۰۱	۱/۱۸۵۰	۱/۱۸۴۸	۱/۱۸۴۸
۰	۲			۱/۰۰۹۹	۱/۰۲۰۷	۱/۰۱۹۸	۱/۰۱۹۸
۱	۰	۱/۱۸۵۱	۱/۱۸۴۷	۱/۱۷۰۱	۱/۱۸۵۰	۱/۱۸۴۸	۱/۱۸۴۸
۱	۱			۰/۹۸۱۲	۱/۰۲۰۷	۱/۰۱۹۸	۱/۰۱۹۸
۱	۲			۰/۹۲۰۳	۰/۹۵۶۲	۰/۹۵۳۹	۰/۹۵۴۱
۲	۰	۱/۰۲۰۰	۱/۰۱۹۷	۱/۰۰۹۹	۱/۰۲۰۷	۱/۰۱۹۸	۱/۰۱۹۸
۲	۱			۰/۹۱۹۷	۰/۹۵۶۲	۰/۹۵۳۹	۰/۹۵۴۱
۲	۲			۰/۸۸۷۴	۰/۹۲۲۸	۰/۹۲۰۴	۰/۹۲۰۵

۲-۶- نتایج عددی

ورقی مستطیلی با مواد مدرج تابعی که در تمام سه راستای مختصاتی امکان تغییرات خواص آن وجود دارد، مورد بررسی قرار گرفته است. مواد تشکیل‌دهنده ورق Si_3N_4 و SUS304 بوده و پارامترهای خواص مطابق رابطه ۳۷ است. توزیع مواد در این ورق طبق روابط ۱ تا ۴ می‌باشد. ضرایب بی‌بعد بستر الاستیک بر اساس رابطه ۲۳ بوده و مقادیر ثابت مورد استفاده در آن، $E_c = 348.43 \times 10^9\ N/m^2$، $\nu_c = 0.24$ و $\rho_c = 2370\ Kg/m^3$ هستند. برای فرکانس بی‌بعد از رابطه $\omega = \omega a\sqrt{2\rho(1+\nu)/E}$ استفاده شده که در آن خواص ρ، ν و E مشابه خواص SUS304 در جدول ۱ می‌باشد.

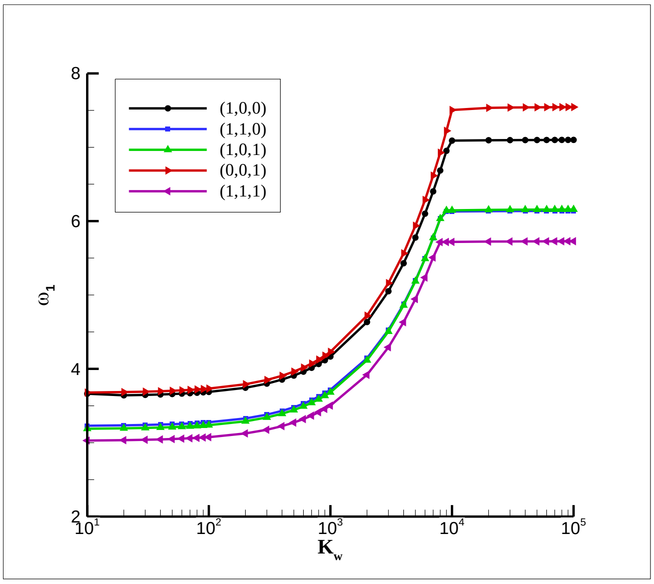


شکل ۲ تغییرات اولین فرکانس طبیعی ورق مستطیلی مدرج تابعی چندجهته با توان‌های تابع توزیع (n_x, n_y, n_z) با شرایط تکیه‌گاهی SSSS روی بستر الاستیک در مقابل K_w. (a=1 m, b=1 m, h=0.1 m, K_{sx}=K_{sy}=100)

در شکل ۲ تغییرات اولین فرکانس طبیعی ورق با شرایط تکیه‌گاهی SSSS نسبت به تغییرات ضریب K_w نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود جهت تغییرات ماده، تاثیر قابل توجهی روی اندازه فرکانس طبیعی دارد. همچنین مشاهده می‌شود با افزایش ضریب K_w جایگاه هر ورق در بین سایر ورق‌ها تقریبا بدون تغییر می‌ماند، مثلا ورق مدرج تابعی سه‌جهته (۱،۱،۱) همیشه کمترین و ورق مدرج تابعی یک جهته در راستای ضخامت (۱،۰،۰) همیشه بیشترین فرکانس طبیعی را داشته‌اند. ازآنجاکه طبق جدول ۱، ماده Si_3N_4 نسبت به SUS304 مدول الاستیک بزرگتر و چگالی کمتری دارد، هرچه ماده تشکیل‌دهنده ورق به Si_3N_4 نزدیک‌تر باشد، فرکانس بالاتری دارد. ازاین‌رو چون توابع توزیع ماده در ورق مدرج تابعی یک‌جهته نسبت به سه

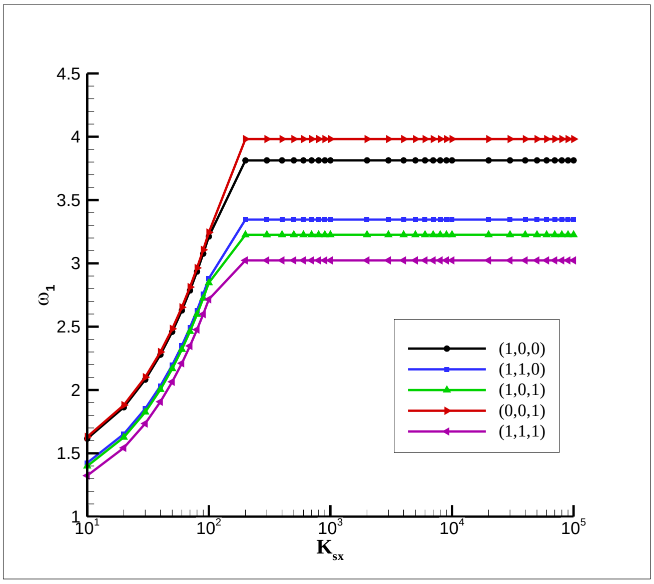
جهته به Si_3N_4 نزدیک‌تر است، فرکانس بالاتری دارد. اما با مقایسه ورق با توزیع دوجهته درون‌صفحه‌ای (۱،۱،۰) و دوجهته ضخامت و یک راستای درون‌صفحه‌ای (۱،۰،۱) می‌توان دریافت در شرایطی که حجم فازهای تشکیل‌دهنده دو ورق نیز یکسان باشد، جهت توزیع ماده می‌تواند فرکانس‌های متفاوتی ایجاد کند.

نتایج شکل ۲ با تغییر شرایط مرزی تکیه‌گاهی به CCCC در شکل ۳ نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود، به طور کلی فرکانس‌ها افزایش یافته‌اند اما ترتیب اندازه فرکانس ورق‌های با توزیع مختلف تقریبا مشابه شکل ۲ می‌باشد.

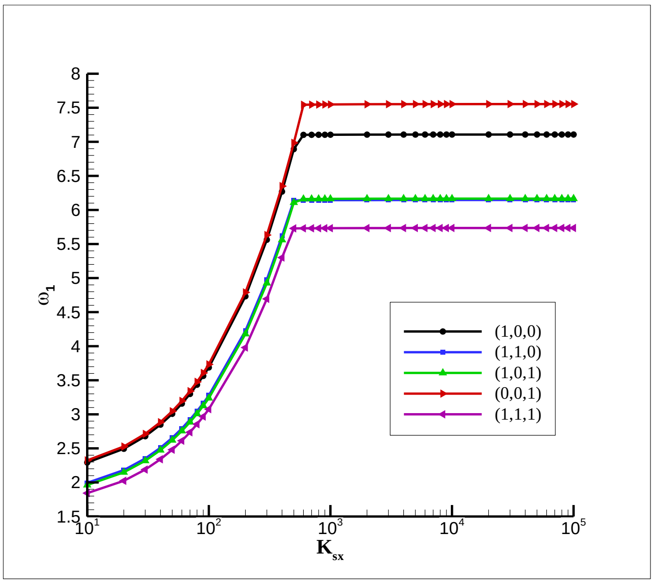


شکل ۳ تغییرات اولین فرکانس طبیعی ورق مستطیلی مدرج تابعی چندجهته با توان‌های تابع توزیع (n_x, n_y, n_z) با شرایط تکیه‌گاهی CCCC روی بستر الاستیک در مقابل K_w. (a=1 m, b=1 m, h=0.1 m, K_{sx}=K_{sy}=100)

در شکل ۴ و ۵، تغییرات اولین فرکانس طبیعی ورق‌ها به ترتیب با شرایط تکیه‌گاهی SSSS و CCCC، این بار با تغییر پارامتر K_{sx} و K_{sy} مورد مطالعه قرار گرفته است که الگویی مشابه تاثیر ضریب K_w دارند. در این بررسی K_{sx}=K_{sy} در نظر گرفته شده است.

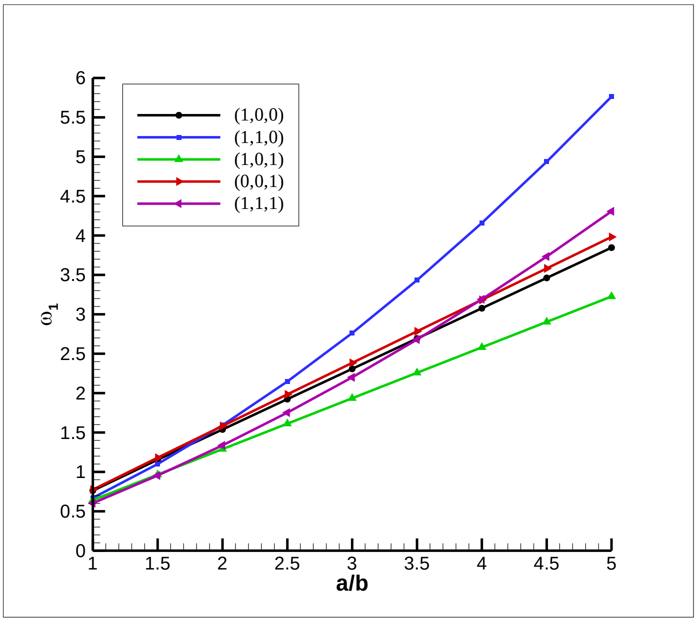


شکل ۴ تغییرات اولین فرکانس طبیعی ورق مستطیلی مدرج تابعی چندجهته با توان‌های تابع توزیع (n_x, n_y, n_z) با شرایط تکیه‌گاهی SSSS روی بستر الاستیک در مقابل K_{sx}=K_{sy}. (a=1 m, b=1 m, h=0.1 m, K_w=100)

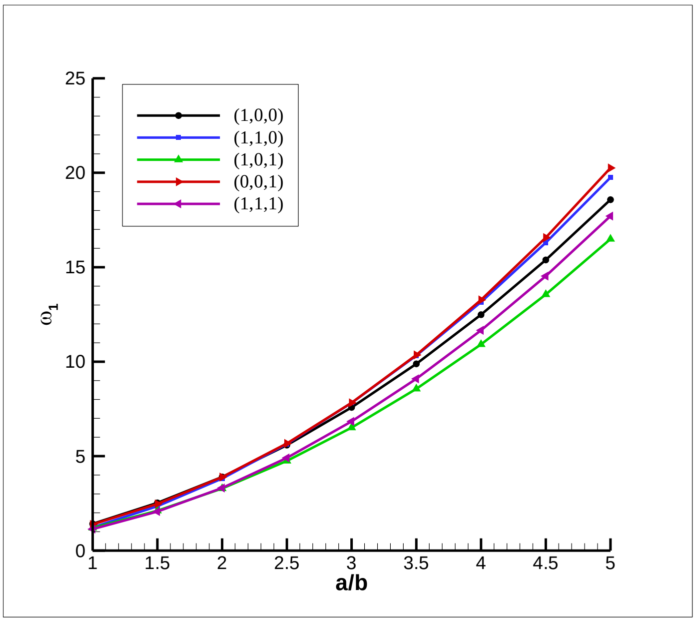


شکل ۵ تغییرات اولین فرکانس طبیعی ورق مستطیلی مدرج تابعی چندجهته با توان‌های تابع توزیع (n_x, n_y, n_z) با شرایط تکیه‌گاهی CCCC روی بستر الاستیک در مقابل $K_{sx}=K_{sy}$. (a=1 m, b=1 m, h=0.1 m, K_w=100)

در شکل‌های ۶ و ۷، تاثیر نسبت طول به عرض ورق a/b *به ترتیب* برای شرایط تکیه‌گاهی SSSS و CCCC مورد بررسی قرار گرفته است. در این شکل‌ها، ضرایب بستر الاستیک $K_w=K_{sx}=K_{sy}=100$ و ضخامت ورق h=0.1 m در نظر گرفته شده است. عرض ورق در تمام محاسبات b= 0.2 m و طول آن بین 0.2 m تا 1 m تغییر می‌کند. همانطور که مشاهده می‌شود ورق‌های با جهت توزیع ماده متفاوت، با افزایش طول ورق، تغییرات افزایشی متفاوتی دارند و همگی شیب یکسانی ندارند. ازاین‌رو مشاهده می‌شود که فرکانس طبیعی جایگاه ورق‌های مختلف نسبت به هم جابجا می‌شود. تغییرات اشاره شده در بازه مورد بررسی در رابطه با شرایط تکیه‌گاهی SSSS نسبت به CCCC بیشتر است که ممکن است به دلیل غالب‌تر بودن بیشتر تاثیر تکیه‌گاه CCCC در سختی کلی ورق باشد. با دقت در تغییرات اندازه فرکانس طبیعی می‌توان مشاهده نمود در ورق‌هایی که توزیع دو جهت درون-صفحه‌ای دارند یعنی (۱،۱،۰) و (۱،۱،۱)، با افزایش طول، اندازه فرکانس طبیعی نسبت به سایر ورق‌ها بیشتر شده است.

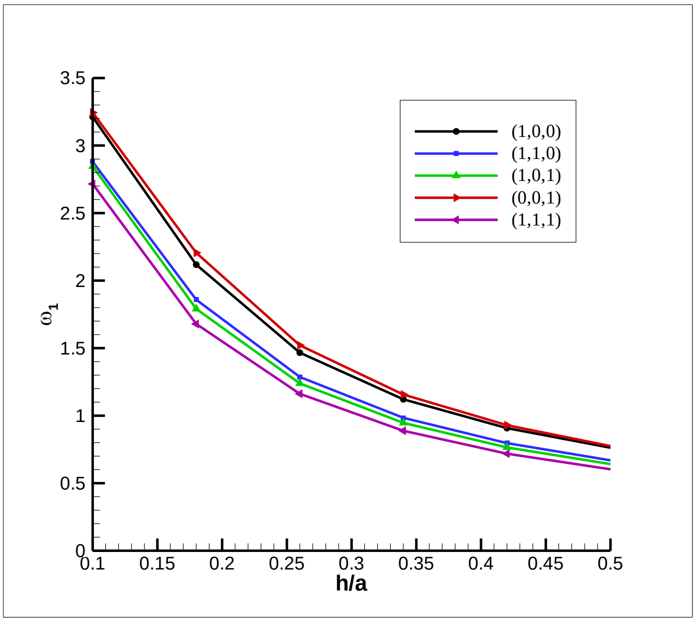


شکل ۶ تغییرات اولین فرکانس طبیعی ورق مستطیلی مدرج تابعی چندجهته با توان‌های تابع توزیع (n_x, n_y, n_z) با شرایط تکیه‌گاهی SSSS روی بستر الاستیک در مقابل افزایش نسبت طول به عرض ورق. (b=0.2 m, h=0.1 m, $K_w=K_{sx}=K_{sy}$ =100)

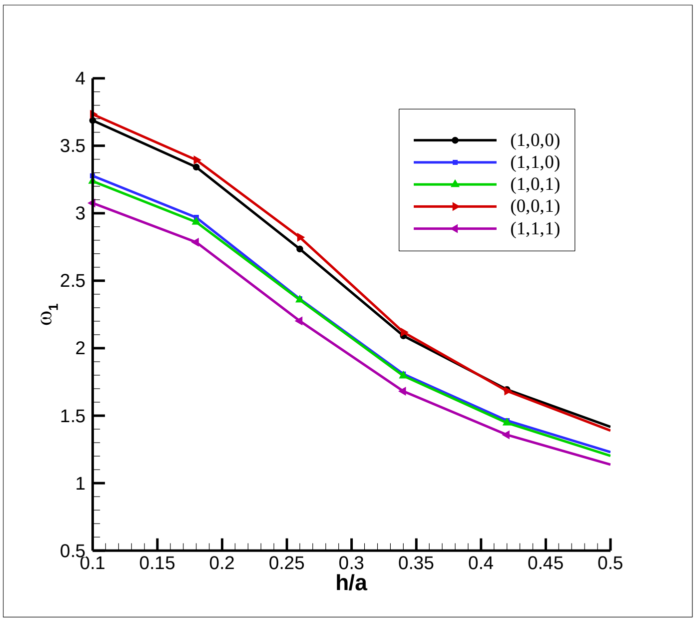


شکل ۷ تغییرات اولین فرکانس طبیعی ورق مستطیلی مدرج تابعی چندجهته با توان‌های تابع توزیع (n_x, n_y, n_z) با شرایط تکیه‌گاهی CCCC روی بستر الاستیک در مقابل افزایش نسبت طول به عرض ورق. (b=0.2 m, h=0.1 m, K_w=K_{sx}=K_{sy} =100)

در شکل‌های ۸ و ۹، تاثیر تغییر ضخامت ورق به ترتیب برای شرایط تکیه‌گاهی SSSS و CCCC مورد بررسی قرار گرفته است. در این شکل‌ها، ضرایب بستر الاستیک K_w=K_{sx}=K_{sy}=100 و طول و عرض ورق a=b=1 m در نظر گرفته شده است. با افزایش ضخامت، اندازه اولین فرکانس طبیعی در تمام ورق‌ها کاهش یافته و جایگاه ورق‌ها نسبت به هم تغییرات بسیار اندکی دارد. افزایش ضخامت سبب افزایش جرم ورق می‌شود که می‌تواند موجب کاهش فرکانس طبیعی گردد. افزایش ضخامت همچنین می‌تواند بخصوص از آن لحاظ که قیود تکیه‌گاهی بر ضخامت وارد می‌شود، موجب افزایش سختی نیز بشود که اثر افزایشی روی فرکانس طبیعی دارد. با توجه به نحوه تغییر فرکانس طبیعی تمام ورق‌ها با افزایش ضخامت، می‌توان گفت ظاهرا تاثیر افزایش جرم بر کاهش فرکانس طبیعی در ورق‌های مورد بررسی بیشتر است.

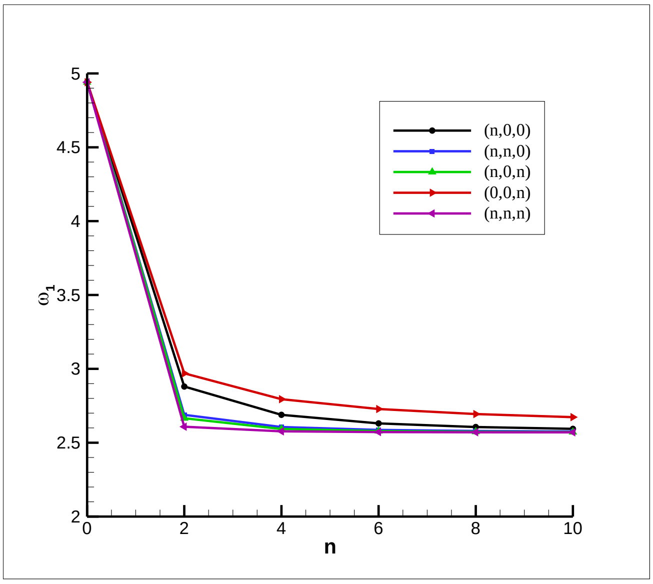


شکل ۸ تغییرات اولین فرکانس طبیعی ورق مستطیلی مدرج تابعی چندجهته با توان‌های تابع توزیع (n_x, n_y, n_z) با شرایط تکیه‌گاهی SSSS روی بستر الاستیک در مقابل افزایش ضخامت. (a=b=1 m, K_w=K_{sx}=K_{sy} =100)

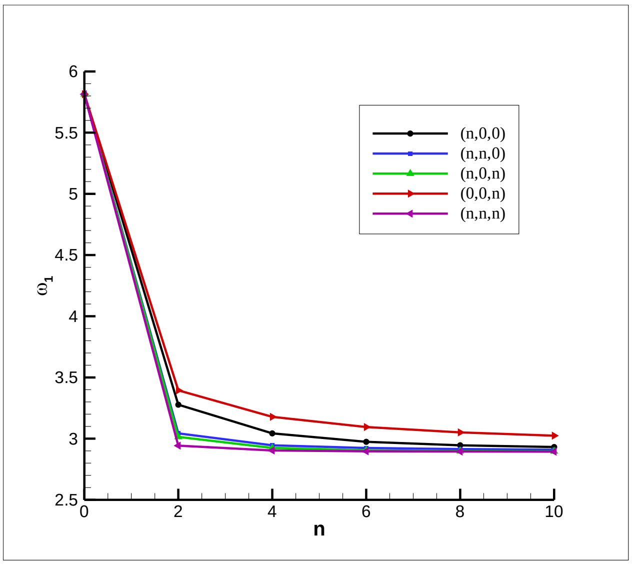


شکل ۹ تغییرات اولین فرکانس طبیعی ورق مستطیلی مدرج تابعی چندجهته با توان‌های تابع توزیع (n_x, n_y, n_z) با شرایط تکیه‌گاهی CCCC روی بستر الاستیک در مقابل افزایش ضخامت. (a=b=1 m, K_w=K_{sx}=K_{sy} =100)

در شکل‌های ۱۰ و ۱۱ تاثیر افزایش توان تابع توزیع ماده برای ورق‌ها به ترتیب برای شرایط تکیه‌گاهی SSSS و CCCC نشان داده شده است. در این شکل‌ها، ضرایب بستر الاستیک K_w=K_{sx}=K_{sy}=100 و ابعاد ورق a=b=10 و h=1 m در نظر گرفته شده است. همانطور که مشاهده می‌شود با افزایش اندازه n، تفاوت بین ورق‌ها کاهش می‌یابد. این موضوع می‌تواند به این مطلب مرتبط باشد که با افزایش اندازه توان‌های تابع توزیع ماده، نقاط بیشتری از ورق از لحاظ خواص مکانیکی به یکی از فازهای تشکیل‌دهنده (SUS304) شبیه می‌شوند و رفتار ورق بیشتر شبیه به رفتار ورق ساخته شده از آن فاز می‌گردد. ازآنجاکه SUS304 نسبت به فاز دیگر تشکیل‌دهنده ورق، مدول الاستیک کوچک‌تر و چگالی بیشتری دارد، فرکانس طبیعی با افزایش n در تمام ورق‌ها کاهش می‌یابد.



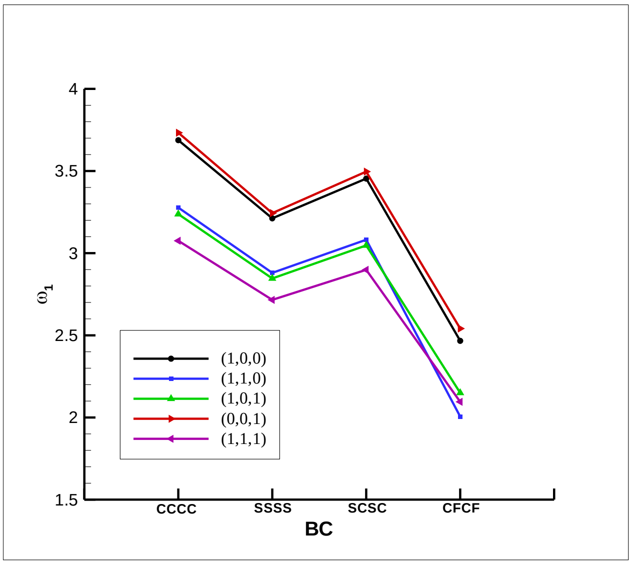
شکل ۱۰ تغییرات اولین فرکانس طبیعی ورق مستطیلی مدرج تابعی چندجهته با توان‌های تابع توزیع (n_x, n_y, n_z) با شرایط تکیه‌گاهی SSSS روی بستر الاستیک نسبت به افزایش اندازه توان تابع توزیع. (a=b=10h=1 m, K_w=K_{sx}=K_{sy} =100)



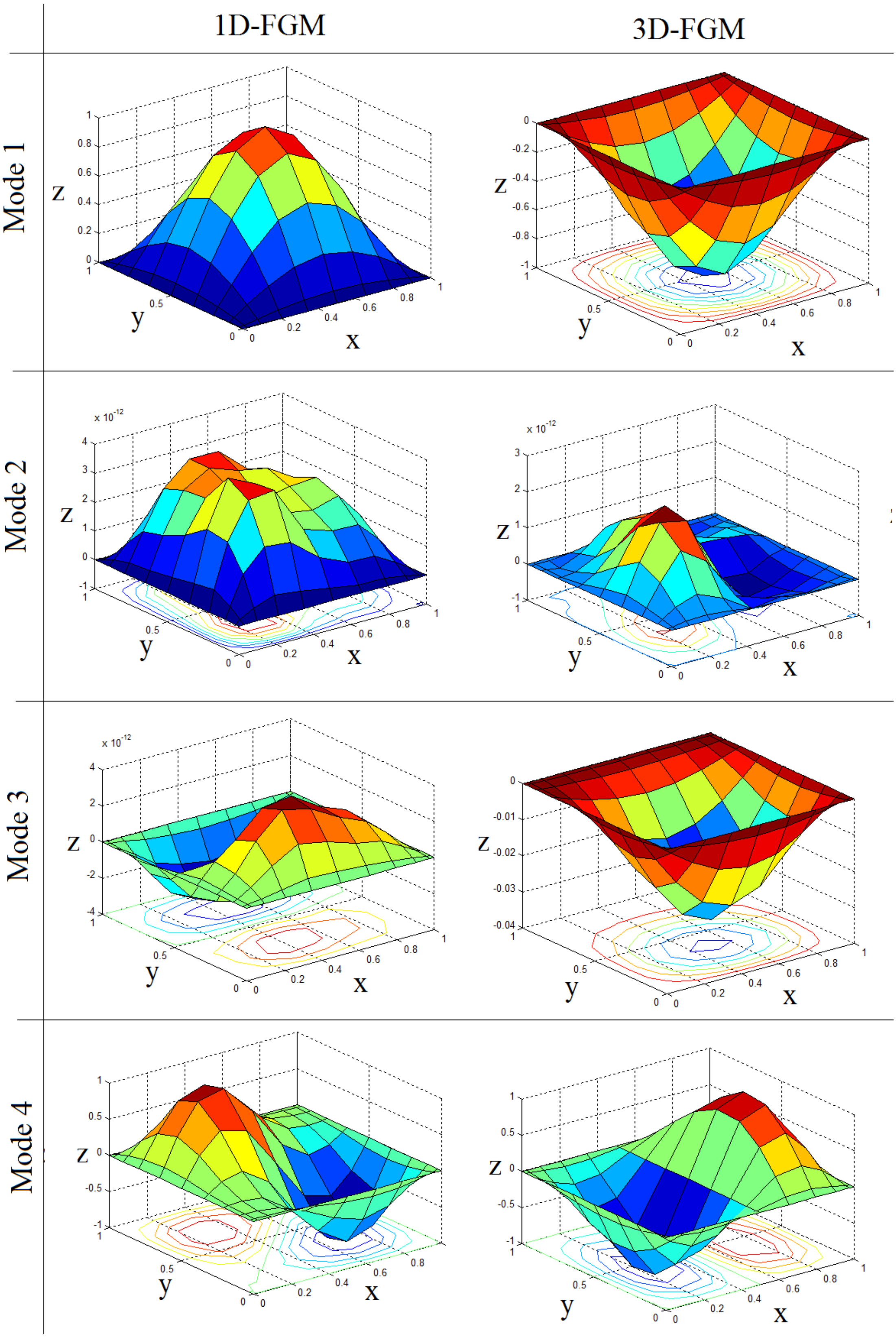
شکل ۱۱ تغییرات اولین فرکانس طبیعی ورق مستطیلی مدرج تابعی چندجهته با توان‌های تابع توزیع (n_x, n_y, n_z) با شرایط تکیه‌گاهی CCCC روی بستر الاستیک نسبت به افزایش اندازه توان تابع توزیع. (a=b=10h=1 m, K_w=K_{sx}=K_{sy} =100)

در شکل ۱۲ اثر نوع تکیه‌گاه بر اندازه اولین فرکانس طبیعی ورق مورد بررسی قرار گرفته است. در این بررسی، ضرایب بستر الاستیک K_w=K_{sx}=K_{sy}=100 و ابعاد ورق a=b=10 و h=1 m در نظر گرفته شده است. همانطور که انتظار می‌رفت بیشترین فرکانس طبیعی مربوط به شرایط با بیشترین سختی ایجاد شده (*CCCC*) است و نیز نکته قابل توجه قرارگیری نمودار *SCSC* در بین دو منحنی *SSSS* و *CCCC* می‌باشد. همچنین مشاهده می‌شود جایگاه ورق‌های مختلف، در بازه مورد بررسی، با تغییر شرایط تکیه‌گاهی تغییر اندکی داشته و بیشترین جابجایی مربوط به شرایط تکیه‌گاهی *CFCF* نسبت به سایر شرایط مرزی است.

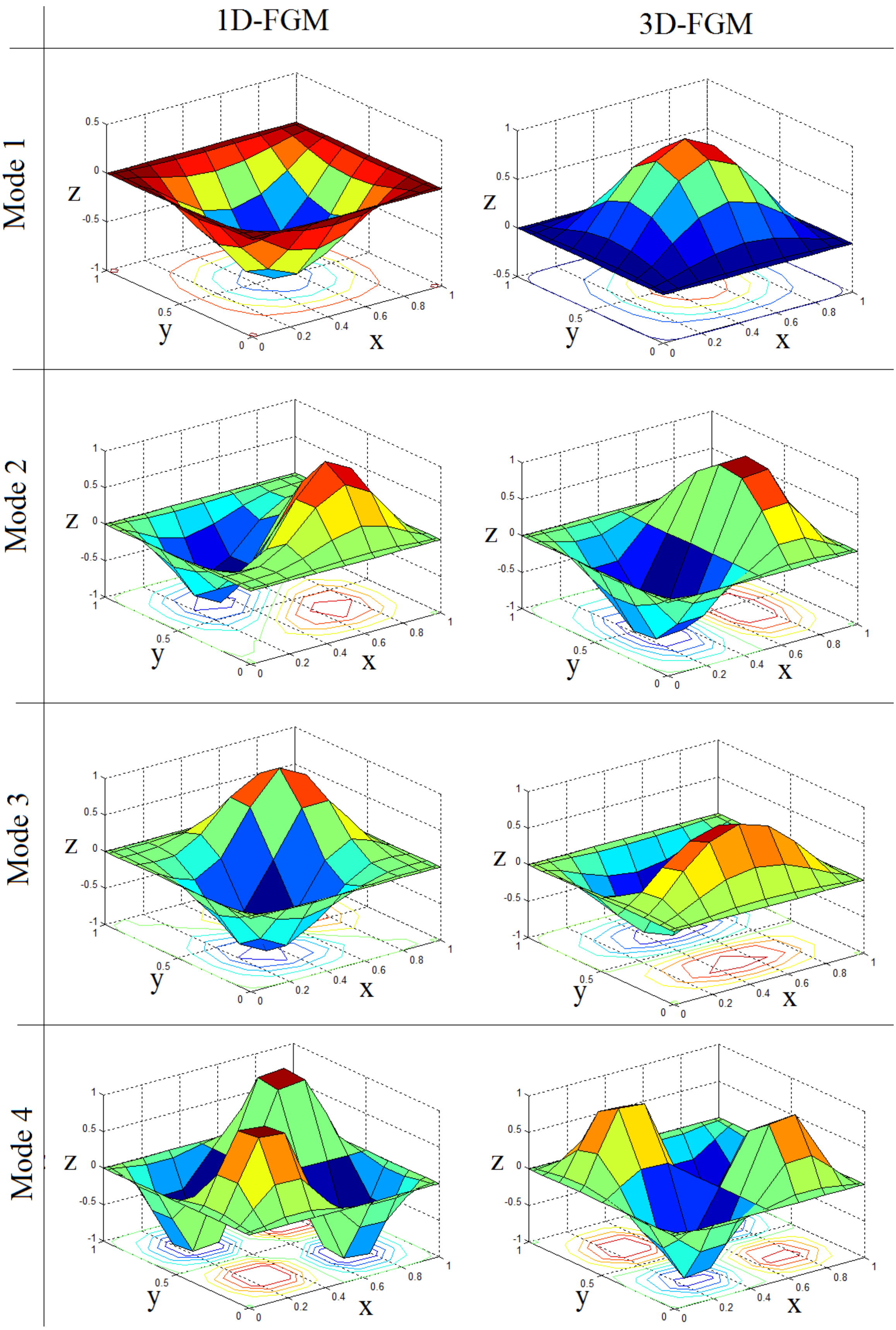
در شکل‌های ۱۳ و ۱۴ شکل چهار مود اول ورق مدرج تابعی یک‌جهته و سه‌جهته به ترتیب برای شرایط تکیه‌گاهی *SSSS* و *CCCC* مورد توجه قرار گرفته است. در این شکل‌ها توان‌های تابع توزیع برای ورق مدرج تابعی یک جهته عبارت است از n_x=n_y=0 و n_z=1 و برای ورق مدرج تابعی سه‌جهته برابر است با n_x=n_y=n_z=1. همچنین ضرایب بستر الاستیک K_w=K_{sx}=K_{sy}=100 و ابعاد ورق a=b=10 و h=1 m بوده و تغییر شکل‌های ورق در راستای z نشان داده شده‌اند. همان‌طور که مشخص است شکل مودها نیز با تغییر توزیع ماده و نیز شرایط تکیه‌گاهی متفاوت می‌شود.



شکل ۱۲ تغییرات اولین فرکانس طبیعی ورق مستطیلی مدرج تابعی چندجهته با توان‌های تابع توزیع (n_x, n_y, n_z) با شرایط تکیه‌گاهی متفاوت روی بستر الاستیک. (a=b=10h=1 m, K_w=K_{sx}=K_{sy} =100)



شکل ۱۳ شکل چهار مود اول در جهت z برای ورق مدرج تابعی یک‌جهته و سه‌جهته با شرایط تکیه‌گاهی SSSS روی بستر الاستیک.
($a=b=10h=1$ m, $K_w=K_{sx}=K_{sy}=100$)



شکل ۱۴ شکل چهار مود اول در جهت z برای ورق مدرج تابعی یک‌جهته و سه‌جهته با شرایط تکیه‌گاهی CCCC روی بستر الاستیک.

(a=b=10h=1 m, K_w=K_{sx}=K_{sy} =100)

۷-۲- نتیجه‌گیری

در این پژوهش، برای اولین بار ارتعاشات آزاد ورق مستطیلی مدرج تابعی چندجهته که می‌تواند در تمام جهات تغییر خواص داشته باشد، روی بستر الاستیک و با استفاده از تئوری الاستیسته سه‌بعدی و شرایط تکیه‌گاهی مستقل مورد مطالعه قرار گرفت. یک تابع توزیع توانی برای مشخص نمودن نحوه توزیع خواص مکانیکی در نقاط مختلف ورق استفاده شد. از روش تعمیم‌یافته مربعات دیفرانسیلی برای گسسته‌سازی معادلات استفاده شد. تمام خواص مکانیکی مرتبط با ارتعاشات آزاد ورق از جمله ضریب پواسون در تحقیق حاضر با امکان تغییر در هر سه راستای مختصاتی در نظر گرفته شدند. نتایج به دست آمده به جهت اعتبارسنجی با نتایج موجود در مقالات از جمله برای ورق‌های مدرج تابعی یک‌جهته، ورق‌های روی بستر الاستیک و ورق‌های با تغییرات درون‌صفحه‌ای خواص مکانیکی مقایسه گردید که تطابق خوبی را نشان داد. موارد مختلفی مانند اثر جهت تغییرات ماده، تاثیر پارامترهای بستر الاستیک، شرایط تکیه‌گاهی و نسبت‌های ابعاد هندسی ورق بررسی شد. نتایج نشان داد که جهت تغییرات ماده (در جهت ضخامت، درون صفحه‌ای یا ترکیبات مختلفی از آن‌ها) می‌تواند تاثیر قابل توجهی در فرکانس طبیعی ورق داشته باشد. همچنین چگونگی تاثیر جهات تغییر ماده می‌تواند تحت تاثیر مواردی مانند نسبت‌های هندسی ابعاد ورق و یا شرایط تکیه‌گاهی قرار گیرد که در قالب نمودارهایی، چگونگی این تاثیرات گزارش گردید. با توجه به نتایج این تحقیق می‌توان دریافت در شرایطی که حجم فازهای تشکیل‌دنده دو ورق نیز یکسان باشد، جهت توزیع ماده می‌تواند فرکانس‌های متفاوتی ایجاد کند. نتایج همچنین نشان داد در بازه مورد بررسی، با افزایش ضرایب بستر الاستیک، ترتیب اندازه فرکانس طبیعی ورق‌های مختلف با جهات مختلف توزیع ماده تغییر اندکی داشت. همچنین مشاهده شد، افزایش نسبت طول به عرض ورق می‌تواند علاوه بر تغییر اندازه فرکانس طبیعی ورق‌ها ترتیب اندازه فرکانس ورق‌ها را نسبت به هم تغییر دهد. تاثیر تغییر ضخامت ورق بر فرکانس طبیعی نیز نشان داد که افزایش ضخامت ورق‌های مورد بررسی سبب کاهش اولین فرکانس طبیعی ورق‌ها شد. افزایش اندازه توان‌های توزیع ماده در همه ورق‌ها سبب کاهش اولین فرکانس طبیعی شد که بدلیل نزدیک شدن خواص مواد به فاز فلز بود. همچنین مطالعه تاثیر نوع تکیه‌گاه نشان داد با تغییر قیود تکیه‌گاهی به ترتیب از تکیه‌گاه آزاد به تکیه‌گاه ساده و سپس تکیه‌گاه گیردار، اولین فرکانس طبیعی ورق افزایش می‌یابد.

Authorship Contribution Statement

Dr. Mahdi Adineh	**Biography:** Assistant Professor of Mechanical Engineering at University of Gonabad.
	Contribution Statement: Contribution Statement: Conceptualization, Methodology, Investigation, Software, Visualization, Validation, Writing – original draft, Writing – review & editing

۳- مراجع

[1] Khorshidi K, Karimi M, Rezaeisaray M. Piezoelectric Energy Harvesting from Functionally Graded Beams Using Modified Shear Deformation Theories. Mechanics of Advanced and Smart Materials journal. 2022;1:136-54.

[2] Vel SS, Batra R. Three-dimensional exact solution for the vibration of functionally graded rectangular plates. Journal of Sound and Vibration. 2004;272:703-30.

[3] Li Q, Iu V, Kou K. Three-dimensional vibration analysis of functionally graded material rectangular plates by Chebyshev polynomials. Proceedings of the Tenth International Conference on Enhancement and Promotion of Computational Methods in Engineering and Science, Sanya, China, 2006.

[4] Zhou F, Li S. Three-dimensional analysis for static bending and free vibration of functionally graded rectangular plate. 2010;42:325-31.

[5] Hosseini-Hashemi S, Taher HRD, Akhavan H, Omidi M. Free vibration of functionally graded rectangular plates using first-order shear deformation plate theory. Applied Mathematical Modelling. 2010;34:1276-91.

[6] Hosseini-Hashemi S, Fadaee M, Atashipour SR. A new exact analytical approach for free vibration of Reissner–Mindlin functionally graded rectangular plates. International Journal of Mechanical Sciences. 2011;53:11-22.

[7] Hosseini-Hashemi S, Fadaee M, Atashipour SR. Study on the free vibration of thick functionally graded rectangular plates according to a new exact closed-form procedure. Composite Structures. 2011;93:722-35.

[8] Baferani AH, Saidi A, Ehteshami H. Accurate solution for free vibration analysis of functionally graded thick rectangular plates resting on elastic foundation. Composite Structures. 2011;93:1842-53.

[9] Chakraverty S, Pradhan K. Free vibration of exponential functionally graded rectangular plates in thermal environment with general boundary conditions. Aerospace Science and Technology. 2014;36:132-56.

[10] Jin G, Su Z, Shi S, Ye T, Gao S. Three-dimensional exact solution for the free vibration of arbitrarily thick functionally graded rectangular plates with general boundary conditions. Composite Structures. 2014;108:565-77.

[11] Akavci S. An efficient shear deformation theory for free vibration of functionally graded thick rectangular plates on elastic foundation. Composite Structures. 2014;108:667-76.

[12] Chakraverty S, Pradhan K. Free vibration of functionally graded thin rectangular plates resting on Winkler elastic foundation with general boundary conditions using Rayleigh–Ritz method. International Journal of Applied Mechanics. 2014;6:1450043.

[13] Kumar S, Ranjan V, Jana P. Free vibration analysis of thin functionally graded rectangular plates using the dynamic stiffness method. Composite Structures. 2018;197:39-53.

[14] Xing Y, Wang Z, Xu T. Closed-form analytical solutions for free vibration of rectangular functionally graded thin plates in thermal environment. International Journal of Applied Mechanics. 2018;10:1850025.

[15] Talley M, Khorshidvand AR. Free vibration analysis of functionally graded rectangular plates via differential quadrature method. Iranian Journal of Mechanical Engineering Transactions of the ISME. 2019;20:46-70.

[16] Xu T, Xing Y. Closed-form solutions for free vibration of rectangular FGM thin plates resting on elastic foundation. Acta Mechanica Sinica. 2016;32:1088-103.

[17] Kang R, Xin F, Shen C, Lu TJ. 3D free vibration analysis of functionally graded plates with arbitrary boundary conditions in thermal environment. Advanced Engineering Materials. 2022;24:2100636.

[18] Huang C, Chung W. Analytical solution for the three-dimensional vibration of a rectangular functionally graded material plate with two simply supported opposite faces. International Journal of Structural Stability and Dynamics. 2023;23:2350014.

[19] Thai S, Nguyen VX, Lieu QX. Bending and free vibration analyses of multi-directional functionally graded plates in thermal environment: A three-dimensional Isogeometric Analysis approach. Composite Structures. 2022;295:115797.

[20] Adineh M, Kadkhodayan M. Three-dimensional thermo-elastic analysis of multi-directional functionally graded rectangular plates on elastic foundation. Acta Mechanica. 2017;228:881-99.

[21] Tahouneh V, Naei M. A novel 2-D six-parameter power-law distribution for three-dimensional dynamic analysis of thick multi-directional functionally graded rectangular plates resting on a two-parameter elastic foundation. Meccanica. 2014;49:91-109.

[22] Khorshidi K, Bakhsheshy A, Ghadirian H. The study of the effects of thermal environment on Free Vibration analysis of two-dimensional Functionally Graded Rectangular plates on Pasternak elastic foundation. Journal of Solid and Fluid Mechanics. 2016;6:137-47.

[23] Adineh M, Kadkhodayan M. Three-dimensional thermo-elastic analysis and dynamic response of a multi-directional functionally graded skew plate on elastic foundation. Composites Part B: Engineering. 2017;125:227-40.

[24] Yin S, Yu T, Bui TQ, Zheng X, Tanaka S. In-plane material inhomogeneity of functionally graded plates: A higher-order shear deformation plate isogeometric analysis. Composites Part B: Engineering. 2016;106:273-84.

[25] Xiang T, Natarajan S, Man H, Song C, Gao W. Free vibration and mechanical buckling of plates with in-plane material inhomogeneity–A three dimensional consistent approach. Composite Structures. 2014;118:634-42.

[26] Yousefi P, Khodadadi M. Solution of out-of-Plane vibration of moderately thick rectangular nano-plate using nonlocal sinusoidal shear deformation theory. Mechanics of Advanced and Smart Materials journal. 2022;1:231-46.

[27] Mehrabadi SJ, Nezamabadi A, Moayeedi E. Deflection analysis of composite micro-beam on elastic foundation by strain gradient theory. Mechanics of Advanced and Smart Materials journal. 2022;2:94-107.

[28] Yang J, Shen H-S. Vibration characteristics and transient response of shear-deformable functionally graded plates in thermal environments. Journal of Sound and Vibration. 2002;255:579-602.

[29] Kim Y-W. Temperature dependent vibration analysis of functionally graded rectangular plates. Journal of Sound and Vibration. 2005;284:531-49.

[30] Li Q, Iu V, Kou K. Three-dimensional vibration analysis of functionally graded material plates in thermal environment. Journal of Sound and Vibration. 2009;324:733-50.

[31] Zhou D, Cheung Y, Lo S, Au F. Three-dimensional vibration analysis of rectangular thick plates on Pasternak foundation. International journal for numerical methods in engineering. 2004;59:1313-34.

[32] Matsunaga H. Vibration and stability of thick plates on elastic foundations. Journal of engineering mechanics. 2000;126:27-34.

[33] Yas M, Aragh BS. Free vibration analysis of continuous grading fiber reinforced plates on elastic foundation. International Journal of Engineering Science. 2010;48:1881-95.