



شبیه‌سازی انتقال حالت از اتم به تابش کاواک در برهم‌کنش اتم-فوتون در وادیدگی بزرگ

مریم نصرتی و محمود صادقی*

گروه فیزیک، دانشگاه هرمزگان، بندرعباس

پست الکترونیکی: m.sadeghi@hormozgan.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۴۰۱/۱/۷؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۴۰۱/۲/۳۱)

چکیده

در این پژوهش، از درهم‌تنیدگی اتم-کاواک در مدل جینز-کامینگ بسته، با فرض وادیدگی بزرگ بین اتم و کاواک، استفاده شده و فرایند انتقال حالت از اتم به تابش کاواک شبیه‌سازی شده است. اتم اولیه که در برهم‌نهی نصف-نصف از دو حالت پایه و برانگیخته آماده شده است، در معرض تابش اولیه که یک حالت همدوس و دور از تشدید با اتم است، قرار می‌گیرد. میزان در آمیختگی هر کدام از زیرسیستم‌ها، آنتروپی خطی، درهم‌تنیدگی، آنتروپی ون نیومن و تجزیه اشمیت سیستم مرکب، به صورت تابع تحلیلی از زمان برای اولین بار محاسبه شده‌اند. با فرض اختلاف بسامد زیاد بین اتم و تابش، شبیه‌سازی نشان می‌دهد هیچ انتقال انرژی بین اتم و تابش به دلیل وادیدگی بزرگ، صورت نمی‌گیرد اگرچه اتم و تابش درهم‌تنیده می‌شوند همچنین نشان داده شده است که یک اندازه‌گیری خاص روی اتم از این سیستم مرکب درهم‌تنیده، می‌تواند سیستم مرکب را به حالت ضربی (غیر درهم‌تنیده) از دو زیرسیستم برفکنش کند به نحوی که حالت تابش، به یک برهم‌نهی از حالت همدوس موسوم به حالت گربه‌ای، تغییر یابد. به طور خاص، شرایط لازم جهت انتقال تابش به دو حالت گربه‌ای زوج و گربه‌ای فرد، مورد بررسی قرار گرفته است.

واژه‌های کلیدی: انتقال حالت، مهندسی حالت کوانتومی، حالت‌های گربه‌ای، شبیه‌سازی

۱. مقدمه

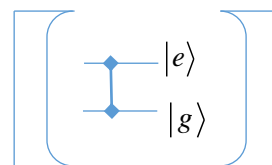
از جمله حالت‌های نور کوانتومی‌اند که هم به صورت نظری و هم عملی مورد بررسی، تولید و آشکارسازی قرار گرفته‌اند [۴]. اولین قدم جهت تولید هر کدام از حالت‌های مذکور، یافتن هامیلتونی مناسب است که با یک تحول یکانی و یا غیر یکانی، سیستم را به حالت مورد نظر برساند [۵-۷].

حالت‌های کوانتومی گربه‌ای که توسط دودونوف در سال ۱۹۷۴ معرفی شد [۸]، در خیلی از مباحث کوانتومی مانند تولید درهم‌تنیدگی [۹] و اطلاعات کوانتومی [۱۰ و ۱۱] مورد استفاده

مهندسی حالت‌های کوانتومی نور یکی از شاخه‌های مهم اپتیک کوانتومی است [۱-۳]. هر کدام از حالت‌های نور به دلیل ویژگی‌های خاص خود می‌تواند کاربردهای مختلفی در اپتیک کاربردی داشته باشند. حالت فوک، حالت همدوس استاندارد و همدوس غیرخطی، حالت همدوس چلانده، حالت‌های گربه‌ای^۱

۱. Cat states

ایجاد تابش در حالت گربه‌ای زوج و فرد را بررسی خواهیم کرد. رصد این تحولات ذکر شده، توسط نوار ابزار کوانتوم برای پایتون^(۱) (کیوتیپ) [۱۷] انجام خواهد شد.



شکل ۱. نمای یک کاواک تک مود که با یک اتم دوترازه درون آن بسیار دور از تشدید هستند.

۲. دینامیک سیستم

یک کاواک اپتیکی به عنوان یک منبع تابش تک مد که با یک اتم دوترازه واقع در آن در حال برهم‌کنش است، تشکیل یک مدل جینز-کامینگ بسته را می‌دهند. هامیلتونی سیستم به صورت زیر است:

$$H = \frac{1}{2} \hbar \omega_a \sigma_z + \hbar \omega_c a^\dagger a + \hbar g (a^\dagger \sigma_- + a \sigma_+), \quad (1)$$

که در آن، جمله اول هامیلتونی اتم، جمله دوم تابش کاواک و جمله سوم برهم‌کنش این دو است. در وادیدگی بزرگ بین اتم و کاواک که گذار بین دو تراز اتم صورت نمی‌گیرد، هنوز یک برهم‌کنش اتلافی بین تک اتم و تابش کاواک وجود دارد [۱۸] و [۱۹]. این ویرایش از مدل جینز کامینگ، در بعضی از کاربردهای آزمایشگاهی اصول مکانیک کوانتومی مهم است [۱۹-۲۳]. در اینجا از همین برهم‌کنش اتلافی استفاده شده و یک تابش در حالت گربه‌ای شبیه‌سازی می‌شود. هامیلتونی مؤثر سیستم در دستگاه چرخنده با $H_0 = \hbar \omega_a \sigma_+ \sigma_- + \hbar \omega_c a^\dagger a$ ، در حضور وادیدگی $\Delta = \omega_a - \omega_c$ ، به صورت یک جمله زیر ساده می‌شود:

$$H_{eff} = \hbar g (a^\dagger \sigma_- e^{-i\Delta t} + a \sigma_+ e^{+i\Delta t}), \quad (2)$$

با فرض بزرگ بودن وادیدگی نسبت به ضریب جفت‌شدگی g اتم کاواک، به صورت زیر ساده می‌شود [۲۰]:

$$H_{eff} = \hbar \chi (\sigma_+ \sigma_- + a^\dagger a \sigma_z), \quad (3)$$

که در آن $\chi = \frac{g^2}{\Delta}$ تعریف می‌شود. از حل معادله شرودینگر در دستگاه چرخنده با هامیلتونی مؤثر (۳)، ماتریس چگالی حالت کل سیستم به دست می‌آید. با معلوم شدن حالت سیستم تابع زمان، اطلاعات راجع به وضعیت سیستم همچنین اندازه‌گیری روی آن، حاصل می‌شود.

قرار گرفته است. در این پژوهش از انتقال همدوسی از یک اتم درهم‌تنیده شده با تابش، جهت ایجاد و شبیه‌سازی این حالت‌های گربه‌ای استفاده شده است [۱۲-۱۶]. سیستم مورد استفاده یک کاواک با تابش تک مد است که با اتمی که در درون آن قرار دارد در برهم‌کنش است. این دو بسیار دور از تشدیدند و یا اصطلاحاً وادیدگی^(۱) (اختلاف بسامد) بین آنها بزرگ است و در شکل ۱ نشان داده شده است. روند بررسی به صورت زیر خواهد بود: در بخش ۱ هامیلتونی مؤثر تقریبی سیستم مورد بررسی تعیین خواهد شد. در بخش ۲ حالت گربه‌ای را تعریف می‌کنیم و سپس با حل معادله شرودینگر در بخش ۳، تحول زمانی کل سیستم را تعیین خواهیم کرد. با فرض این که اتم اولیه در یک برهم‌نهی از دو حالت پایه و برانگیخته‌اش است، از رد جزئی از حالت سیستم مرکب، ماتریس چگالی زیرسیستم‌ها را تعیین خواهیم کرد. توزیع فوک و تابع ویگنر دو زیرسیستم را در لحظات مختلف، با رسم شکل در این بخش مطالعه می‌کنیم. وضعیت برهم‌نهی و یا مخلوط بودن زیرسیستم‌ها را با تعیین آنتروپی خطی زیرسیستم‌ها، به صورت تابع تحلیلی از زمان در بخش ۴ بررسی می‌کنیم. پایه‌های اشمیت زیرسیستم‌ها و تجزیه اشمیت سیستم مرکب در بخش ۵ تعیین خواهند شد. درهم‌تنیدگی دو زیرسیستم به صورت تابعی از زمان، با رسم شکل آنتروپی زیرسیستم‌ها و مقایسه آن با معیار منفیت و لگاریتم منفیت، در بخش ۶ انجام می‌شود. بخش ۷، در لحظه خاص حداکثر درهم‌تنیدگی، وضعیت سیستم را بررسی می‌کنیم و در بخش ۸، اثر اندازه‌گیری روی یکی از زیرسیستم‌ها را بر زیرسیستم دوم، شبیه‌سازی می‌کنیم. پدیده انتقال همدوسی بین دو زیرسیستم و

۲. Monitoring

۳. Quantum Toolbox in Python

۱. Detuning

$$|\psi(t)\rangle_{ac} = e^{-iH_{eff}t/\hbar} |\psi(0)\rangle_{ac} \\ = \frac{1}{\sqrt{2}} (|g\rangle |\alpha e^{i\chi t}\rangle + e^{-i(\chi t - \phi)} |e\rangle |\alpha e^{-i\chi t}\rangle), \quad (9)$$

که در آن χ در رابطه (۳) تعریف شده است. حالت زیرسیستم تابش کاواک در هر لحظه، از رد جزئی از ماتریس چگالی وابسته به حالت سیستم مرکب (۹) نسبت به پایه‌های اتم به دست می‌آید:

$$\rho_c(t) = \frac{1}{4} (|\alpha e^{i\chi t}\rangle \langle \alpha e^{i\chi t}| + |\alpha e^{-i\chi t}\rangle \langle \alpha e^{-i\chi t}|), \quad (10)$$

رابطه فوق‌گذر زیرسیستم تابش کاواک را از مخلوطی (غیرهمدوس) نصف-نصف از دو حالت همدوس (خالص) $|\alpha e^{i\chi t}\rangle$ و $|\alpha e^{-i\chi t}\rangle$ نشان می‌دهد. حالت زیرسیستم اتم در هر لحظه، از رد جزئی از ماتریس چگالی وابسته به حالت سیستم مرکب (۹) نسبت به پایه‌های میدان به دست می‌آید:

$$\rho_a(t) = \frac{1}{4} (|g\rangle \langle g| + |g\rangle \langle e| e^{-2\alpha^2 \sin^2 \chi t} e^{i\alpha^2 \sin^2 \chi t} e^{i(\chi t - \phi)} + |e\rangle \langle g| e^{-2\alpha^2 \sin^2 \chi t} e^{-i\alpha^2 \sin^2 \chi t} e^{-i(\chi t - \phi)} + |e\rangle \langle e|), \quad (11)$$

تحول زمانی دو زیرسیستم تابش کاواک و اتم از نظر تابع ویگنر و توزیع فوک در بازه زمانی $\chi t = 0$ تا $\chi t = \pi$ در شکل ۲ و ۳ نشان داده شده است. در این دو شکل، پارامتر همدوسی α برابر $\sqrt{2}$ فرض شده است. شکل ۲ وضعیت تابش جفت شده با اتم را رصد می‌کند. در این شکل، گذر تابش از یک مخلوط از دو حالت همدوس $|\alpha e^{i\chi t}\rangle$ و $|\alpha e^{-i\chi t}\rangle$ ، به نحوی که قسمت موهومی پارامتر همدوسی دو حالت قرینه‌اند را نشان می‌دهد. تنها در لحظاتی که $\chi t = n\pi$ است دو حالت فوق، به یک حالت همدوس خالص $|\alpha\rangle$ و یا $|\alpha\rangle$ کاهش می‌یابند و در شکل فقط یک تابع ویگنر مشاهده می‌شود. در این وضعیت، تابش در برهم‌نهی خالصی از ویژه حالت‌های خود قرار دارد. متوسط تعداد فوتون‌های تابش (در اینجا دو) و نحوه توزیع آنها بین حالت‌های مختلف فوک با گذشت زمان ثابت باقی مانده است.

۳. تعریف حالت‌های گربه‌ای

قبل از بررسی سیستم مرکب اتم-کاواک، بهتر است حالت‌های گربه‌ای را تعریف کنیم. برهم‌نهی از دو حالت همدوس با دامنه یکسان ولی اختلاف فاز π به صورت زیر:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\beta\rangle + e^{i\theta} |-\beta\rangle), \quad (4)$$

را اصطلاحاً حالت‌های گربه‌ای می‌گویند [۱۲-۱۶]. ضریب بهنجارش $\frac{1}{\sqrt{2}}$ به صورت $\frac{1}{\sqrt{2+2e^{-2\alpha^2 \cos \theta}}}$ حاصل می‌شود. بستگی به فاز θ سه حالت به صورت زیر نامگذاری می‌شوند:

- $|\psi\rangle_e = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\beta\rangle + |-\beta\rangle)$ گربه‌ای زوج $\theta = 0$
- $|\psi\rangle_{ys} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\beta\rangle + i|-\beta\rangle)$ یورک استولر $\theta = \frac{\pi}{2}$
- $|\psi\rangle_o = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\beta\rangle - |-\beta\rangle)$ گربه‌ای فرد $\theta = \pi$

همگی حالت‌های فوق، به عنوان ویژه حالت عملگر توان دو نابودی، با ویژه مقدار α^2 نیز تعریف می‌شوند:

$$a^2 |\psi\rangle_{cats} = \alpha^2 |\psi\rangle_{cats}. \quad (5)$$

۴. حل تحلیلی دینامیک سیستم

فرض می‌کنیم اتم اولیه در برهم‌نهی نصف-نصف بین پایه و برانگیخته آماده شده باشد:

$$|\psi(0)\rangle_a = \frac{1}{\sqrt{2}} (|g\rangle + e^{i\phi} |e\rangle), \quad (6)$$

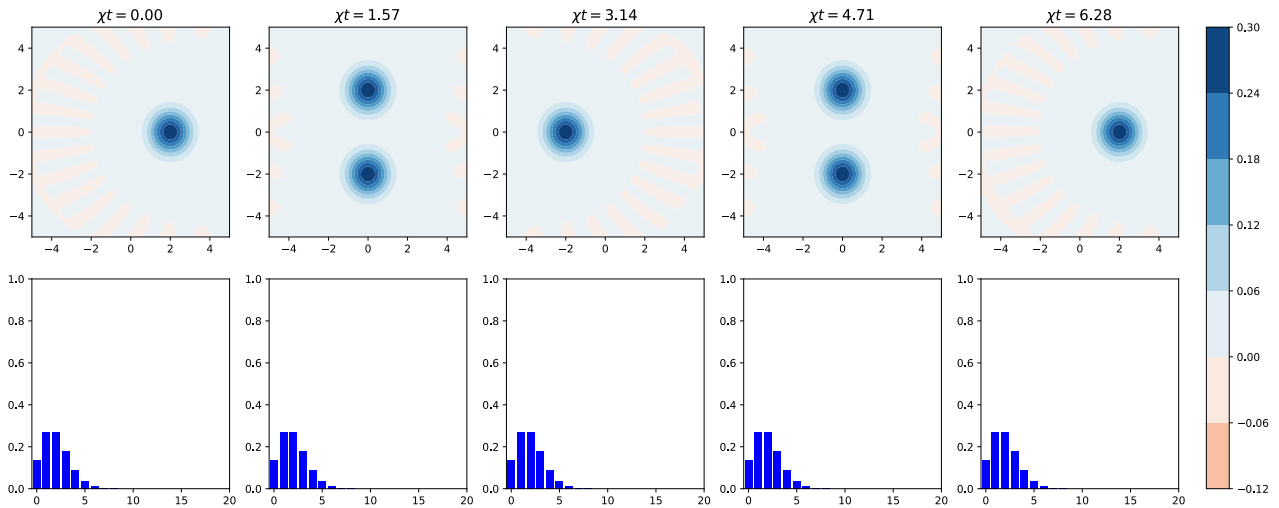
که ϕ یک فاز دلخواه اما مهم است. در انتها، اثر مقدار این فاز را روی حالت انتقال یافته به زیر سیستم دوم (تابش کاواک) بررسی خواهیم کرد. تابش اولیه کاواک، همدوس با متوسط فوتون دو فرض می‌شود:

$$|\psi(0)\rangle_c = |\alpha = \sqrt{2}\rangle, \quad (7)$$

حالت اولیه کل سیستم اتم-کاواک با فرض جدا بودن دو زیر سیستم در لحظه اول، خواهد شد:

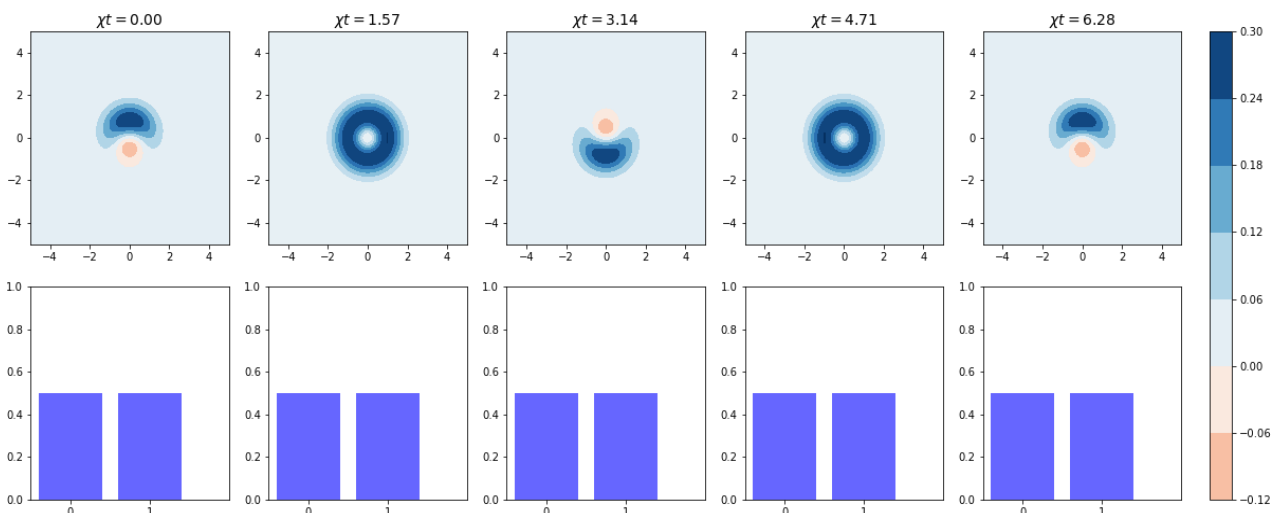
$$|\psi(0)\rangle_{ac} = |\psi(0)\rangle_a \otimes |\psi(0)\rangle_c, \quad (8)$$

و نهایتاً تحول زمانی سیستم از اثر عملگر یکانی تحول زمانی به دست می‌آید:



شکل ۲. تحول زمانی زیرسیستم تابش کاواک از دید تابع ویگنر و توزیع فوک آن در بازه زمانی متناظر با فاز χt بین صفر تا 2π . تابش در

لحظات $\chi t = n\pi$ ، کاملاً قطبیده است و در لحظات $\chi t = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ کاملاً غیرقطبیده است. در سایر لحظات، به صورت جزئی قطبیده است.



شکل ۳. تحول زمانی زیرسیستم اتم از دید تابع ویگنر و توزیع فوک آن در بازه زمانی متناظر با فاز χt بین صفر تا 2π . اتم در لحظات

$\chi t = n\pi$ ، در حالت کاملاً خالص است. منفی شدن تابع ویگنر در این لحظات در شکل مشخص است و در لحظات $\chi t = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ کاملاً مخلوط است. در سایر لحظات، به صورت جزئی خالص است.

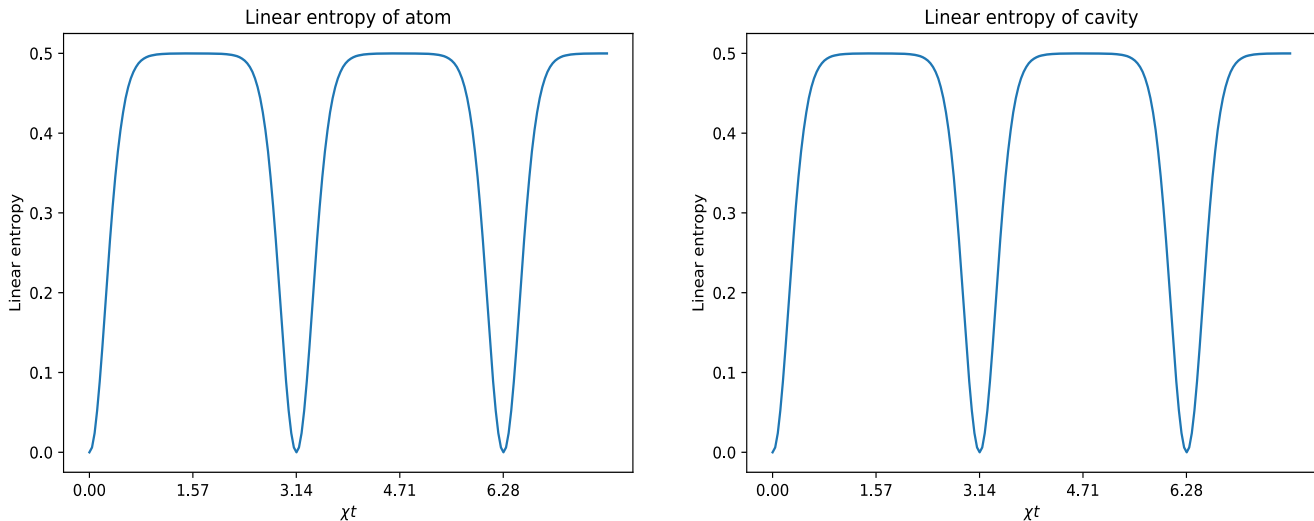
۵. آنتروپی خطی زیر سیستم‌ها

جهت درک بهتر حالت زیرسیستم اتم و تابش، آنتروپی خطی آنها را تابعی از زمان تعیین می‌کنیم. برای زیرسیستم تابش این کمیت به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$S_L^c(t) = 1 - \text{Tr}(\rho_c^{\check{c}}(t)), \quad (12)$$

که معیاری از درآمیختگی یا غیرقطبیت حالت تابش است. از

شکل ۳ وضعیت اتم جفت شده با تابش را رصد می‌کند. جمعیت دوتراز اتم که در ابتدا نصف-نصف بود، در تمام لحظات، این وضعیت را حفظ کرده است و این به دلیل عدم تبادل انرژی بین اتم و کاواک به خاطر وادندگی بزرگ بین آنهاست؛ هرچند به دلیل برهم‌کنش آنها و نیز حالت اولیه اتم، این دو درهم‌تنیده شده‌اند.



شکل ۴. آنتروپی خطی اتم و تابش کاواک، میزان درآمیختگی (یا غیرقطبیت) آنها را تابعی از زمان نشان می‌دهد.

$\frac{\pi}{2}$ است، دو جمله همدوسی در عملگر چگالی (عناصر غیر قطری ρ_a)، کاهش می‌یابند. در این لحظات، آنتروپی خطی (۱۵) خیلی به نیم نزدیک است و اتم حداکثر درآمیختگی را دارد. برای تابش نیز وضعیت مشابهی برقرار است.

۶. تجزیه اشمیت حالت سیستم مرکب

برای سیستم مرکب دو قسمتی، همواره پایه‌های متعامد یکه از دو زیرسیستم موجود است به نحوی که بردار حالت سیستم مرکب را می‌توان برحسب آنها، با ضرایب حقیقی و غیرمنفی بسط داد [۲۴ و ۲۵]. در اینجا پایه‌های اشمیت زیرفضای اتم و تابش را تعیین می‌کنیم. با معلوم بودن عملگر چگالی زیر سیستم اتم از رابطه (۱۱)، ویژه مقادیر آن، توان دو ضرایب بسط اشمیت را می‌دهند و ویژه بردارهای آن همان پایه‌های اشمیت زیرفضای اتم هستند:

$$\lambda_{\pm}(t) = \frac{1}{2}(1 \pm e^{-2\alpha^2 \sin^2 \chi t}), \quad (16)$$

$$|\lambda_{\pm}(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|g\rangle \pm e^{-i\alpha^2 \sin^2 \chi t} e^{-i(\chi t - \phi)}|e\rangle), \quad (17)$$

با جایگذاری $|g\rangle$ و $|e\rangle$ برحسب پایه‌های اشمیت زیرفضای اتم، روابط (۱۶) و (۱۷)، در بردار حالت سیستم مرکب (۹)، تجزیه اشمیت سیستم مرکب خواهد شد:

رابطه (۱۰) با کمی محاسبه، به دست می‌آوریم:

$$S_L^c(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-4\alpha^2 \sin^2 \chi t}, \quad (13)$$

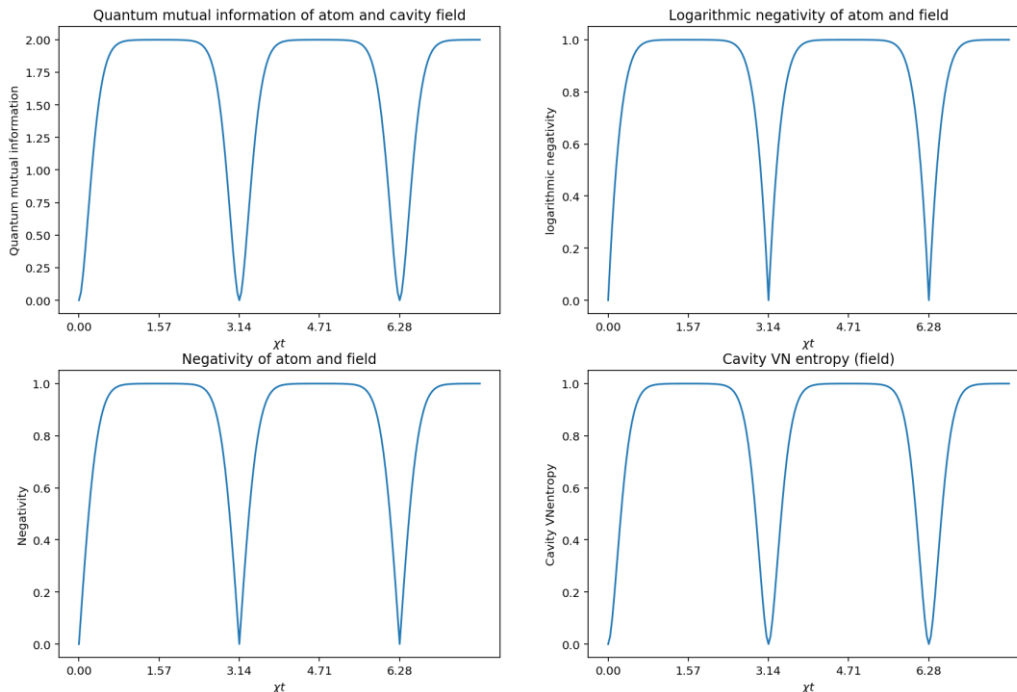
این کمیت، در شکل ۴ به صورت تابعی از زمان رسم شده است. از این رابطه، واضح است که میزان درآمیختگی حالت تابش، بین صفر (کاملاً قطبیده) تا نیم (کاملاً غیرقطبیده) متغیر است. در لحظاتی که $\chi t = n\pi$ است، درآمیختگی صفر است. در این لحظات دو جمله عملگر چگالی تابش کاواک رابطه (۱۰)، به یک جمله کاهش می‌یابند:

$$\rho_c(t = \frac{n\pi}{\chi}) = \begin{cases} |\alpha\rangle\langle\alpha| & \text{for } n = 0, 2, 4, \dots \\ |-\alpha\rangle\langle-\alpha| & \text{for } n = 1, 3, 5, \dots \end{cases}, \quad (14)$$

به این ترتیب تابش در این لحظات کاملاً قطبیده است. در زمان‌های دیگر، قطبیدگی به صورت جزئی تا کامل از بین می‌رود. برای زیرسیستم اتم، از رابطه (۱۳)، آنتروپی خطی آن به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$S_L^a(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-4\alpha^2 \sin^2 \chi t}, \quad (15)$$

که با رابطه (۱۳) برای زیرسیستم تابش یکسان است. با توجه به رابطه فوق، واضح است که میزان درآمیختگی حالت اتم، بین صفر (کاملاً خالص) تا نیم (کاملاً مخلوط) متغیر است. اتم نیز مانند تابش، به جز در لحظات $\chi t = n\pi$ ، همدوسی اولیه خود، رابطه (۶) را به تناوب از دست می‌دهد. این وضعیت در شکل ۴ نشان داده شده است. در لحظاتی که χt مضارب فردی از



شکل ۵. اطلاعات متقابل کوانتومی و درهم‌تنیدگی اتم-کاواک در مدل بسته جینز-کامینگ با وادندگی بزرگ، از سه معیار منفیت، لگاریتم منفیت و آنترپی زیرسیستم کاواک، در بازه زمانی متناظر با فاز بین صفر تا $5\pi/2$. ثابت‌ها در شبیه‌سازی به صورت زیر فرض شده‌اند: پارامتر جفت شدگی $g = 0/3$ ، وادندگی $\Delta = 10$ ، بعد فضای هیلبرت تابش کاواک $N = 40$ و پارامتر همدوسی $\alpha = \sqrt{2}$.

یک حالت گربه‌ای (۲۰) برافکنش می‌کند.

۷. درهم‌تنیدگی اتم کاواک

با معلوم بودن تجزیه اشمیت سیستم مرکب، می‌توان آنترپی ون نیومن زیر سیستم‌ها را به صورت تابع زمان تعیین کرد:

$$S_a(t) = -tr(\rho_a(t) \ln \rho_a(t)) = -\lambda_+(t) \ln \lambda_+(t) - \lambda_-(t) \ln \lambda_-(t), \quad (21)$$

که با آنترپی زیرسیستم تابش کاواک $S_c(t)$ یکسان است. رابطه فوق همچنین میزان درهم‌تنیدگی دو زیرسیستم را به صورت تابعی تحلیلی از زمان نشان می‌دهد که در شکل ۵ رسم شده است. از رابطه (۲۱)، درهم‌تنیدگی اتم کاواک، برای لحظاتی که xt مضارب صحیحی از π نیست قابل مشاهده است. در شکل ۵ تحول زمانی درهم‌تنیدگی اتم و کاواک، با سه معیار: آنترپی ون نیومن زیرسیستم کاواک رابطه (۲۱)، منفیت و لگاریتم منفیت [۲۶ و ۲۷] رسم شده است. در رسم شکل‌ها فاز اولیه ϕ ، صفر فرض شده است و منفیت به صورت

$$|\psi(t)\rangle_{ac} = \sqrt{\lambda_+(t)} |\lambda_+(t)\rangle \left(\frac{|ae^{ixt}\rangle + e^{i\alpha^t \sin^2 xt} |ae^{-ixt}\rangle}{\sqrt{2\lambda_+(t)}} \right) + \sqrt{\lambda_-(t)} |\lambda_-(t)\rangle \left(\frac{|ae^{ixt}\rangle - e^{i\alpha^t \sin^2 xt} |ae^{-ixt}\rangle}{\sqrt{2\lambda_+(t)}} \right), \quad (18)$$

به این ترتیب ماتریس چگالی کاهش یافته دو زیرسیستم اتم و تابش، با هم یکسان و به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\rho_a(t) = (\lambda_+^o \lambda_-^o) \equiv \rho_c(t), \quad (19)$$

با توجه به بسط (۱۸)، دو پایه متعامد یکه (اشمیت) زیرفضای تابش به صورت زیرند:

$$\frac{|ae^{ixt}\rangle \pm e^{i\alpha^t \sin^2 xt} |ae^{-ixt}\rangle}{\sqrt{2\lambda_{\pm}}}, \quad (20)$$

که مستقل از فاز اولیه ϕ است. به این ترتیب می‌توان گفت که اگر یک اندازه‌گیری ون نیومن روی یکی از پایه‌های اشمیت زیر فضای اتم $|\lambda_{\pm}(t)\rangle$ صورت گیرد، زیر سیستم تابش را به

۱. Von Neumann entropy

$$\rho_c(t = \frac{\pi}{2\chi}) = \frac{1}{2}(|\alpha i\rangle\langle \alpha i| + |-\alpha i\rangle\langle -\alpha i|), \quad (25)$$

رابطه فوق نشان می‌دهد که تابش کاواک در این لحظه، در مخلوطی غیرهمدوس نصف-نصف از دو حالت همدوس چرخیده $|\alpha i\rangle$ و $|-\alpha i\rangle$ است. شکل ۶ الف توزیع فوک و تابع ویگنر دوبعدی را برای حالت (۲۵) نشان می‌دهد. چرخش ۹۰ درجه‌ای تابع ویگنر تابش نسبت به مخلوط دو حالت همدوس با پارامتر حقیقی $|\alpha\rangle$ و $|-\alpha\rangle$ ، در شکل مشخص است. دو حالت همدوس $|\pm\alpha i\rangle$ تابش کاواک، در این لحظه در حداکثر جدایی از یکدیگر قرار دارند. در شکل ۶ ب تابع ویگنر آن در فضای سه بعدی رسم شده است. غیر منفی بودن تابع ویگنر نشان‌دهنده مخلوط غیر همدوس بودن حالت تابش در این لحظه است. وضعیت اتم در این لحظه، از رابطه (۱۱)، با $\chi t = \frac{\pi}{2}$ به دست می‌آید:

$$\rho_a(t = \frac{\pi}{2\chi}) = \frac{1}{2}(|g\rangle\langle g| + |i\rangle\langle g|e^{-2\alpha}e^{-i\phi} + |e\rangle\langle g|e^{-2\alpha}e^{i\phi} + |e\rangle\langle e|), \quad (26)$$

اتم نیز در این لحظه، برهم‌نهی همدوس اولیه خود رابطه (۶) را از دست داده است. دو جمله همدوسی (عناصر غیر قطری ρ_a در رابطه (۲۶))، به صفر نزدیکند. در این لحظات، اتم به مخلوطی نصف-نصف از پایه و برانگیخته، خیلی نزدیک است. با معلوم بودن عملگر چگالی زیر سیستم اتم در این لحظه از رابطه (۲۶)، ویژه مقادیر آن، توان دو ضرایب بسط اشمیت را می‌دهند و ویژه بردارهای آن همان پایه‌های اشمیت زیرفضای اتم هستند. راه ساده‌تر استفاده از روابط (۱۶) تا (۲۰) بخش قبل است. به این ترتیب این دو کمیت به صورت زیر حاصل می‌شوند:

$$\lambda_{\pm} |_{\chi t = \pi/2} = \frac{1}{2}(1 \pm e^{-2\alpha}), \quad (27)$$

$$|\lambda_{\pm}\rangle_{\chi t = \pi/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|g\rangle \mp ie^{i\phi}|e\rangle), \quad (28)$$

با جایگذاری $|g\rangle$ و $|e\rangle$ برحسب پایه‌های اشمیت زیرفضای اتم، رابطه (۲۸)، در بردار حالت سیستم مرکب (۲۴)، تجزیه

$N = \|\rho_{ac}^T\|$ و لگاریتم منفیت $\text{Log}_2 \|\rho_{ac}^T\|$ در نظر گرفته و محاسبه شده‌اند. هر سه معیار، پدیده مرگ و احیای درهم‌تنیدگی^۱ را برای سیستم، به صورت یکسان نشان می‌دهند. با توجه به حالت سیستم مرکب رابطه (۹)، فاصله زمانی بین دو جدایی زیرسیستم‌ها برابر:

$$\chi t = \pi, \quad (22)$$

به دست می‌آید. یعنی در هر بازه زمانی فوق، یک بار احیا و مرگ درهم‌تنیدگی اتفاق افتاده است. با توجه به ثابت‌ها در شبیه‌سازی شکل ۵ و تعریف χ در رابطه (۳)، این مقدار حدود ۳۴۹ واحد زمانی است. حالت سیستم مرکب در لحظه خاص (۲۲)، به صورت زیر است:

$$|\psi(t = \frac{\pi}{\chi})\rangle_{ac} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|g\rangle - e^{i\phi}|e\rangle)|-\alpha\rangle, \quad (23)$$

که جدا بودن اتم و تابش را در این لحظه نشان می‌دهد. این لحظه در شکل ۵، متناظر با اولین نقطه صفر شدن درهم‌تنیدگی بعد از لحظه اولیه است. در شروع برهم‌کنش، دو زیرسیستم از هم جدا هستند. حدود ۷۵ واحد زمانی به حداکثر درهم‌تنیدگی رسیده و سپس حدود ۲۰۰ واحد زمانی را در این حالت گذرانده و دوباره طی بازه حدود ۷۵ واحدی این دو از هم جدا شده‌اند. در هر بازه زمانی ۳۴۹ واحدی، یکبار احیا و مرگ درهم‌تنیدگی اتم و تابش کاواک اتفاق افتاده است.

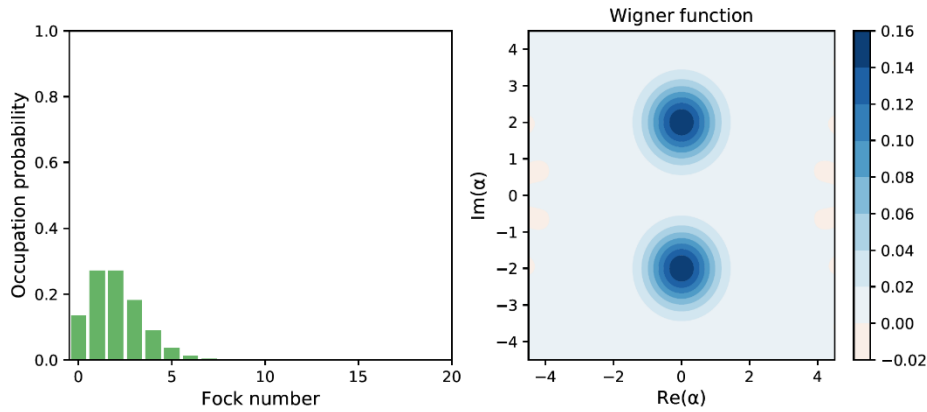
۸. وضعیت سیستم در لحظه $\chi t = \frac{\pi}{2}$

در لحظه $\chi t = \frac{\pi}{2}$ با توجه به شکل ۵، دو زیر سیستم حداکثر درهم‌تنیدگی را دارند. بردار حالت سیستم مرکب در این لحظه به صورت زیر است:

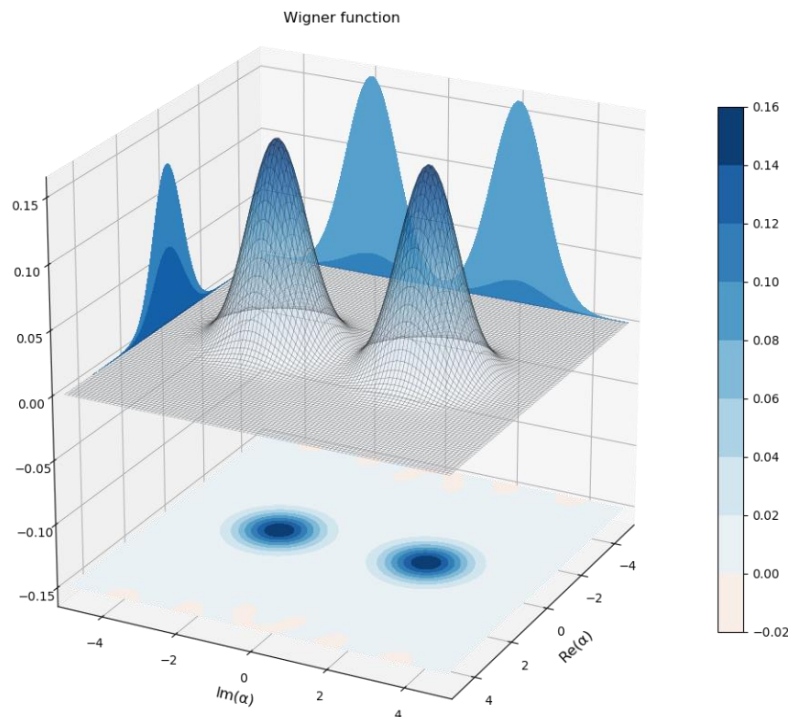
$$|\psi(t = \frac{\pi}{2\chi})\rangle_{ac} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|g\rangle|\alpha i\rangle - ie^{i\phi}|e\rangle|-\alpha i\rangle), \quad (24)$$

در این لحظه، حالت زیر سیستم تابش کاواک، از رد جزئی از ماتریس چگالی مرتبط به بردار حالت سیستم مرکب (۲۴) و یا مستقیماً از رابطه (۱۰) به دست می‌آید:

۱. Entanglement death and revival



شکل ۶. الف. توزیع حالت فوک و تصویر تابع ویگنر در لحظه $\frac{\pi}{2\chi}$ برای تابش کاواک که در مخلوط نصف-نصف از دو حالت همدوس چرخیده به سر می‌برد (رابطه (۲۵)). پارامتر همدوسی $\alpha = \sqrt{2}$ و بعد فضای هیلبرت تابش $N = 20$ فرض شده است.



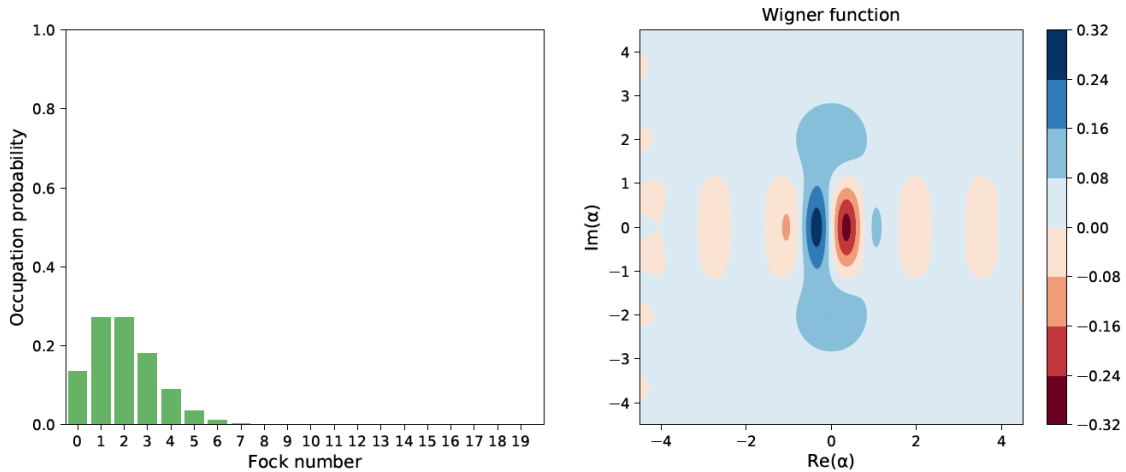
شکل ۶. ب. نمای سه‌بعدی تابع ویگنر شکل ۵. الف. غیر منفی بودن تابع ویگنر نشان دهنده مخلوط غیر همدوس بودن حالت مذکور است.

که با نتیجه حاصل از رابطه (۱۸) در این لحظه یکسان است. با توجه به بسط فوق، دو پایه متعامد یک‌گانه (پایه‌های اشمیت) زیرفضای تابش در لحظه مذکور به صورت زیر:

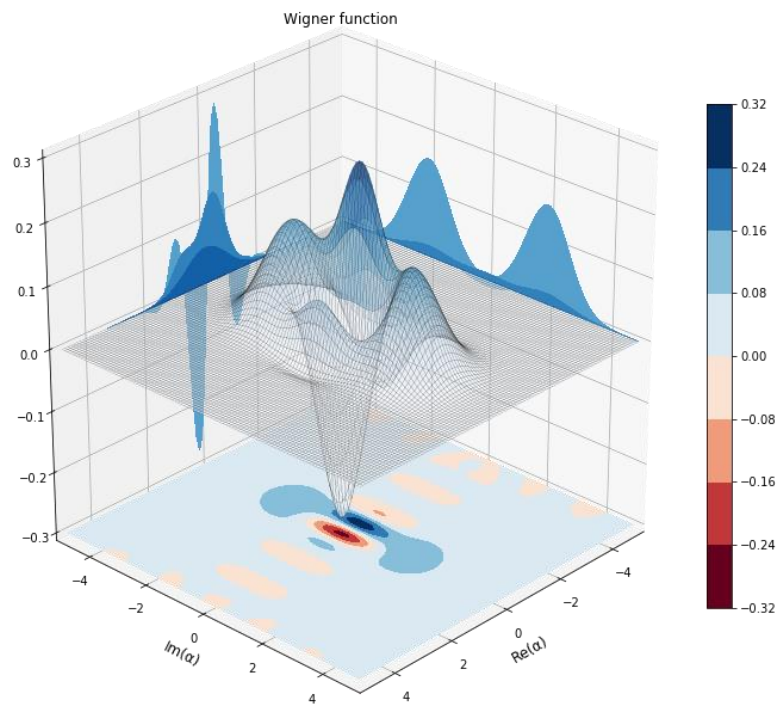
$$\frac{|\alpha i\rangle \pm |-\alpha i\rangle}{\sqrt{2\sqrt{\lambda_{\pm}}}}, \quad (30)$$

اشمیت سیستم مرکب خواهد شد:

$$\left| \psi \left(t = \frac{\pi}{2\chi} \right) \right\rangle_{ac} = \sqrt{\lambda_+} |\lambda_+\rangle \left(\frac{|\alpha i\rangle + |-\alpha i\rangle}{\sqrt{2\sqrt{\lambda_+}}} \right) + \sqrt{\lambda_-} |\lambda_-\rangle \left(\frac{|\alpha i\rangle - |-\alpha i\rangle}{\sqrt{2\sqrt{\lambda_-}}} \right), \quad (29)$$



شکل ۷. الف. حالت انتقال یافته به زیرسیستم تابش کاواک پس از اندازه‌گیری برافکنشی N_+^{ac} روی سیستم مرکب، در لحظه $t = \frac{\pi}{2\chi}$ فاز ϕ در حالت اولیه اتم، π فرض شده است. اندازه‌گیری روی زیرسیستم اتم، باعث انتقال زیرسیستم تابش به یک حالت یورک استولر چرخش یافته شده است.



شکل ۷. ب. نمای سه‌بعدی تابع ویگنر شکل ۷. الف. منفی شدن تابع ویگنر نشان دهنده کوانتومی بودن حالت انتقال یافته به تابش، پس از اندازه‌گیری است.

فضای اتم $|\lambda_{\pm}\rangle$ صورت گیرد، زیر سیستم تابش را به یک حالت گربه‌ای زوج یا فرد (۳۰) برافکنش می‌کند. از این وضعیت جهت تولید تابش در حالت گربه‌ای زوج و فرد استفاده می‌شود [۲۰ و ۲۸]. در بخش بعد اثرات اندازه‌گیری

که مستقل از انتخاب ϕ ، یک حالت گربه‌ای زوج (+) و گربه‌ای فرد (-) هستند. از تجزیه اشمیت سیستم مرکب در لحظه مذکور رابطه (۲۹)، می‌توان گفت که اگر در این لحظه یک اندازه‌گیری ون نیومن روی یکی از پایه‌های اشمیت زیر

$$p(+)= \left\langle \psi(t=\frac{\pi}{2\chi}) \left| N_+^{ac\dagger} N_+^{ac} \right| \psi(t=\frac{\pi}{2\chi}) \right\rangle_{ac} \quad (34)$$

$$= \frac{1}{2}(1+e^{-2\alpha^2} \sin \phi) = \lambda_+ \Big|_{\chi t=\pi/2},$$

و بعد از اندازه‌گیری N_+^{ac} ، حالت سیستم مرکب به

$$\left| \psi(t=\frac{\pi}{2\chi}) \right\rangle_{ac}^+ = \frac{1}{\sqrt{p(+)}} N_+^{ac} \left| \psi(t=\frac{\pi}{2\chi}) \right\rangle_{ac} \quad (35)$$

$$= |+\rangle_a \frac{|i\alpha\rangle - ie^{i\phi}|-i\alpha\rangle}{\sqrt{\lambda_+}} \Big|_{\chi t=\pi/2},$$

تغییر می‌کند که در یک حالت ضربی است. همچنین احتمال این که زیرسیستم اتم در حالت $|-\rangle$ باشد برابر است با:

$$p(-)= \left\langle \psi(t=\frac{\pi}{2\chi}) \left| N_-^{ac\dagger} N_-^{ac} \right| \psi(t=\frac{\pi}{2\chi}) \right\rangle_{ac} \quad (36)$$

$$= \frac{1}{2}(1-e^{-2\alpha^2} \sin \phi) = \lambda_- \Big|_{\chi t=\pi/2},$$

و بعد از اندازه‌گیری N_-^{ac} حالت سیستم مرکب به

$$\left| \psi(t=\frac{\pi}{2\chi}) \right\rangle_{ac}^- = \frac{1}{\sqrt{p(-)}} N_-^{ac} \left| \psi(t=\frac{\pi}{2\chi}) \right\rangle_{ac} \quad (37)$$

$$= |-\rangle_a \frac{|i\alpha\rangle + ie^{i\phi}|-i\alpha\rangle}{\sqrt{\lambda_-}} \Big|_{\chi t=\pi/2},$$

تغییر می‌کند. با توجه به روابط (۳۴) تا (۳۷)، بسط دیگری برای بردار حالت سیستم مرکب در لحظه مذکور، به دست می‌آید که با تجزیه اشمیت آن رابطه (۲۹)، کمی متفاوت است:

$$\left| \psi(t=\frac{\pi}{2\chi}) \right\rangle_{ac} = \sqrt{\lambda_+} \Big|_{\chi t=\pi/2} |+\rangle_a \frac{|i\alpha\rangle - ie^{i\phi}|-i\alpha\rangle}{\sqrt{\lambda_+}} + \sqrt{\lambda_-} \Big|_{\chi t=\pi/2} |-\rangle_a \frac{|i\alpha\rangle + ie^{i\phi}|-i\alpha\rangle}{\sqrt{\lambda_-}}, \quad (38)$$

اولین برداشت از وضعیت سیستم بعد از اندازه‌گیری، حذف شدن درهم‌تنیدگی و برفاکشن سیستم مرکب به یک حالت ضربی است. دومین برداشت از روابط (۳۵) و (۳۷) و یا معادل آنها (۳۸)، انتقال برهم‌نهی به تابش کاواک در صورت اندازه‌گیری هرکدام از دو عملگر (۳۳) است. یعنی اندازه‌گیری روی زیرسیستم اتم، حالت زیر سیستم تابش کاواک را تغییر خواهد داد و این وجود هم‌بستگی‌های کوانتومی بین این دو

خاص بر سیستم مرکب و وضعیت زیرسیستم‌ها پس از اندازه‌گیری، تا انتقال تابش به حالت گربه‌ای زوج و فرد شبه‌سازی می‌شود.

۹. انتقال حالت به زیر سیستم تابش بعد از اندازه‌گیری تصویری روی اتم

حال اثر اندازه‌گیری روی سیستم مرکب در لحظه $t = \frac{\pi}{2\chi}$ ، که دو زیر سیستم در حداکثر درهم‌تنیدگی‌اند، را بررسی می‌کنیم. اندازه‌گیری روی زیر سیستم اتم صورت می‌گیرد. به عبارت دیگر با اندازه‌گیری روی سیستم مرکب، بررسی می‌کنیم که زیر سیستم اتم در لحظه مذکور با چه احتمالی در هر کدام از دو حالت خاص زیر است:

$$|+\rangle_a = \frac{1}{\sqrt{2}}(|g\rangle + |e\rangle) \quad |-\rangle_a = \frac{1}{\sqrt{2}}(|g\rangle - |e\rangle), \quad (39)$$

و نیز در این لحظه، زیر سیستم دیگر (تابش کاواک) در چه حالتی است. جهت یافتن پاسخ، دو عملگر نگاشت تصویری در این دو راستا را در زیر فضای اتم تعریف می‌کنیم:

$$M_+^a = |+\rangle_a \langle +| \quad (40)$$

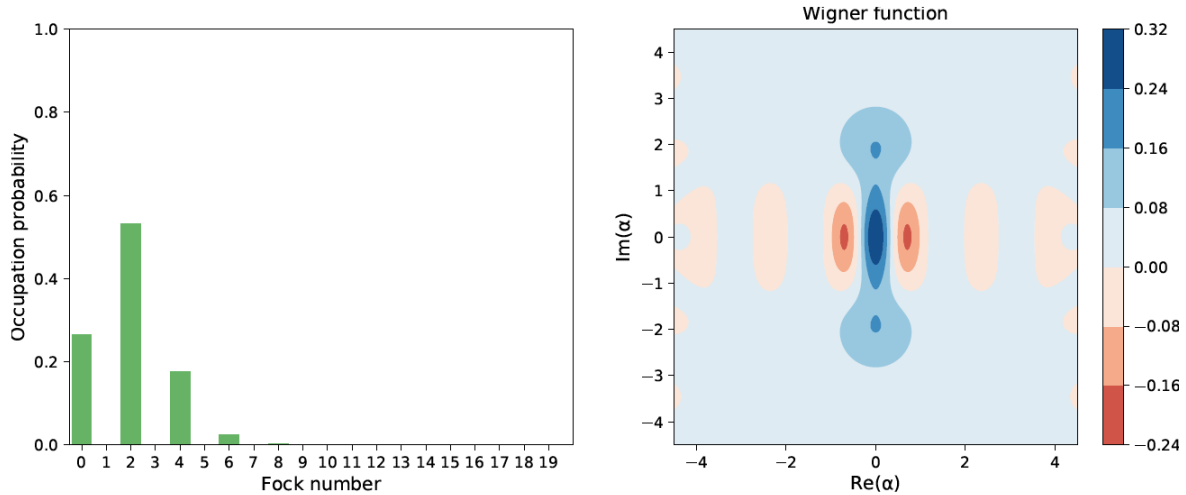
$$M_-^a = |-\rangle_a \langle -|,$$

که چون حالت‌های $\{|+\rangle_a, |-\rangle_a\}$ متعامد یک‌ه‌اند و M_+^a و M_-^a نگاشت‌های تصویری‌اند و همچنین $M_+^a M_+^a + M_-^a M_-^a = I^a$ که در آن عملگر همانی زیرسیستم اتم است، شرایط اندازه‌گیری برقرار است. در این صورت عملگرهای اندازه‌گیری متناظر روی سیستم مرکب به صورت زیر هستند:

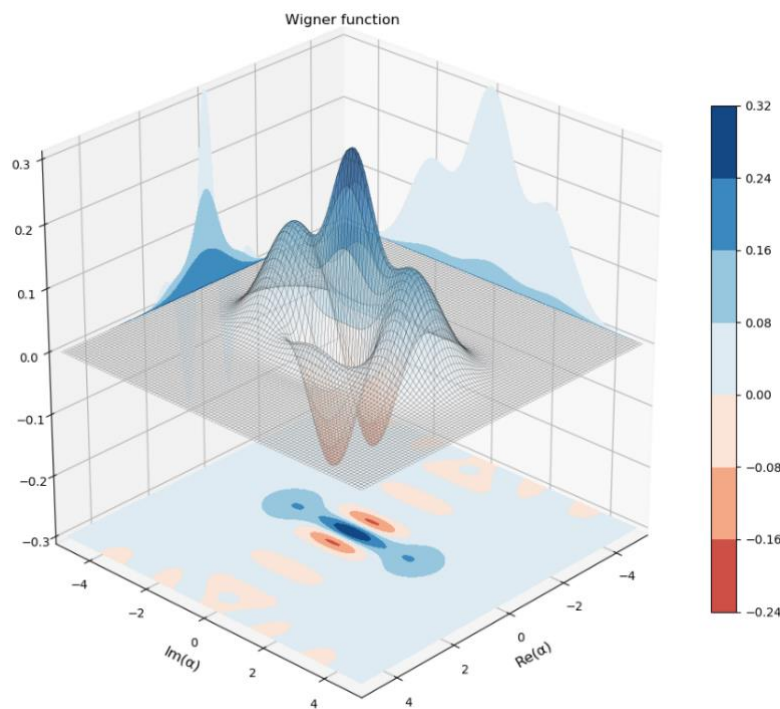
$$N_+^{ac} = M_+^a \otimes I^c \quad (41)$$

$$N_-^{ac} = M_-^a \otimes I^c,$$

محاسبه ساده نشان می‌دهد که در صورتی که در لحظه $t = \frac{\pi}{2\chi}$ حالت سیستم مرکب اتم-کاواک رابطه (۲۴) باشد، احتمال این که زیرسیستم اتم در حالت $|+\rangle$ باشد برابر است با:



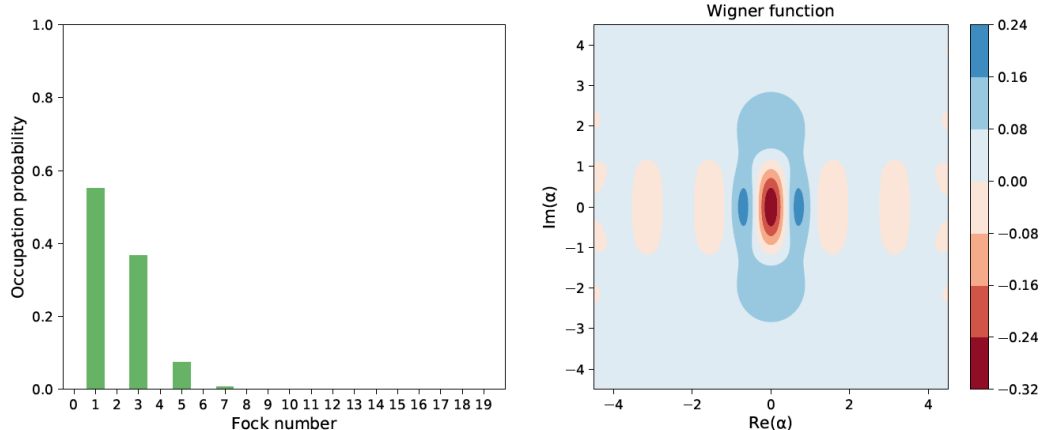
شکل ۸ الف. تابع ویگنر و توزیع فوک برای حالت انتقال یافته به زیرسیستم تابش کاواک پس از اندازه‌گیری برافکنشی N_+^{ac} روی سیستم مرکب، در لحظه $t = \frac{\pi}{2\gamma}$. فاز ϕ در حالت اولیه اتم، $\pi/2$ فرض شده است. اندازه‌گیری روی زیرسیستم اتم، باعث انتقال زیرسیستم تابش به یک حالت گربه‌ای زوج چرخش یافته شده است.



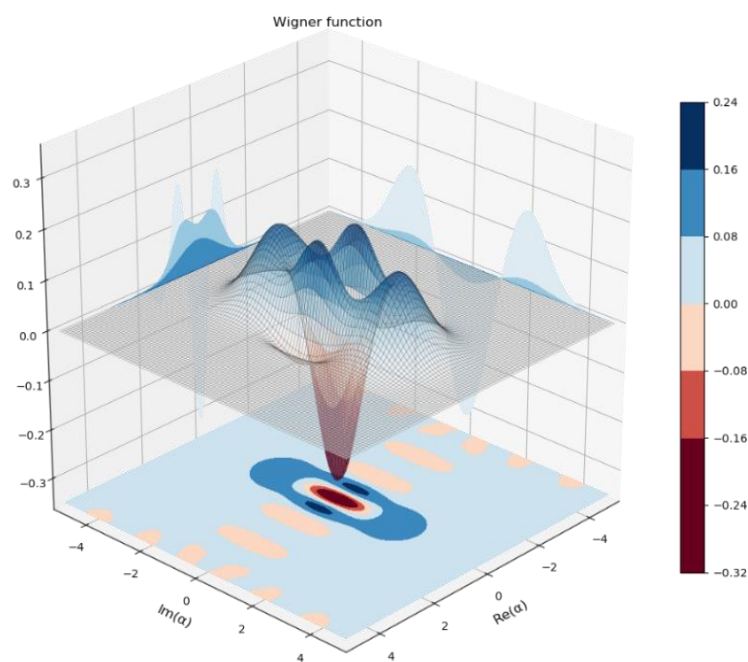
شکل ۸ ب. نمای سه‌بعدی تابع ویگنر شکل ۷ الف. منفی شدن تابع ویگنر نشان دهنده کوانتومی بودن حالت انتقال یافته به تابش، پس از اندازه‌گیری است.

مخلوط ناهمدوس (10) ، به یک برهم‌نهی همدوس از نوع گربه‌ای با پارامتر همدوسی موهومی محض α حقیقی فرض شده است) برافکنش می‌شود. به عبارت دیگر برای هر دو

زیرسیستم را در لحظه مذکور نشان می‌دهد. قبلاً در شکل ۵ وجود هم‌بستگی کوانتومی بین اتم و تابش در این لحظه آشکار شده بود. تابش کاواک در اثر اندازه‌گیری در این لحظه، از



شکل ۹. الف. تابع ویگنر و توزیع فوک برای حالت انتقال یافته به زیرسیستم تابش کاواک پس از اندازه‌گیری برافکنشی N_{-}^{ac} روی سیستم مرکب، در لحظه $t = \frac{\pi}{2\chi}$. فاز ϕ در حالت اولیه اتم، $\pi/2$ فرض شده است. اندازه‌گیری روی زیرسیستم اتم، باعث انتقال زیرسیستم تابش به یک حالت گربه‌ای فرد چرخش یافته شده است.



شکل ۹. ب. نمای سه‌بعدی تابع ویگنر شکل ۸. الف. منفی شدن تابع ویگنر نشان دهنده کوانتومی بودن حالت انتقال یافته به تابش، پس از اندازه‌گیری است.

حال به بررسی اثر فاز ϕ که در حالت اولیه فرضی اتم در رابطه (۶) ظاهر شد، بر حالت انتقال یافته به زیر سیستم تابش می‌پردازیم. انتخاب فازهای مختلف ϕ ، نوع حالت گربه‌ای کاواک را تعیین می‌کند:

اندازه‌گیری (۳۳)، حالت انتقال یافته به تابش کاواک در لحظه مذکور، یکی از دو حالت گربه‌ای به صورت زیر خواهد بود:

$$\left| \psi \left(t = \frac{\pi}{2\chi} \right) \right\rangle_c^{\pm} = \frac{|i\alpha\rangle \mp ie^{i\phi} |-i\alpha\rangle}{\sqrt{2(1 \pm e^{-2|\alpha|^2} \sin \phi)}}, \quad (39)$$

توزیع فوک زیرسیستم تابش کاواک که فقط ترازهای فرد جمعیت دارند، بیانگر حالت گربه‌ای فرد است. شکل ۹. ب تابع ویگنر این حالت انتقال یافته به تابش کاواک را در سه بعد نشان می‌دهد. در اینجا نیز مانند وضعیت قبلی، این تابع، نسبت به یک حالت گربه‌ای فرد با پارامتر همدوسی حقیقی، به اندازه $\frac{\pi}{2}$ چرخیده است که نشان از موهومی محض شدن پارامتر همدوسی حالت زیر سیستم کاواک بعد از اندازه‌گیری دارد.

۱۰. نتیجه‌گیری

در این تحقیق، انتقال حالت بین دو زیر سیستم از یک سیستم مرکب، شبیه‌سازی شد. یک کاواک با تابش تک مود و یک اتم دوترازه درون آن، جدا شده از هر محیطی (مدل جینز-کامینگ بسته) به نحوی که این دو بسیار دور از تشدید با یکدیگرند، استفاده شد. تابش اولیه در حالت همدوس و اتم اولیه در برهم‌نهی همدوس نصف-نصف از دو تراز خود فرض شدند. با شروع برهم‌کنش، دو زیرسیستم درهم‌تنیده شدند. تجزیه اشمیت سیستم مرکب و پایه‌های اشمیت زیرسیستم اتم و تابش تعیین شدند. سه معیار مختلف، میزان درهم‌تنیدگی سیستم را به صورت یکسان نشان دادند. با شبیه‌سازی وضعیت دو زیرسیستم در لحظات مختلف از دیدگاه تابع ویگنر و توزیع حالت‌های فوک، رصد شدند. تا قبل از هر نوع اندازه‌گیری، اتم بین حالت خالص اولیه و مخلوط نصف-نصف از دو حالت خود در نوسان بود. تابش کاواک نیز بین حالت اولیه همدوس و مخلوطی غیر همدوس از دو حالت همدوس با پارامتر همدوسی مزدوج مختلط یکدیگر، به سر می‌برد.

در بخش آخر، اثر اندازه‌گیری روی زیرسیستم اتم، بر حالت زیرسیستم تابش، شبیه‌سازی شد. نشان داده شد که اثر عملگرهای برفکنشی N_+^{ac} و N_-^{ac} روی سیستم مرکب، باعث انتقال همدوسی اتم به تابش کاواک می‌شود به نحوی که مخلوط غیرهمدوس تابش، به برهم‌نهی همدوس تبدیل می‌شود. همچنین نشان داده شد که با انتخاب مناسب حالت اولیه زیرسیستم‌ها، از انتقال حالت ناشی از اندازه‌گیری، می‌توان

- برای فاز $\phi = n\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ حالت گربه‌ای کاواک مستقل از این که N_+^{ac} و یا N_-^{ac} اندازه‌گیری شود، از نوع یورک استولر است (با پارامتر موهومی محض که باعث چرخش تابع ویگنر کاواک در فضای فاز به اندازه $\frac{\pi}{2}$ می‌شود). در شکل ۷. الف و ب تابع توزیع فوک و تابع ویگنر این حالت رسم شده است.
- برای فاز $\phi = n\frac{\pi}{2}$, $n = 1, 3, \dots$ حالت کاواک در وضعیتی که N_+^{ac} اندازه‌گیری شده باشد، از نوع گربه‌ای زوج است و در وضعیتی که N_-^{ac} اندازه‌گیری شده باشد، از نوع گربه‌ای فرد است. این نتیجه برای فازهای با مضارب منفی $\frac{\pi}{2}$ ، برعکس می‌شود.

نتیجه شبیه‌سازی این اندازه‌گیری برفکنشی N_+^{ac} برای فاز $\phi = n\frac{\pi}{2}$, $n = 1, 3, \dots$ در شکل ۸ الف نشان داده شده است. توزیع فوک زیر سیستم تابش کاواک پس از اندازه‌گیری، به حالتی که در آن فقط حالت‌های زوج جمعیت دارند، انتقال یافته است:

$$\left| \psi \left(t = \frac{\pi}{2\chi} \right) \right\rangle_c = \frac{1}{\sqrt{2}} (|ai\rangle + |-ai\rangle), \quad (40)$$

همچنین تابع ویگنر آن نیز نسبت به یک حالت گربه‌ای زوج با پارامتر همدوسی حقیقی α ، به اندازه $\frac{\pi}{2}$ چرخیده است که نشان از موهومی محض شدن پارامتر همدوسی حالت زیر سیستم کاواک بعد از اندازه‌گیری دارد. شکل ۸. ب تابع ویگنر سه بعدی سیستم، به طور آشکارتری انتقال تابش به حالت کوانتومی گربه‌ای زوج را پس از اندازه‌گیری نشان می‌دهد.

وضعیت سیستم پس از اندازه‌گیری N_-^{ac} برای فاز $\phi = n\frac{\pi}{2}$, $n = 1, 3, \dots$ در شکل ۹. الف نشان داده شده است. اثر برفکنش N_-^{ac} روی سیستم مرکب (۲۴)، انتقال زیر سیستم تابش کاواک، به یک حالت گربه‌ای فرد را نشان می‌دهد:

$$\left| \psi \left(t = \frac{\pi}{2\chi} \right) \right\rangle_c = \frac{1}{\sqrt{2}} (|ai\rangle - |-ai\rangle), \quad (41)$$

استفاده کرد و تابش در حالت‌های گریه‌ای زوج و فرد را ایجاد کرد [۲، ۱۳ و ۱۵].

مراجع

1. M Dakna, L Knöll, and D G Welsch, *Eur. Phys. J. D* **3** (1998) 295.
2. S Deleglise, *et al.*, *Nature* **455** (2008) 510.
3. K Vogel, V Akulin, and W P Schleich, *Phys. Rev. Lett.* **71** (1993) 1816.
4. V V Dodonov, *J. Opt., B Quantum Semiclass. Opt.* **4** (2002) R1.
5. S Y Lee and H Nha, *Phys. Rev. A* **82** (2010) 053812.
6. D F Walls, *Nature* **324** (1986) 210.
7. L-A Wu, M Xiao, and H Kimble, *J. Opt. Soc. Am. A* **4** (1987) 1465.
8. V Dodonov, I Malkin, and V Man'Ko, *Physica* **72** (1974) 597.
9. H Jeong, *Phys. Rev. A* **72** (2005) 034305.
10. T C Ralph, *et al.*, *Phys. Rev. A* **68** (2003) 042319.
11. B Vlastakis, *et al.*, *J. Sci.* **342** (2013) 607.
12. C Gerry and P Knight, *Am. J. Phys.* **65** (1997) 964.
13. B Hacker, *et al.*, *Nat. Photonics* **13** (2019) 110.
14. K Hammerer, *et al.*, "Cavity Optomechanics" Springer (2014).
15. A Ourjoumtsev, *et al.*, *Nature* **448** (2007) 784.
16. W Schleich, M Pernigo, and F Le Kien, *Phys. Rev. A* **44** (1991) 2172.
17. J R Johansson, P D Nation, and F Nori, *Comput. Phys. Commun.* **183** (2012) 1760.
18. C M Savage, S L Braunstein, and D F Walls, *Opt. Lett.* **15** (1990) 628.
19. D Schuster, *et al.*, *Nature* **445** (2007) 515.
20. C Gerry and P L Knight, "Introductory quantum optics", Cambridge university press (2005).
21. E S Fry and T Walther, "Advances in Atomic, Molecular, and Optical Physics" Elsevier (2000)
22. L Vermeyden, *MS thesis*, University of Waterloo (2014).
23. W Tittel and G Weihs, *arXiv preprint quant-ph/0107156* (2001)
24. M A Nielsen and I Chuang, "Quantum computation and quantum information" American Association of Physics Teachers (2002).
25. A Pathak, "Elements of quantum computation and quantum communication" CRC Press, Boca Raton (2013).
26. M Horodecki, *Quantum Inf. Comput.* **1** (2001) 3.
27. R Horodecki, *et al.*, *Rev. Mod. Phys.* **81** (2009) 865.
28. W P Schleich, "Quantum optics in phase space" John Wiley & Sons (2011).