



حل تحلیلی معادله تحول توابع توزیع پارتونی در ناحیه x های کوچک از طریق بسط کرامرز-مویال معادله مادر فرایندهای مارکوف

نعیمه اولنج

دانشکده فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه بوعلی سینا، همدان

پست الکترونیکی: N_Olanj@basu.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۴۰۰/۶/۸؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۴۰۰/۷/۲۶)

چکیده

اخیراً، معادلات تحول توابع توزیع پارتونی را که معمولاً در پدیده شناسی هادرونی مورد استفاده قرار می‌گیرند، با استفاده از مدل‌سازی تصادفی مکانیک آماری دور از تعادل در فضای تکانه تولید کردیم. معادلات تحول حاصل از مدل‌سازی تصادفی با معادلات تحول پارتونی DGLAP یکسان هستند، اما با روش ریاضی بسیار ساده‌تری بر مبنی مکانیک آماری دور از تعادل و تئوری فرایندهای مارکوف به دست می‌آیند. در این مقاله، به حل تحلیلی معادله تحول پارتونی برای تابع توزیع نایکتای کواری در ناحیه x های (کسر تکانه طولی) کوچک از طریق بسط کرامرز-مویال معادله مادر می‌پردازیم. در نهایت، تابع توزیع نایکتای کواری وابسته به قید حاصل از حل تحلیلی را با در نظر گرفتن قیدهای ترتیب‌بندی قوی و ترتیب‌بندی زاویه‌ای با تابع توزیع نایکتای کواری تولید شده توسط گروه MMHT2014 مقایسه می‌کنیم. در حالت کلی نشان می‌دهیم که نتایج ما در x های کوچک و Q^2 های (مقیاس انرژی) متوسط توافق بسیار خوبی با نتایج گروه MMHT2014 دارند.

واژه‌های کلیدی: توابع توزیع پارتونی، مدل‌سازی تصادفی، معادله مادر، فرایند مارکوف، بسط کرامرز-مویال

۱. مقدمه

امروزه تعدادی از آزمایشگاه‌های فیزیک انرژی‌های بالا شامل LHC^1 از PDFها برای توصیف و تحلیل داده‌های به دست آمده از پراکندگی‌های ژرف ناکشسان در آشکارسازهای مختلف‌شان استفاده می‌کنند. با توجه به اهمیت موضوع گروه DGLAP^۳ معادله تحولی برای PDFها بر حسب Q^2 (مقیاس کاوش) را

توابع توزیع پارتونی (PDF^۱) از اجزای اصلی محاسبات پدیدارشناسی در برخورد‌های انرژی‌های بالا در فیزیک ذرات هستند. این توابع معمولاً با استفاده از داده‌های تجربی از طریق روش‌های پارامتربندی و با در نظر گرفتن قوانین جمع و تعدادی فرض‌های تئوری دیگر به دست آورده می‌شوند [۱].

۲. Large Hadron Collider

۳. Dokshitzer–Gribov–Lipatov–Altarelli–Parisi

۱. Parton Distribution Function

طبق مطالعات پدیده‌شناسی، مشخص شده است که PDFها با افزایش مقیاس کاوش (Q^2) هرگز به حالت پایدار (حالتی که دیگر با افزایش انرژی تغییر در احتمالها نخواهیم داشت) نخواهند رسید. به عبارت دیگر، ساختار پارتونی هادرون‌ها با افزایش انرژی فوتون مجازی (Q^2) هرگز اشباع نمی‌شود. بر این اساس، نقش مهم مکانیک آماری غیر تعادلی در توصیف تحولات PDF درون هادرون‌ها واضح می‌شود. برای مثال نایاک به مطالعه توابع شکافت در کرمودینامیک غیر تعادلی در تقریب مرتبه اول پرداخته است [۴] و بوچلا و همکارانش با استفاده از مکانیک آماری کوانتومی، شرایط مرزی معادلات DGLAP در Q^2 پایین را به دست آوردند [۵] اخیراً، با استفاده از برخی مدل‌سازی‌های تصادفی ساده بر اساس مکانیک آماری دور از تعادل، معادله تحول Q^2 پارتون‌ها را تولید کرده‌ایم [۶]. ما نشان دادیم که معادله حاکم بر تحول Q^2 پارتون‌ها، معادله مادر مکانیک آماری دور از تعادل در فضای تکانه می‌باشد. لازم به ذکر است معادله تحول پارتون-های حاصل از مدل‌سازی تصادفی همان معادلات تحول DGLAP در نظریه pQCD هستند که با استفاده از عملیات ریاضی بسیار ساده‌تری بر مبنای مکانیک آماری دور از تعادل و تئوری فرایندهای مارکوف به دست آمده‌اند [۶]. معادلات به دست آمده در مرجع [۶] مربوط به تحول توابع توزیع پارتونی هم‌راستا ($a(x, Q^2)$) هستند. از آنجایی که معادله مادر را می‌توان برای سیستم‌هایی با چند متغیر تصادفی بسط داد [۷]، بنابراین مدل‌سازی مذکور را نیز می‌توان برای به دست آوردن معادله تحول توابع توزیع پارتونی وابسته به تکانه عرضی که وابسته به دو متغیر تصادفی تکانه عرضی و کسر تکانه طولی ($f_a(x, k_t^2, Q^2)$) هستند، تعمیم داد. بر این اساس امیدواریم در آینده معادله تحول توابع توزیع پارتونی انتگرال‌گیری نشده (وابسته به تکانه عرضی) را با استفاده از مدل سازی تصادفی بر مبنای مکانیک آماری دور از تعادل تولید کنیم. گروه‌های مختلفی به حل تحلیلی معادلات تحول DGLAP به روش‌های گوناگون نظیر روش مشخصه، روش لاگرانژ، تکنیک تبدیل ملین، استفاده از نقشه‌های مختلط در حوزه انتگرال‌های پربند

در پایین‌ترین مرتبه کرمودینامیک کوانتومی اختلالی^۱ به وسیله تکنیک‌های تبدیل ملین به شکل زیر به دست آورده‌اند [۲]:

$$\frac{\partial q(x, Q^2)}{\partial \ln Q^2} = \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dz}{z} \left[\begin{aligned} &P_{qq}(z) q\left(\frac{x}{z}, Q^2\right) + \\ &P_{qg}(z) g\left(\frac{x}{z}, Q^2\right) \end{aligned} \right],$$

$$\frac{\partial g(x, Q^2)}{\partial \ln Q^2} = \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dz}{z} \left[\begin{aligned} &P_{gg}(z) g\left(\frac{x}{z}, Q^2\right) + \\ &P_{gq}(z) \sum_q q\left(\frac{x}{z}, Q^2\right) \end{aligned} \right].$$

(۱)

که در آن $q(x, Q^2)$ تابع توزیع کوارک یا پادکوارک (گلوئون) است که احتمال پیدا کردن کوارک یا پادکوارک (گلوئون) با کسر x از تکانه طولی هادرون والد درون هادرون توسط فوتون کاوشگر با مقیاس انرژی Q^2 را بیان می‌کند. $P_{aa'}(z)$ احتمال گسیل پارتون a با کسر z از تکانه طولی پارتون a' در مرتبه اول pQCD است و به توابع شکافت مرتبه اول معروف هستند. پس از آن گروه KMR با تفکیک قسمت‌های حقیقی و مجازی معادله DGLAP، معادله اصلاح شده آن را به صورت زیر ارائه کردند [۳]:

$$\frac{\partial a(x, Q^2)}{\partial \ln Q^2} = \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} \left[\begin{aligned} &\int_x^{1-\Delta} P_{aa'}(z) a'\left(\frac{x}{z}, Q^2\right) dz - \\ &a(x, Q^2) \sum_a \int_0^{1-\Delta} P_{a'a}(z) dz' \end{aligned} \right],$$

(۲)

که در آن $a(x, Q^2)$ به $xg(x, Q^2)$ یا $xq(x, Q^2)$ اشاره دارد و Δ ، یک برش برای جلوگیری از تکینگی توابع شکافت در $z=1$ حاصل از تابش نرم گلوئونی^۳ است. در حال حاضر،

۱. Perturbative quantum chromodynamics (pQCD)

۲. Kimber-Martin-Ryskin

۳. Soft singularity

۲. مروری بر تولید معادلات تحول توابع توزیع پارتونی با استفاده از مدل سازی تصادفی در مکانیک آماری دور از تعادل

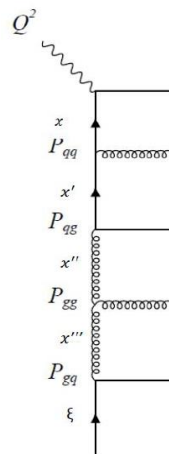
توابع توزیع پارتونی (PDF) از اجزای اصلی محاسبات پدیدارشناسی در برخوردهای انرژی بالا در فیزیک ذرات هستند. در این بخش به طور مختصر نگاهی بر تولید معادلات تحول توابع توزیع پارتونی با استفاده از مدل سازی تصادفی مکانیک آماری دور از تعادل در فضای تکانه [۶] خواهیم داشت. این معادلات تحول با معادلات تحول پارتونی DGLAP یکسان هستند، اما با روش ریاضی بسیار ساده تری بر مبنای مکانیک آماری دور از تعادل و تئوری فرایندهای مارکوف به دست می آیند. معادلات تحول توابع توزیع پارتونی به طور گسترده ای در پدیده شناسی هادرون ها مورد استفاده قرار می گیرند. لازم به یادآوری است که معادله مادر سیستم های تک ذره ای برای فرایندهای مارکوف در فضای مکان (متغیر تصادفی x مکان ذره را نشان می دهد) با فرایندهای پخش-برهمکنش p گونه ای و متغیر تصادفی پیوسته بدین صورت است [۶]:

$$\frac{\partial P_i(x,t)}{\partial t} = \sum_{j=1}^p \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \left(P_j(x-y,t) \tau_{ij}(x-y,y,t) - P_i(x,t) \tau_{ji}(x,y,t) \right) dy \right], \quad (3)$$

که در آن $P_i(x,t)$ احتمال پیدا کردن ذره نوع i در زمان t در مکان x و $\tau_{ji}(x,y,t)$ نرخ فرایند تغییر مکان ذره از $x+y$ به x و نوع ذره از i به j در زمان t است. در حال حاضر، طبق مطالعات پدیده شناسی، مشخص شده است که PDFها با افزایش مقیاس کاوش (Q^2) هرگز به حالت پایدار نخواهند رسید. به عبارت دیگر، ساختار پارتونی هادرون ها با افزایش انرژی فوتون مجازی (Q^2) هرگز اشباع نمی شود. بر این اساس، نقش مهم مکانیک آماری غیر تعادلی در توصیف تحولات PDF درون هادرون ها واضح می شود. کاوش ساختار

و غیره در مراجع [۸-۱۲] پرداخته اند. در این مقاله با توجه به این که معادله تحول پارتون ها همان معادله مادر مکانیک آماری دور از تعادل است، با استفاده از بسط کرامرز-موپال معادله مادر [۱۳-۱۵] که یکی از روش های حل معادله مادر است، به حل تحلیلی معادله تحول تابع توزیع نایکتای کواریکی در ناحیه x های کوچک پرداخته ایم. همان طور که از معادله (۲) مشخص است جواب های این معادله تحول، وابسته به برش خواهند بود. با استفاده از قید ثابت و دو قید ترتیب بندی قوی و ترتیب بندی زاویه ای که وابسته به تکانه عرضی پارتون مورد کاوش هستند، به بررسی این جواب ها می پردازیم. امروزه با تقریب خوبی از توابع توزیع پارتونی معمولی (مستقل از برش) به عنوان ورودی برای محاسبه توابع توزیع پارتونی انتگرال گیری نشده وابسته به تکانه عرضی استفاده می شود. اما همان طور که در مراجع [۱۶ و ۱۷] آمده است، برای دقت بیشتر محاسبات پدیدارشناسی مربوط به کمیت های انحصاری^۱ که وابسته به تکانه عرضی هستند، بایستی از توابع توزیع پارتونی وابسته به برش استفاده شود. بنابراین امیدواریم حل تحلیلی ارائه شده در این مقاله بتواند در بهبود نتایج محاسبات پدیدارشناسی کمیت های انحصاری مفید واقع شود. به این منظور در این مقاله، ابتدا در بخش ۲ به مروری کوتاه بر تولید معادله تحول توابع توزیع پارتونی با استفاده از مدل سازی تصادفی مکانیک آماری دور از تعادل می پردازیم. در بخش ۳ نگاهی اجمالی به بسط کرامرز-موپال معادله مادر خواهیم داشت. در بخش ۴ به حل تحلیلی معادله تحول تابع توزیع نایکتای کواریکی در ناحیه x های کوچک از طریق بسط کرامرز-موپال معادله مادر در فضای تکانه خواهیم پرداخت و در نهایت در بخش ۵ با رسم نمودارهای حاصل از حل تحلیلی ارائه شده با در نظر گرفتن قید ترتیب بندی قوی، قید ترتیب بندی زاویه ای و قید ثابت و مقایسه آنها با توابع توزیع نایکتای کواریکی ارائه شده توسط گروه MMHT2014 [۱] به بحث و نتیجه گیری می پردازیم.

۱. Exclusive



شکل ۱. بخشی از زنجیره تحول (انواع مختلف شکافت پارتون در زنجیره تحول در مقیاس Q^2) [۶].

$$(۴) \quad g\left(\frac{x}{z}, Q^2\right) \rightarrow g(x, Q^2), \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} P_{gg}(z), \quad (۵)$$

که i' از ۱ تا n_F (تعداد جفت‌های کوآرک و پادکوآرک) و i از ۱ تا $2n_F$ (تعداد کل طعم‌های کوآرک و پادکوآرک) تغییر می‌کند. باید توجه داشت که در فرایندهای خلق و فنا (موارد ۱ و ۲) علاوه بر تغییر تکانه طولی پارتون، نوع پارتون نیز تغییر می‌کند، در حالی که در فرایندهای پخش در فضای تکانه (موارد ۳ و ۴) تنها تکانه طولی پارتون تغییر می‌کند. همچنین مطابق شکل ۱ فرایندهای خلق و فنا با گسیل کوآرک و فرایندهای پخش با گسیل گلوئون (پارتون‌های گسیلی در زنجیره تحول در نظر گرفته نمی‌شوند) همراه هستند. طبق نظریه pQCD، نیروی قوی بین پارتون‌ها در فواصل کوچک ضعیف می‌شود و به طور مجانبی به صفر میل می‌کند. از آنجا که آزمایش‌ها در محدوده انرژی‌های بالا، ساختار هادرون را در مقیاس زمانی کوچک بررسی می‌کنند، بنابراین می‌توان برهمکنش بین پارتون‌ها را در مقایسه با برهمکنش پر انرژی آنها با فوتون مجازی نادیده گرفت. به عبارت دیگر با یک تقریب خوب، پارتون‌ها می‌توانند به عنوان ذرات آزاد درون هادرون (مدل پارتونی فاینمن) در نظر گرفته شوند و در نهایت، تحول Q^2 پارتون می‌تواند در سیستم ذرات منفرد مطالعه شود. با توجه به نکات مذکور، ما می‌توانیم تحول Q^2 پارتون را در مرتبه اول pQCD با سیستم ذرات منفرد دارای

هادرون، توسط یک فوتون مجازی با مجازیت Q^2 که از پرتابه‌ای مثل الکترون در پراکندگی ناکشسان ژرف گسیل می‌شود، می‌تواند به عنوان بخشی از زنجیره تحول ترسیم شده در شکل ۱ مشاهده شود. فرایند شکافت در هر مرحله کاملاً یک فرایند تصادفی است و تنها به یک گام قبل تحول بستگی دارد، بنابراین فرایند تحول پارتون‌ها از نوع فرایندهای مارکوف است و می‌تواند بر اساس معادله مادر فرایندهای مارکوف مکانیک آماری دور از تعادل بیان شود. در هر شکافت، کسری از تکانه طولی کاهش می‌یابد، به این ترتیب خواهیم داشت:

$$\xi < x' < x'' < x''' < \dots < \xi, \quad (۴)$$

با توجه به شکل ۱، نوع و تکانه طولی پارتونی که روی یک شبکه متناهی پیوسته یک بعدی ($0 < x < 1$) قرار دارد، در طی فرایندهای پخش-برهمکنش تا مقیاس Q^2 تغییر می‌کند. نرخ فرایندهای انجام شده در تقریب مرتبه اول توسط پارتون‌های درون هادرون، مطابق با نرخ گذار ذره بین جایگاه‌های مختلف در معادله مادر در فضای مکان ($\tau_{ij}(x, y, t)$)، می‌تواند به شکل زیر بیان شود:

$$(۱) \quad g\left(\frac{x}{z}, Q^2\right) \rightarrow q_i(x, Q^2), \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} P_{qg}(z),$$

$$(۲) \quad q_i\left(\frac{x}{z}, Q^2\right) \rightarrow g(x, Q^2), \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} P_{gq}(z),$$

$$(۳) \quad q_i\left(\frac{x}{z}, Q^2\right) \rightarrow q_j(x, Q^2), \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} P_{qq}(z),$$

$$\frac{\partial g(x, Q^\vee)}{\partial \ln Q^\vee} = \frac{\alpha_S(Q^\vee)}{2\pi} \int_0^{1-\Delta} \frac{dz}{z} \left[\sum_{i=1}^{nF} \left(P_{gq}(z) q_i \left(\frac{x}{z}, Q^\vee \right) \right) + P_{gg}(z) g \left(\frac{x}{z}, Q^\vee \right) \right] - \frac{\alpha_S(Q^\vee)}{2\pi} \int_0^{1-\Delta} dz \left[n_F P_{qg}(z) g(x, Q^\vee) + P_{gg}(z) g(x, Q^\vee) \right], \quad (8)$$

که در آن جملات مثبت "چشمه" و جملات منفی "چاهک" توابع توزیع پارتونی هستند. از آنجایی که $z=1$ متناظر با هیچ فرایند پخش-برهمکنشی نیست، Δ را در حد بالای انتگرال‌ها وارد می‌کنیم. همان طور که واضح است معادلات تحول Q^\vee پارتون‌ها حاصل از مدل سازی تصادفی (معادله (۷) و (۸)) همان معادلات DGLAP هستند که از نظر محاسبات ریاضی بسیار ساده‌تر به دست آمده‌اند.

۳. مروری مختصر بر بسط کرامرز-مویال معادله

مادر فرایندهای مارکوف

معادله مادر فرایندهای تصادفی با متغیر تصادفی پیوسته (برای مثال معادله (۳)) یک معادله انتگرال-دیفرانسیلی است. بسط کرامرز-مویال معادله مادر [۱۳-۱۵]، معادله انتگرال-دیفرانسیل را به شکل یک معادله دیفرانسیل جزئی مرتبه بی‌نهایت در می‌آورد. بنابراین کار با آن سخت خواهد بود مگر در شرایط خاصی که بتوان سری را با حفظ تعداد مناسبی از جملات قطع کرد. در مواردی که بتوان بسط کرامرز-مویال معادله مادر را تا مرتبه دوم حفظ کرد، به معادله دیفرانسیل جزئی مرتبه دوم برای چگالی احتمال گذار $P(x, t | x_0, t_0)$ که به طور مختصر با $P(x, t)$ نمایش داده می‌شود می‌رسیم که معادله فوکر-پلانک نامیده می‌شود. در این بخش به طور مختصر نگاهی به بسط کرامرز-مویال معادله مادر در فضای مکان خواهیم داشت. برای این منظور معادله مادر (۳) را برای سیستم های تک گونه و نرخ گذار مستقل از زمان به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

فرایندهای پخش-برهمکنش یعنی فرایندهای خلق و فنا و فرایندهای انتشار روی شبکه یک بعدی متناهی پیوسته (محور تکانه طولی x) چندگونه‌ای مدل‌سازی کنیم. به این منظور معادله مادر در فضای مکان ۳ برای متغیر تصادفی پیوسته متناهی کسر تکانه طولی x (مطابق با متغیر مکان x در فضای مکان) در مقیاس انرژی μ (مطابق با مقیاس زمان t در فضای مکان) برای فضای تکانه به صورت زیر تعمیم داده می‌شود:

$$\frac{\partial P_i(x, \mu)}{\partial \mu} = \sum_{j=1}^p \left[\int_0^1 dz \left(P_j \left(\frac{x}{z}, \mu \right) \tau_{ij}(z, \mu) - P_i(x, \mu) \tau_{ji}(z, \mu) \right) \right], \quad (6)$$

که در آن $P_i(x, \mu)$ احتمال پیدا کردن پارتون نوع i با کسر x از تکانه طولی هادرون والد درون هادرون، توسط فوتون کاوشگر با مقیاس انرژی μ و $\tau_{ij}(z, \mu)$ نرخ گسیل پارتون i (با کسر تکانه طولی x) با کسر z از تکانه طولی پارتون j (با کسر تکانه طولی $\frac{x}{z}$) است. لازم به ذکر است گذار $P_j \left(\frac{x}{z}, \mu \right) \rightarrow P_i(x, \mu)$ توسط گسیل پارتونی که در زنجیره تحول پارتون در نظر گرفته نمی‌شود، انجام می‌شود. سرانجام، با جایگذاری $xq_i(x, \mu)$ و $xg(x, \mu)$ به جای $P_i(x, \mu)$ و جایگذاری $\frac{\alpha_S(\mu)}{2\pi} P_{ij}(z)$ به جای $\tau_{ij}(z, \mu)$ و انتخاب مقیاس $\mu = \ln(Q^\vee/Q)$ در معادله مادر (۶)، معادلات تحول Q^\vee پارتون‌ها با در نظر گرفتن این حقیقت که طعم کوآرک تحت نیروهای قوی تغییر نمی‌کند، به صورت زیر به دست می‌آیند [۶]:

$$\frac{\partial q_i(x, Q^\vee)}{\partial \ln Q^\vee} = \frac{\alpha_S(Q^\vee)}{2\pi} \int_0^{1-\Delta} \frac{dz}{z} \left[P_{qq}(z) q_i \left(\frac{x}{z}, Q^\vee \right) + P_{qg}(z) g \left(\frac{x}{z}, Q^\vee \right) \right] - \frac{\alpha_S(Q^\vee)}{2\pi} \int_0^{1-\Delta} dz \left[P_{qq}(z) q_i(x, Q^\vee) + P_{qg}(z) q_i(x, Q^\vee) \right], \quad (7)$$

x های کوچک می پردازیم.

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = \int_{-\infty}^{+\infty} dy (P(x-y,t)\tau(x-y,y) - P(x,t)\tau(x,y)), \quad (9)$$

حال اولین جمله انتگرالده را به صورت زیر بسط تیلور می دهیم:

$$P(x-y,t)\tau(x-y,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-y)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n} (P(x,t)\tau(x,y)). \quad (10)$$

با جایگذاری معادله (۱۰) در معادله (۹) خواهیم داشت:

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = \int_{-\infty}^{+\infty} dy \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-y)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n} (P(x,t)\tau(x,y)) - P(x,t)\tau(x,y) \right) = \int_{-\infty}^{+\infty} dy \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-y)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n} (P(x,t)\tau(x,y)) \right), \quad (11)$$

حال با تعریف کمیت $\alpha_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dy (y^n \tau(x,y))$ بسط کرامرز-موپال معادله مادر به صورت زیر به دست می آید:

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n} (\alpha_n(x)P(x,t)), \quad (12)$$

که یک معادله دیفرانسیل جزئی مرتبه بی نهایت است. این معادله در موارد خاصی که بشود تنها چند جمله از مراتب پایین آن را نگه داشت، توسط روش های حل معادلات دیفرانسیل جزئی قابل حل است. لازم به ذکر است می توان این بسط را به موردی که نرخ گذار وابسته به زمان باشد با جایگذاری $\tau(x,y,t)$ به جای نرخ گذار $\tau(x,y)$ و $\alpha_n(x,t)$ به جای $\alpha_n(x)$ تعمیم داد. با نگه داشتن دو جمله اول بسط کرامرز-موپال معادله (۱۲) به معادله آشنای فوکر-پلانک با ضریب رانش α_1 و ضریب انتشار α_2 می رسیم. به این ترتیب در بخش ۳ با بررسی بسط کرامرز-موپال معادله مادر در فضای تکانه و نگه داشتن تنها جمله اول بسط به حل معادله تحول توزیع پارتونی در ناحیه

۴. حل تحلیلی معادله تحول DGLAP در ناحیه

x های کوچک توسط بسط کرامرز-موپال معادله

مادر فرایندهای مارکوف

همان طور که در بخش ۲ ذکر شد و در مقاله [۶] نشان داده ایم، معادله تحول توابع توزیع پارتونی DGLAP همان معادله مادر فرایندهای مارکوف در مکانیک آماری دور از تعادل در فضای تکانه است. بنابراین برای حل تحلیلی آن می توانیم از روش های حل معادله مادر موجود در مکانیک آماری دور از تعادل استفاده کنیم. در این مقاله، ما از بسط کرامرز-موپال معادله مادر فرایندهای مارکوف که یکی از روش های حل معادله مادر است، برای حل معادله DGLAP بهره جستیم. همان طور که در بخش ۳ اشاره شد، بسط کرامرز-موپال معادله مادر، معادله انتگرال-دیفرانسیلی را به یک معادله دیفرانسیل جزئی مرتبه بی نهایت تبدیل می کند. بنابراین کار با این معادله سخت خواهد بود مگر در شرایط خاصی که بشود سری را با حفظ تعداد مناسبی از جملات قطع کرد. بنابراین در این مقاله معادله تحول توابع توزیع پارتونی را در ناحیه x های کوچک (که در آن تنها جمله اول بسط نگه داشته می شود) مورد بررسی قرار می دهیم.

یک توزیع معمول برای بررسی توابع توزیع پارتونی، توزیع

نایکتای کوارکی $(q_i - \bar{q}_i) = \sum_{i=1}^{n_F} q_i^{NS}$ که در آن n_F تعداد

طعم های فعال کوارک است) است که در آن قسمت گلوونی

معادله تحول حذف می شود و در نتیجه بررسی آن ساده تر

خواهد بود. بنابراین در این مقاله، ما به بررسی حل تحلیلی

معادله تحول تابع توزیع نایکتای کوارکی در ناحیه x های

کوچک با تعداد طعم های فعال $n_F = 3$ (شامل کوارک های

بالا، پایین و شگفت) به روش بسط کرامرز-موپال معادله مادر

در فضای تکانه می پردازیم. همان طور که می دانیم معادله

DGLAP برای تابع توزیع نایکتای کوارکی با در نظر گرفتن

مقیاس کاوش $t = Ln \frac{Q^2}{\Lambda_{QCD}^2}$ آستانه انرژی را که

۱. Drift coefficient

۲. Diffusion coefficient

پارتون‌های حقیقی گسیل شده که از اثرات همدوسی حاصل می‌شود و یا با در نظر گرفتن قید ترتیب‌بندی زاویه‌ای (AOC) که شرط حاکم بر معادلات CCFM^۱ است و از همدوسی رنگی گلوئون‌ها می‌آید تعیین شود. همچنین، ثابت جفت شدگی QCD (α_s) در تقریب مرتبه اول به صورت زیر است:

$$\alpha_s(t) = \frac{12\pi}{(33-2n_F)t} \quad (16)$$

حال به حل تحلیلی معادله (۱۵) توسط بسط کرامرز-مویال معادله مادر در فضای تکانه می‌پردازیم. همان طور که در بخش ۳ گفته شد، در فرایندهای تصادفی بسط کرامرز-مویال به بسط سری تیلور معادله مادر بر می‌گردد و معادله انتگرال-دیفرانسیلی مادر را به معادله دیفرانسیل جزئی از مرتبه بی‌نهایت تبدیل می‌کند. بنابراین برای حل به روش بسط کرامرز-مویال در ابتدا $q^{NS}(\frac{x}{z}, t)$ را بسط تیلور می‌دهیم و بعد از ساده کردن معادله به بسط کرامرز-مویال معادله مادر می‌رسیم. با فرض این که معادله تحول پارتونی DGLAP را برای ناحیه x های کوچک مورد بررسی قرار داده‌ایم، می‌توان بسط کرامرز-مویال را تا مرتبه اول حفظ کرد و از بقیه مراتب صرف نظر کرد. برای این منظور، با توجه به این که $0 < z < 1$ است، می‌توانیم از تغییر متغیر $u = 1 - z$ که از یک کوچک‌تر است، استفاده کنیم. در نتیجه خواهیم داشت:

$$q^{NS}(\frac{x}{z}, t) = q^{NS}(\frac{x}{1-u}, t) = q^{NS}(x \sum_{j=0}^{\infty} u^j, t) = q^{NS}(x + x \sum_{j=1}^{\infty} u^j, t), \quad (17)$$

از آنجایی که برای x های کوچک عبارت $x \sum_{j=1}^{\infty} u^j$ کوچک است، بنابراین بسط تیلور $q^{NS}(\frac{x}{z}, t)$ به صورت زیر خواهد بود:

$$q^{NS}(\frac{x}{z}, t) = q^{NS}(x, t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x \sum_{j=1}^{\infty} u^j)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n} q^{NS}(x, t). \quad (18)$$

با جایگذاری معادله (۱۸) در معادله DGLAP (۱۵) خواهیم

پایین تر از آن کرمودینامیک اختلالی اعتبار ندارد مشخص می‌کند) به صورت زیر است:

$$\frac{\partial q^{NS}(x, t)}{\partial t} = \frac{\alpha_s(t)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dz}{z} P_{qq}(z) q^{NS}(\frac{x}{z}, t) \quad (13)$$

که شامل تمام شکافت‌های ممکن از یک پارتون والد با کسر تکانه طولی $\frac{x}{z}$ از تکانه هادرون در مقیاس t به پارتون دختر با کسر تکانه طولی کوچک‌تر $x < \frac{x}{z}$ در مقیاس $t + dt$ است. لازم به ذکر است که حد پایین انتگرال به دلیل این که اولین آرگومان $q^{NS}(\frac{x}{z}, t)$ خارج از محدوده مجاز ($0 < x < 1$) قرار نگیرد، x انتخاب شده است. تابع شکافت $P_{qq}(z)$ در تقریب مرتبه اول pQCD به صورت زیر است که در $z=1$ تکینگی دارد:

$$P_{qq}(z) = \frac{4}{3} \frac{1+z^2}{1-z}, \quad (14)$$

این تکینگی به تکینگی حقیقی تابش نرم گلوونی مشهور است. گروه KMR با تفکیک قسمت‌های حقیقی و مجازی معادله DGLAP، معادله اصلاح شده آن را به صورت زیر ارائه کردند [۳]:

$$\frac{\partial q^{NS}(x, t)}{\partial t} = \frac{\alpha_s(t)}{2\pi} \int_x^{1-\Delta} \frac{dz}{z} P_{qq}(z) q^{NS}(\frac{x}{z}, t) - \frac{\alpha_s(t)}{2\pi} \int_x^{1-\Delta} dz P_{qq}(z) q^{NS}(x, t), \quad (15)$$

که در آن جمله اول نمایش دهنده تحول حقیقی پارتون والد از کسر تکانه $\frac{x}{z}$ به x (پارتون مورد بررسی) و جمله دوم نمایش دهنده تحول مجازی پارتون مورد بررسی با کسر تکانه x به پارتونی با کسر تکانه zx از هادرون است. همچنین Δ برای اجتناب از تکینگی توابع شکافت در $z=1$ حاصل از تابش گلوئونی نرم در نظر گرفته شده است. این برش می‌تواند با در نظر گرفتن قید ترتیب‌بندی قوی (SOC) در تکانه عرضی

۱. Ciafaloni-Catani-Fiorani-Marchesini

$$\frac{4x}{3} \int_0^1 \frac{1+z^2}{z^2} dz,$$

(۲۲)

همان طور که واضح است انتگرال‌های مربوط به تعاریف M و $\beta_1(x)$ در $z=0$ تکینگی دارند. بنابراین در مواردی که تکینگی وجود دارد، حد پایین انتگرال را Δ می‌گذاریم. حال با جایگذاری M ، $\beta_1(x)$ و ثابت جفت شدگی برای $n_F=3$ در معادله (۲۱) برای x ‌های کوچک (با حفظ جمله $n=1$) خواهیم داشت:

$$\frac{\partial q^{NS}(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{rvt} \left[aq(x,t) + bx \frac{\partial q^{NS}(x,t)}{\partial x} \right],$$

(۲۳)

که در آن $a = \frac{1}{r} - Ln\Delta$ و $b = \frac{1}{\Delta}$ است. همان طور که از معادله (۲۳) مشخص است، ما توانستیم توسط بسط کرامرز-مویال معادله مادر در فضای تکانه، معادله انتگرال-دیفرانسیلی DGLAP را در ناحیه x ‌های کوچک به یک معادله دیفرانسیل جزئی مرتبه اول تبدیل کنیم. اکنون با استفاده از روش جداسازی متغیرها برای حل معادله دیفرانسیل جزئی (۲۳) به دست می‌آوریم:

$$q^{NS}(x,t) = Dt^{\frac{1}{rv}} (bc+a) x^c, \quad (24)$$

در حالی که ضریب D با توجه به شرایط اولیه مسئله به دست می‌آید. شرایط اولیه توسط گروه‌های مختلفی با توجه به داده‌های تجربی ارائه شده است که ما در این مقاله از شرایط اولیه ارائه شده توسط گروه MMHT2014 [۱] برای $q^{NS}(x,Q)$ در انرژی $Q_0 = 1 GeV$ استفاده می‌کنیم. بنابراین ضریب D با توجه به قواعد جمع تعداد کوارک‌ها (در پروتون) در مقیاس t [۱] به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\int_0^1 [u(x,t_0) - \bar{u}(x,t_0)] dx = r,$$

$$\int_0^1 [d(x,t_0) - \bar{d}(x,t_0)] dx = 1,$$

$$\int_0^1 [s(x,t_0) - \bar{s}(x,t_0)] dx = 0,$$

داشت:

$$\begin{aligned} \frac{\partial q^{NS}(x,t)}{\partial t} = & \frac{\alpha_s(t)}{r\pi} \int_0^1 \frac{dz}{z} P_{qq}(z) q^{NS}(x,t) + \\ & \frac{\alpha_s(t)}{r\pi} \int_0^1 \frac{dz}{z} P_{qq}(z) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x \sum_{j=1}^{\infty} u^j)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n} q^{NS}(x,t) \right) - \\ & \frac{\alpha_s(t)}{r\pi} \int_0^1 dz P_{qq}(z) q^{NS}(x,t), \end{aligned}$$

(۱۹)

درحالی که حد پایین انتگرال اول و دوم با توجه به این که اولین آرگومان تابع توزیع نایکتای کوارکی از $\frac{x}{z}$ به x تغییر یافته، می‌تواند صفر در نظر گرفته شود. با معرفی کمیت‌های زیر

$$\begin{aligned} M &= \int_0^1 dz P_{qq}(z) \left(\frac{1}{z} - 1 \right), \\ \beta_n(x) &= \int_0^1 \frac{dz}{z} P_{qq}(z) \left(x \sum_{j=1}^{\infty} u^j \right)^n, \end{aligned}$$

(۲۰)

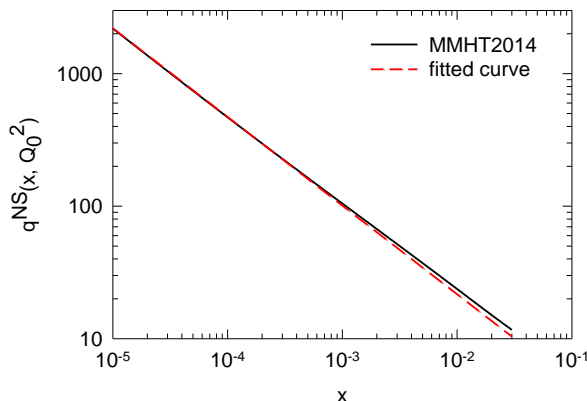
به بسط کرامرز-مویال معادله مادر در فضای تکانه می‌رسیم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial q^{NS}(x,t)}{\partial t} = & \frac{\alpha_s(t)}{r\pi} M q^{NS}(x,t) + \\ & \frac{\alpha_s(t)}{r\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n(x)}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n} q^{NS}(x,t), \end{aligned}$$

(۲۱)

همان طور که واضح است معادله انتگرال-دیفرانسیلی تحول تابع توزیع نایکتای کوارکی به معادله دیفرانسیل جزئی مرتبه بی‌نهایت تبدیل شد که با فرض بررسی معادله در x ‌های کوچک، بسط را تا مرتبه اول ($n=1$) حفظ می‌کنیم. برای این منظور $\beta_1(x)$ را با جایگذاری معادله (۱۴) در آن به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \beta_1(x) &= \int_0^1 \frac{dz}{z} \frac{4}{3} \frac{1+z^2}{1-z} x \sum_{k=1}^{\infty} u^k = \\ & \int_0^1 \frac{dz}{z} \frac{4}{3} \frac{1+z^2}{1-z} x \left(\sum_{k=0}^{\infty} u^k - 1 \right) = \\ & \int_0^1 \frac{dz}{z} \frac{4}{3} \frac{1+z^2}{1-z} x \left(\frac{1}{1-u} - 1 \right) \xrightarrow{u=1-z} \int_0^1 \frac{dz}{z} \frac{4}{3} \frac{1+z^2}{1-z} x \left(\frac{1-z}{z} \right) = \end{aligned}$$



شکل ۲. نمودار برازش حل تحلیلی معادله DGLAP با تابع توزیع نایکتای کوارکی معمولی MMHT2014 در $Q_0^2 = 1 GeV^2$ در بازه تغییرات $x: [10^{-5}, 0/03]$.

(۲۷)
 اکنون توسط برازش معادله (۲۲) در $t = t_0$ با معادله (۲۷) که توسط گروه MMHT2014 ارائه شده است در ناحیه x های کوچک $(0/03 \leq x \leq 10^{-5})$ ، با استفاده از نرم افزار متلب $c = -0/6691$ تعیین می شود (همان طور که در شکل ۲ آمده است). در نهایت با فرض $\Lambda_{QCD}^2 = 0/09 GeV^2$ [۳]، تابع توزیع نایکتای کوارکی وابسته به برش برای $n_F = 3$ که با استفاده از حل تحلیلی به روش بسط کرامرز- مویال معادله مادر در ناحیه x های کوچک به دست آمده است، به صورت زیر ارائه می شود:

$$q^{NS}(x, Q^2) = 0/4927x^{-0/6691} \left(\frac{\text{Ln} \frac{Q^2}{0/09}}{\text{Ln} \frac{1}{0/09}} \right)^{\frac{\Lambda}{r_V} \left(\frac{-0/6691}{\Delta} + \frac{1}{r} - \text{Ln} \Delta \right)} \quad (28)$$

۵. بحث و نتیجه گیری

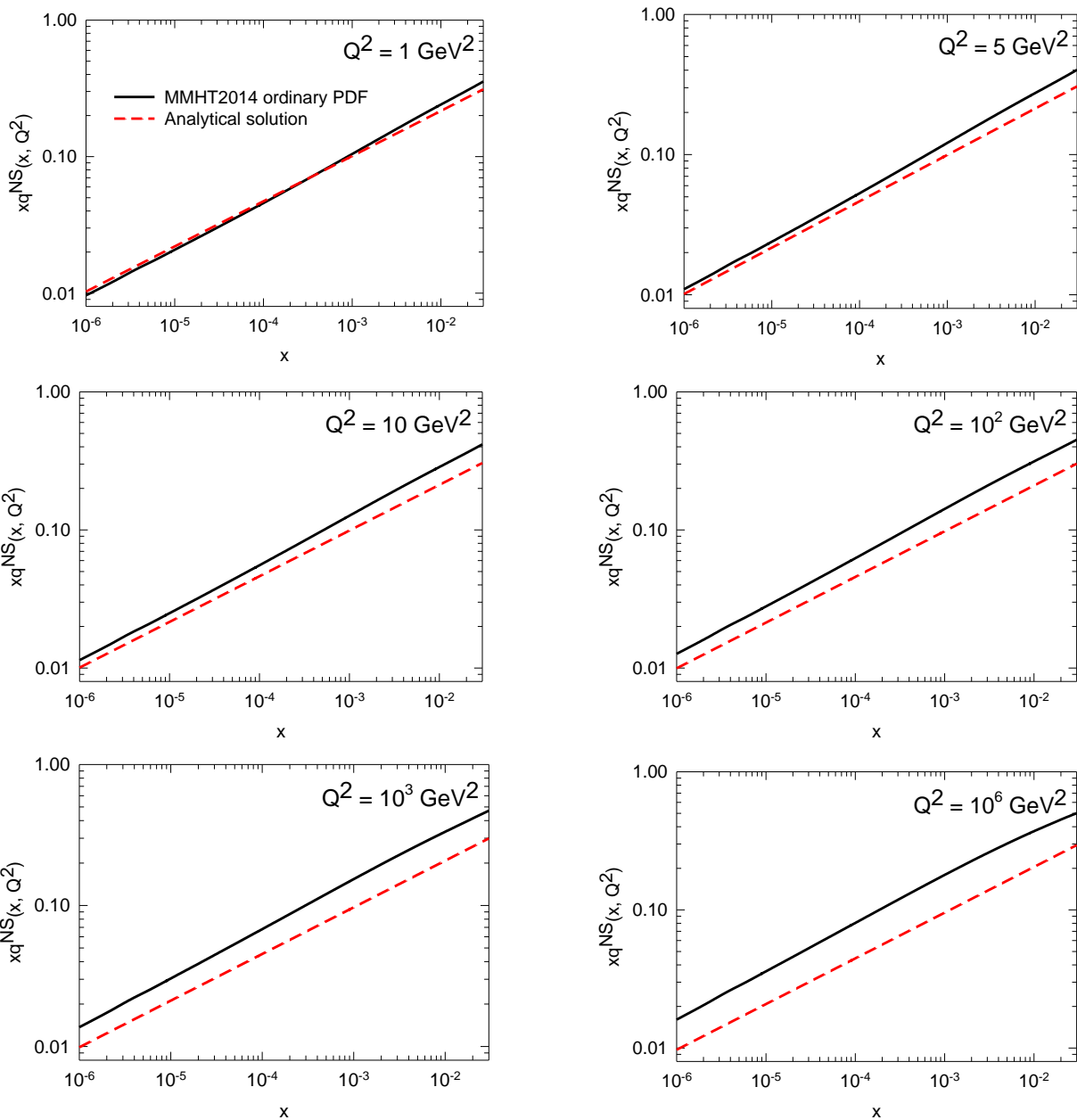
در این بخش به بررسی حل تحلیلی ارائه شده توسط بسط کرامرز- مویال معادله مادر می پردازیم. برای این منظور در ابتدا شرایط مرزی مسئله را بررسی می کنیم. از آنجایی که تابع توزیع نایکتای کوارکی مجموع اختلاف کوارک و پادکووارک با طعم های یکسان است، انتظار داریم در $x \rightarrow 0$ که کووارک های دریا نسبت به کووارک های ظرفیت غالب هستند،

$$\Rightarrow \int_0^1 q^{NS}(x, t_0) dx = r, \quad (25)$$

$$\int_0^1 D t_0^{\frac{\Lambda}{r_V}(bc+a)} x^c dx = r \Rightarrow D = \frac{r(c+1)}{t_0^{\frac{\Lambda}{r_V}(bc+a)}} \quad (26)$$

با جایگذاری معادله (۲۶) در معادله (۲۴) تنها مجهول ما کمیت C خواهد بود که با توجه به شرایط اولیه ارائه شده توسط گروه MMHT2014 [۱] برای $q^{NS}(x, t)$ در $t = t_0 = \text{Ln} \frac{1}{\Lambda_{QCD}^2}$ تعیین خواهد شد. به این ترتیب حل تحلیلی معادله DGLAP در ناحیه x های کوچک به طور کامل ارائه خواهد شد. با ملاحظه این که معادله DGLAP را در تقریب اول مورد بررسی قرار داده ایم، با توجه به روابط و داده های تجربی موجود در [۱]، $q^{NS}(x, t_0)$ را به شکل زیر می نویسیم:

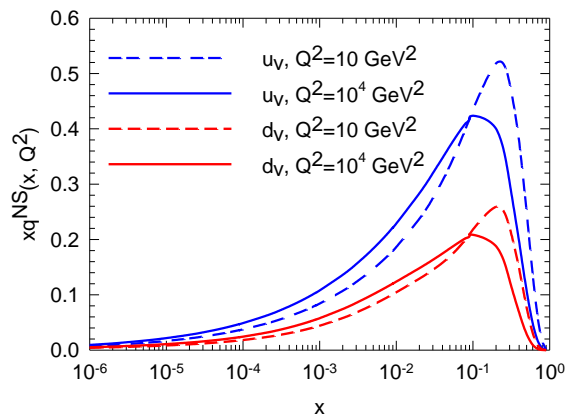
$$q^{NS}(x, t_0) = \frac{1}{1/3358x^{-0/6557}} (1-x)^{2/3318} [1 - 0/26767(1-2\sqrt{x}) - 0/51620(2(1-2\sqrt{x})^2 - 1) + 0/47167(4(1-2\sqrt{x})^3 - 3(1-2\sqrt{x})) - 0/12224(8(1-2\sqrt{x})^4 - 8(1-2\sqrt{x})^2 + 1)] + 3/6009x^{-0/7495} (1-x)^{4/6165} [1 - 1/3817(1-2\sqrt{x}) + 0/49690(2(1-2\sqrt{x})^2 - 1) - 0/040740(4(1-2\sqrt{x})^3 - 3(1-2\sqrt{x})) - 0/03926(8(1-2\sqrt{x})^4 - 8(1-2\sqrt{x})^2 + 1)] - 0/53737x^{-0/8405} (1-x)^{14/402} \left(1 - \frac{x}{0/056131}\right).$$



شکل ۳. مقایسه حل تحلیلی معادله تحول DGLAP توابع توزیع نایکتای کوارکی وابسته به برش با $\Delta = 0.6691$ با توابع توزیع نایکتای کوارکی معمولی ارائه شده توسط گروه MMHT2014.

مقیاس کاهش، تابع توزیع نایکتای کوارکی کاهش پیدا می‌کند که از شکل ۳ نیز مشخص است. همان طور که واضح است مقادیر حل تحلیلی وابسته به برش از آنجا که محدوده انتگرال‌گیری به واسطه حضور برش Δ کمتر از ۱ شده است، کمتر از توابع توزیع نایکتای کوارکی معمولی ارائه شده توسط MMHT2014 خواهد بود. بنابراین با بهینه‌سازی توان مقیاس

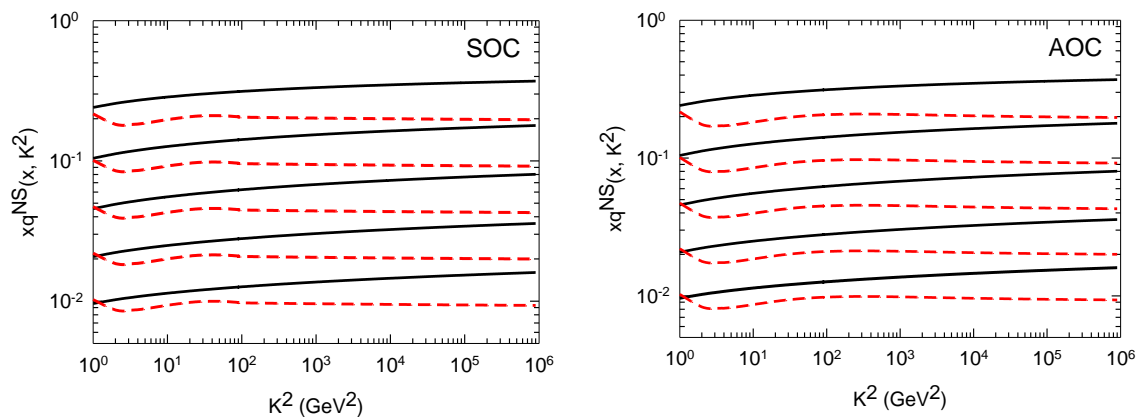
$xq^{NS}(x, t) \rightarrow 0$ و همچنین در مقیاس انرژی‌های بالا $Q^2 \rightarrow \infty$ ، تابع توزیع نایکتای کوارکی با شیب ملایمی به سمت صفر میل کند. با توجه به معادله (۲۸) هر دو شرط مرزی بالاتوسط حل تحلیلی ما ارضا می‌شود. لازم به ذکر است، با توجه به $0 < \Delta < 1$ مقدار توان مقیاس انرژی منفی است، بنابراین طبق انتظار با افزایش $\frac{1}{27} \left(\frac{-0.6691}{\Delta} + \frac{1}{2} - \ln \Delta \right) < 0$



شکل ۴. تابع توزیع کوارک ظرفیت بالا و پایین.

انرژی $Q^2 = 10 \text{ GeV}^2$ و $Q^2 = 10^4 \text{ GeV}^2$ نمایش می‌دهد و تقریب استفاده شده در مورد کوارک دریای بالا و پایین به صورت $u_s(x,t) = \bar{u}_s(x,t)$ و $d_s(x,t) = \bar{d}_s(x,t)$ توسط گروه MMHT2014 قابل توجیه است. در شکل ۵ تابع توزیع نایکتای کوارکی وابسته به برش تولید شده توسط بسط کرامرز-مویال معادله DGLAP با در نظر گرفتن قید ترتیب‌بندی قوی و ترتیب‌بندی زاویه‌ای با تابع توزیع نایکتای کوارکی معمولی ارائه شده توسط گروه MMHT2014 برحسب مقیاس کاوش در $x = 10^{-6}, 10^{-5}, 10^{-4}, 10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}, 10^0$ مقایسه شده است. همان طور که در شکل ۳ هم واضح بود، نتایج حل تحلیلی ما در ناحیه x ‌های کوچک و انرژی‌های متوسط تطابق بهتری با توابع توزیع نایکتای کوارکی معمولی دارند. لازم به ذکر است که قید ترتیب‌بندی قوی (SOC) روی تکانه عرضی پارتون گسیلی در معادله DGLAP، $\Delta = \frac{k_T}{Q}$ ، تنها در ناحیه $k_T \leq Q$ ، شرط $1 > \Delta > 0$ را برآورده می‌کند. بنابراین برای $k_T > Q$ برش را برابر یک در نظر می‌گیریم. اما محدودیتی در استفاده از قید ترتیب‌بندی زاویه‌ای (AOC) که از همدوسی رنگی گلئون‌ها می‌آید و قید حاکم بر معادلات CCFM است، $\Delta = \frac{k_T}{Q + k_T}$ نداریم. به عنوان یک نتیجه کلی می‌توان بیان کرد که حل تحلیلی توابع توزیع نایکتای کوارکی توسط بسط کرامرز-مویال در ناحیه x ‌های کوچک در همه مقادیر انرژی به ویژه انرژی‌های متوسط، توافق خوبی با توابع توزیع نایکتای کوارکی

کاوش در می‌یابیم که بزرگ‌ترین مقدار توان در $\Delta = 0.6691$ اتفاق می‌افتد و بیشترین هم‌خوانی را با تابع توزیع نایکتای کوارکی معمولی (مستقل از برش) ارائه شده توسط گروه MMHT2014 خواهد داشت. بنابراین در شکل ۳ حل تحلیلی معادله DGLAP تابع توزیع نایکتای کوارکی توسط بسط کرامرز-مویال معادله مادر با در نظر گرفتن $\Delta = 0.6691$ در محدوده $x : [10^{-6}, 0.03]$ (با توجه به ناحیه x ‌های بررسی شده توسط گروه MMHT2014 ($10^{-6} \leq x \leq 1$)) برای مقیاس کاوش $Q^2 = 10, 10^2, 10^4, 10^6, 10^8, 10^{10} \text{ GeV}^2$ با توابع توزیع نایکتای کوارکی معمولی ارائه شده توسط گروه MMHT2014 مقایسه شده است. همان طور که از شکل ۳ مشخص است در ناحیه x ‌های کوچک و انرژی‌های متوسط، نتایج حل تحلیلی ما تطابق بهتری با توابع توزیع نایکتای کوارکی معمولی دارند. همان طور که قابل انتظار است حل تحلیلی با افزایش مقیاس کاوش به کندی تغییر می‌کند (از مرتبه 10^{-3})، به عبارتی در انرژی‌های بالا تفاوت تابع توزیع کوارک و پادکوارک خیلی کم می‌شود و این تفاوت با افزایش انرژی به کندی کاهش می‌یابد. در صورتی که علی‌رغم انتظار، در مورد توابع توزیع معمولی ارائه شده توسط MMHT2014 با افزایش انرژی کاوش (به طوری که بیشترین میزان اختلاف ۰/۱۵ متعلق به نقاط با مقیاس $Q^2 = 10 \text{ GeV}^2$ و $Q^2 = 10^6 \text{ GeV}^2$ در $x = 0.03$ است) توابع توزیع افزایش می‌یابد. این افزایش با توجه به شکل ۴ که نمودارهای توزیع کوارک ظرفیت بالا و پایین را در مقیاس



شکل ۵. توابع توزیع نایکتای کوارکی وابسته به برش برحسب $k_T^2 = k_T^2$ برای $Q^2 = 10 \text{ GeV}^2$ و $x = 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-6}$ از بالا به پایین (خط چین) با توابع توزیع نایکتای کوارکی معمولی MMHT2014 (خط ممتد).

کمیت‌های انحصاری پدیدارشناسی وابسته به تکانه عرضی را همان طور که در مراجع [۱۶ و ۱۷] ذکر شده است، با دقت بیشتری انجام داد.

معمولی MMHT2014 دارد. بنابراین امیدواریم در آینده با محاسبه توابع توزیع پارتونی وابسته به برش به روش بسط کرامرز-مویال معادله مادر در فضای تکانه، بتوان محاسبه

مراجع

1. L A Harland-Lang, *et al.*, *Eur. Phys. J. C* **75**, **5** (2015) 1.
2. V N Gribov and L N Lipatov, *Yad. Fiz.* **15** (1972) 781.
3. A D Martin, M G Ryskin, and G Watt, *Eur. Phys. J. C* **66** (2010) 163.
4. G C Nayak, *Phys. Part. Nucl.* **43** (2012) 742.
5. L Bellantuono, R Bellotti, and F Buccella, *J. Stat. Mech.: Theory Exp.* **2019**, **7** (2019) 073302.
6. N Olanj, E Moradi, and M Modarres, *Physica A* 551 (2020) 124585.
7. M Alimohammadi and N Olanj, *Physica A* 389 (2010) 1549.
8. L Mankiewicz, A Saalfeld, and T Weigl, *Phys. Lett. B* **393** (1997) 175.
9. N N K Borah, D K Choudhury, and P K Sahariah, *Adv. High Energy Phys.* (2013) 1.
10. G Alvarez and I Kondrashuk, *J. Phys. Commun.* **4** (2020) 075004.
11. M Mottaghizadeh, F Taghavi Shahri, and P Eslami, *Phys. Lett. B* **773** (2017) 375.
12. G Alvarez, *et al.*, *J. High Energy Phys.* (2016).
13. L E Reichl and A Modern, "Course in Statistical Physics" Wiley (2009).
14. H A Kramers, *Physica.* **7**, **4** (1940) 284.
15. J E Moyal, *J. R. Stat. Soc., B: Stat.* **11**, **2** (1949) 150.
16. K Golec-Biernat and A M Stasto, *Phys. Lett. B* **781**, (2018) 633.
17. N Olanj and M Modarres, *Eur. Phys. J. C* **79** (2019) 615.