



## ساختار تعادلی ستاره‌های نوترونی چرخان

رشید ریاحی<sup>۱</sup> و سید ظفرالله کلانتری<sup>۲</sup>

۱. گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، واحد شهرکرد، دانشگاه آزاد اسلامی، شهرکرد

۲. دانشکده فیزیک، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان

پست الکترونیکی: r.riahi@iaushk.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۳۹۸/۱۲/۰۴؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۴۰۰/۰۵/۱۰)

### چکیده

با استفاده از معادله حالت‌های وابسته به چگالی برای ماده تشکیل دهنده ستاره نوترونی و حل عددی معادلات میدان اینشتین، دنباله حالت‌های تعادل ستاره نوترونی را به دست آورده‌ایم. برهم‌کنش میان باریون‌ها در چارچوب میدان-میانگین نسبی با استفاده از تبادل مزون‌های عددی و برداری توصیف می‌شود که ضریب جفت‌شدگی مزون‌ها تابعی از چگالی محیط است. دنباله حالت‌های تعادل برای چهار بسامد مشاهده شده برای ستاره‌های نوترونی چرخان یعنی  $25 \text{ Hz}$ ،  $317 \text{ Hz}$ ،  $716 \text{ Hz}$  و  $1122 \text{ Hz}$  محاسبه شده است. این دنباله‌ها توسط دنباله‌های غیر چرخشی، کپلری و ناپایداری متقارن محوری مزمن محدود می‌شوند و به این ترتیب می‌توان محدوده شعاع و جرم ستاره‌ها را در هر یک از مدل‌های مورد استفاده به دست آورد. همچنین می‌توان مشخصات سریع‌ترین ستاره چرخان که توسط هر یک از مدل‌ها توصیف می‌شود را محاسبه کرد.

**واژه‌های کلیدی:** ستاره نوترونی چرخان، تقریب میدان میانگین، معادله حالت، برهم‌کنش وابسته به چگالی، معادلات میدان اینشتین

### ۱. مقدمه

مشاهدات انجام شده در مورد تپ اخترها<sup>۱</sup> در سیستم‌های دوتایی، تابش گرمایی ستاره‌های نوترونی منزوی و نوسانگرهای شبه-تناوبی<sup>۲</sup> اطلاعاتی در مورد جرم، شعاع، دما، سن، انتقال به سرخ و ساختار درونی آنها به ما می‌دهند. نتایج این مشاهدات را می‌توان به عنوان محدودیت در تئوری‌های مختلف وارد کرد تا بتوان رفتار ستاره‌های نوترونی را بهتر توصیف کرد [۴-۱]. همچنین می‌توان با استفاده از تئوری‌های مختلف، پارامترهای فیزیکی مانند گشتاور چارقفی را محاسبه کرده و به عنوان

ستاره‌های نوترونی یکی از چگال‌ترین اجسام در جهان هستند. چگالی مرکزی آنها حدود چندین برابر چگالی نقطه اشباع هسته‌ای است. با توجه به این که اطلاعات زیادی در مورد چنین محیط‌هایی در دسترس نیست، می‌توان ستاره‌های نوترونی را به صورت آزمایشگاه اختر فیزیک آرمانی برای بررسی تئوری‌های مختلف ماده با چگالی بالا در نظر گرفت که ارتباط میان فیزیک هسته‌ای، فیزیک ذرات و اختر فیزیک را برقرار می‌کنند.

۱. Pulsar

۲. Quasi-periodic oscillation

خورشید است) و  $2230-11614 J$  با بسامد  $317 Hz$  و جرم  $M_{\odot} (1/97 \pm 0/04)$  [۱۱] و همچنین سریع‌ترین ستاره‌های نوترونی چرخان مشاهده شده، یعنی  $2446ad-11748 J$  با بسامد  $716 Hz$  [۱۲] و  $285-11739 J$  با بسامد  $1122 Hz$  [۱۳] را محاسبه کرده‌ایم.

## ۲. معادله حالت

در حالت کلی یک ستاره نوترونی از دو بخش هسته و پوسته تشکیل شده است. هسته ستاره، با چگالی پنج تا ده برابر چگالی ماده هسته‌ای اشباع ( $\rho_{nuc} \approx 3 \times 10^{14} \text{ gr/cm}^3$ )، یک گاز تبهگن متشکل از نوترون، پروتون و الکترون (در چگالی‌های بالا احتمال حضور میون، هایپرون‌ها، پایون و کائون وجود دارد) تشکیل شده است. پوسته ستاره به دو قسمت خارجی و داخلی تقسیم می‌شود که قسمت خارجی ( $\rho \leq \rho_{drip} \approx 4/3 \times 10^{11} \text{ g/cm}^3$ ) از یون‌ها و الکترون‌ها تشکیل شده و در قسمت داخلی ( $\rho < \rho_{nuc}$ ) الکترون‌ها نیز وجود دارند. برای توصیف ماکروسکوپی ستاره‌های نوترونی باید از معادله حالت استفاده کرد. یک معادله حالت رابطه میان چگالی مرکزی انرژی و فشار را مشخص می‌کند. در اینجا برای توصیف پوسته ستاره از معادله حالت  $BPS^3$  [۱۴] استفاده کرده‌ایم. برای توصیف هسته ستاره، معادله حالت‌های مختلف غیرنسبیتی و نسبیتی وجود دارد که در اینجا از معادله حالت‌های وابسته به چگالی<sup>۴</sup> نسبیتی در نظریه تقریب میدان- میانگین<sup>۵</sup> استفاده شده است. این نظریه مزایای مختلفی شامل هموردای لورنتس، در نظر گرفتن اسپین ذرات، ساز و کار ساده برای توصیف اشباع ماده هسته‌ای و نسبیتی بودن دارد. در این نظریه برهم‌کنش میان باریون‌ها با استفاده از تبادل مزون‌های مختلف توصیف می‌شود. مزون  $\sigma$  جاذبه بلند برد، مزون  $\omega$  دافعه کوتاه برد، مزون  $\rho$  اثر سطح و ایزوسپین و مزون  $\delta$  جدایی میان جرم مؤثر پروتون و نوترون را توصیف می‌کند. بنابراین چگالی

مقادیری برای مقایسه با مشاهدات آینده پیشنهاد کرد [۴]. ساختار ستاره‌های نوترونی غیرچرخان به طور گسترده مورد مطالعه قرار گرفته است. از طرف دیگر با توجه به این که حل معادلات میدان اینشتین برای ستاره نوترونی چرخان دشوار است، رفتار این دسته در گذشته به طور گسترده مطالعه نشده است. در سال‌های اخیر به منظور حل معادلات اینشتین و بررسی ساختار و میدان گرانشی ستاره‌های نوترونی چرخان، روش‌های عددی مختلفی ارائه شده است. با مقایسه نتایج به دست آمده از این روش‌ها با مشاهدات اختر فیزیکی، می‌توان ساختار ستاره‌های نوترونی چرخان را مورد بررسی قرار داد [۵-۸].

نقطه شروع بررسی ستاره‌های نوترونی معادله حالت<sup>۱</sup> است. این معادله برای توصیف ساختار ماکروسکوپی ستاره به کار می‌رود و رابطه میان چگالی انرژی و فشار را مشخص می‌کند. با وجود مطالعات بسیار زیاد در مورد ماده با چگالی بالا هنوز هیچ توافقی در مورد ساختار آنها وجود ندارد و در نتیجه معادله حالت‌های بسیاری برای توصیف این ساختار ارائه شده است. با استفاده از هر یک از معادله حالت‌های پیشنهاد شده در توصیف ستاره، محدوده‌ای برای پارامترهای فیزیکی توصیف کننده ستاره به دست می‌آید که با مقادیر به دست آمده از معادله حالت‌های دیگر تفاوت دارد. به این دلیل فیزیکدانان تمایل دارند از روابطی مستقل از معادله حالت به نام روابط جهانی برای به دست آوردن رابطه میان پارامترهای فیزیکی مختلف توصیف کننده ستاره استفاده کنند و در این راستا روابط مختلفی ارائه شده است [۹].

در اینجا قصد داریم با به کارگیری نظریه میدان- میانگین<sup>۲</sup> و معادله حالت‌های مختلف وابسته به چگالی، دنباله حالت‌های تعادل ستاره‌های نوترونی را برای بسامدهای چرخش مختلف مشاهده شده، محاسبه کرده و محدوده تعادل این ستاره‌ها را مشخص کنیم. بنابراین دنباله حالت‌ها را برای سنگین‌ترین ستاره‌های مشاهده شده، یعنی  $432+348 J$  با بسامد  $25 Hz$  [۱۰] و جرم  $M_{\odot} (2/01 \pm 0/04)$  نشان‌دهنده جرم

۳. Baym-Pethick-Sutherland

۴. Density-dependent

۵. Mean-field approximation

۱. Equation of state

۲. Mean-field theory

با توجه به توضیحات بالا، چگالی لاگرانژی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_B + \mathcal{L}_M + \mathcal{L}_{int} + \mathcal{L}_I \quad (۱)$$

که  $\mathcal{L}_B$  لاگرانژی باریون‌های آزاد

$$\mathcal{L}_B = \sum_B \bar{\psi}_B \left( i\gamma^\mu \partial_\mu - M_B \right) \psi_B, \quad (۲)$$

و  $\mathcal{L}_M$  لاگرانژی مزون‌های آزاد

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_M = & \frac{1}{4} \left( \partial^\mu \sigma \partial_\mu \sigma - m_\sigma^2 \sigma^2 \right) + \frac{1}{4} \left( \partial^\mu \vec{\delta} \partial_\mu \vec{\delta} - m_\delta^2 \vec{\delta}^2 \right) \\ & - \frac{1}{4} \Omega^{\mu\nu} \Omega_{\mu\nu} + \frac{1}{4} m_\omega^2 \omega_\mu \omega^\mu - \frac{1}{4} \vec{R}^{\mu\nu} \vec{R}_{\mu\nu} + \frac{1}{4} m_\rho^2 \vec{\rho}_\mu \vec{\rho}^\mu \\ & - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad (۳) \end{aligned}$$

و  $\mathcal{L}_{int}$  برهم‌کنش میان ذرات را توصیف می‌کند.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{int} = & \Gamma_\sigma(\rho) \sigma \bar{\psi}_B \psi_B - \Gamma_\omega(\rho) \bar{\psi}_B \gamma^\mu \omega_\mu \psi_B \\ & - \frac{\Gamma_\rho(\rho)}{4} \bar{\psi}_B \gamma^\mu \vec{\rho}_\mu \vec{\tau} \psi_B + \Gamma_B(\rho) \bar{\psi}_B \delta \vec{\tau} \psi_B, \quad (۴) \end{aligned}$$

همچنین  $\mathcal{L}_I$  لاگرانژی لپتون‌ها را نشان می‌دهد که نقش مهمی در برقراری شرط خنثی بودن الکتریکی و تعادل بتا ماده هسته‌ای را دارند.

$$\mathcal{L}_I = \sum_l \bar{\psi}_l \left( i\gamma^\mu \partial_\mu - m_l \right) \psi_l. \quad (۵)$$

در این روابط  $M_B$  جرم باریون‌ها،  $m_i$  با  $i = \sigma, \omega, \rho, \delta$  جرم مزون‌ها و  $m_l$  جرم لپتون‌ها را نشان می‌دهند و تانسور شدت میدان برای میدان برداری  $\omega$  به صورت  $F^{\mu\nu}$  و  $\vec{R}^{\mu\nu}$  برای جفت‌شدگی  $i = \sigma, \omega, \rho, \delta$  با  $\Gamma_i(\rho)$  تعریف می‌شوند. وابسته به چگالی باریون-مزون را نشان می‌دهد. این جفت‌شدگی‌ها با استفاده از محاسبات دیراک-بروکری در ماده نامتناهی هسته‌ای به دست آمده و به صورت زیر نوشته می‌شوند: [۲۶ و ۲۷]:

$$\Gamma_i(\rho) = \Gamma_i(\rho_0) f_i(x), \quad (۶)$$

$$f_i(x) = a_i \frac{1 + b_i(x + d_i)^2}{1 + c_i(x + e_i)^2}, \quad x = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad (۷)$$

$\rho_0$  چگالی اشباع ماده متقارن هسته‌ای است و  $a_i$ ،  $b_i$ ،  $c_i$ ،  $d_i$  و  $e_i$  با استفاده از محاسبات مدرن میکروسکوپی ماده متقارن هسته‌ای، ماده نوترونی خالص و مجموعه‌ای از داده‌های

لاگرانژی توصیف کننده شامل اسپینور دیراک  $\psi$  باریون‌ها، میدان مزون‌ها،  $\sigma$ ،  $\omega^\mu$ ،  $\vec{\delta}$  و  $\vec{\rho}^\mu$  و میدان فوتون  $A^\mu$  برای در نظر گرفتن برهم‌کنش الکترومغناطیسی است.

مقیاسه مشاهدات با مدل‌های نظری تابش تپ اخترها نشان می‌دهد که میدان مغناطیسی سطحی در بیشتر تپ اخترها  $B \approx 10^{11} - 10^{12}$  G است [۱۵] اما در تپ اخترها رادیویی میدان مغناطیسی سطحی به  $B \leq 10^{14}$  G و در مگنتارها به  $B \leq 10^{15}$  G می‌رسد [۱۶]. به طور طبیعی میدان مغناطیسی داخلی بزرگ‌تر از میدان مغناطیسی سطحی و از مرتبه  $B \approx 10^{18}$  G است [۱۷ و ۱۸]. این میدان مغناطیسی قوی باعث ایجاد پدیده‌های گوناگونی در اتمسفر و مگنتوسفر ستاره‌های نوترونی می‌شود [۱۹]. این میدان مغناطیسی قوی در حالتی بر معادله حالت تاثیر دارد که کوانتس حرکت ذرات در میدان (مدارهای لاندائو) و برهم‌کنش ممان مغناطیسی ذرات با میدان اهمیت داشته باشند. این اثرات کوانتومی زمانی محسوس هستند که ذرات فقط تعداد کمی از سطوح کوانتومی القاء شده را اشغال کرده باشند، در غیر این صورت اثر میدان مغناطیسی بر معادله حالت جزئی است [۲۰-۲۳]. میدان مغناطیسی بر فشار ماده هسته‌ای تاثیر دارد. مقدار لازم میدان برای تاثیر محسوس بر فشار را می‌توان محاسبه کرد. فشار جزئی الکترون و میون در هسته ستاره با میدان  $B \gg 10^{17}$  G تغییر می‌کند و فشار جزئی پروتون و نوترون در گاز  $n\mu$  در چگالی ستاره‌های نوترونی تحت تاثیر میدان‌های  $B \geq 10^{20}$  G تغییر می‌کند [۲۴]. نکته دیگری که باید در نظر گرفت این است که در حضور میدان مغناطیسی، نرم شدن معادله حالت به دلیل کوانتس لاندائو با سخت شدن معادله حالت به دلیل حضور گشتاور مغناطیسی ناهنجار<sup>۱</sup> نوکلئون‌ها در میدان‌های  $B > 10^5$  B<sup>c</sup> ( $B^c = 4.0414 \times 10^{13}$  G میدان بحرانی الکترون) خنثی می‌شود [۲۵]. با توجه به این که میدان مغناطیسی بیشینه محاسبه شده در داخل ستاره در نظریه‌های مختلف از مرتبه  $10^{18}$  G است در این محاسبات ما از اثر میدان مغناطیسی بر معادله حالت صرف نظر کرده‌ایم.

۲. Dirac-Brueckner

۱. Anomalous magnetic moment

$$\rho = \langle \bar{\psi}_B \gamma^0 \psi_B \rangle, \quad (14)$$

$$\rho_{sr} = \langle \bar{\psi}_B \tau_r \psi_B \rangle, \quad (15)$$

$$\rho_r = \langle \bar{\psi}_B \gamma^0 \tau_r \psi_B \rangle, \quad (16)$$

و  $m_B^* = m_B - \Gamma_\sigma \sigma + \Gamma_\delta \vec{\tau} \cdot \vec{\delta}$  جرم مؤثر دیراک است.

### ۳. حل عددی معادلات میدان اینشتین

به منظور بررسی ساختار و میدان گرانشی نسبیتی، متقارن محوری<sup>۱</sup> و مانای<sup>۲</sup> ستاره چرخان و حل معادلات میدان اینشتین، روش‌های عددی مختلفی از حدود سال ۱۹۷۰ میلادی تاکنون ابداع شده است [۳۲-۳۵]. براساس این روش‌ها تعدادی کد حل عددی توسعه یافته‌اند. در اینجا ما به منظور حل معادلات اینشتین از کد LORENE<sup>۳</sup> استفاده کرده‌ایم. این کد براساس روش طیفی دامنه-چندگانه<sup>۴</sup> [۳۶-۳۸] توسعه یافته است. در این روش، دامنه فضایی کل به تعدادی زیر دامنه تقسیم می‌شود و میدان کمیت‌های مورد نظر با استفاده از چند جمله‌ای چبیشف<sup>۵</sup> بسط داده می‌شوند. اگر مرز یکی از این زیر دامنه‌ها منطبق بر سطح ستاره باشد، بسط میدان‌ها هموار خواهد بود و در نتیجه تقریب بسیاری خوبی از کمیت‌های مورد نظر را به دست می‌آوریم. بدین ترتیب می‌توان اثر پدیده گیبس را در محاسبات حذف کرد. این پدیده زمانی رخ می‌دهد که میدان‌های فیزیکی ناهموار مانند چگالی انرژی بسط داده شوند و این پدیده بر آهنگ همگرایی محاسبات تأثیر می‌گذارد. به منظور توصیف میدان گرانشی ستاره، دو شکل متفاوت از متریک در نظر گرفته می‌شوند. برای خارج ستاره [۳۸]:

$$ds^2 = e^{2\alpha} (d\rho^2 + d\zeta^2) + W^2 e^{-2\nu} (d\varphi - \omega dt)^2 - e^{2\nu} dt^2, \quad (17)$$

و برای داخل ستاره:

انرژی بستگی و شعاع هسته‌های منتهی به دست می‌آیند. در اینجا ما از مدل‌های وابسته به چگالی DDH $\delta$  [۲۸]، TW۹۹ [۲۹]، DD-F [۳۰] و DD-ME $\delta$  [۳۱] استفاده کرده‌ایم.

در مدل DD-ME $\delta$ ،  $i = \sigma, \omega, \rho, \delta$  است. در مدل DDH $\delta$  و TW۹۹ برای مزون‌های  $\sigma$  و  $\omega$  رابطه (۷) استفاده

می‌شود ولی در TW۹۹ برای مزون  $\rho$

$$f(x) = \exp[-a_\rho(x-1)], \quad (8)$$

و در مدل DDH $\delta$

$$f_i = a_i \exp[-b_i(x-1)] - c_i(x-d_i), \quad (9)$$

برای  $i = \rho, \delta$  در نظر گرفته شده است. در معادله حالت‌های DDH $\delta$ ، TW۹۹ و DD-F  $e_i = d_i$  است. با استفاده از معادله اوایلر-لاگرانژ می‌توان معادله حرکت میدان‌ها را به دست آورد و با توجه به این که علاقمند به بررسی ماده یکنواخت در حالت پایه هستیم، تقریب میدان میانگین را در نظر می‌گیریم. در این تقریب، میدان مزون‌ها در معادله حرکت میدان‌ها با میدان میانگین جایگزین می‌شود و سپس با استفاده از معادلات حرکت، این مقادیر میانگین به دست می‌آیند. در نهایت با محاسبه مقدار چشمداشتی حالت پایه تانسور انرژی-تکانه می‌توان معادله حالت را به دست آورد. چگالی انرژی و فشار سیستم با استفاده از روابط زیر محاسبه می‌شود:

$$\varepsilon = \langle T^{00} \rangle = \frac{1}{V} \left[ m_\sigma^2 \sigma^2 + m_\omega^2 \omega_\alpha^2 + m_\rho^2 \rho_\alpha^2 + m_\delta^2 \delta_r^2 \right] + \sum_{j=B,l} \frac{2}{(2\pi)^3} \int_0^{k_{fj}} \sqrt{k^2 + m_j^{*2}} dk^2, \quad (10)$$

$$P = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^3 \langle T^{ii} \rangle = \frac{1}{V} \left[ -m_\sigma^2 \sigma^2 + m_\omega^2 \omega_\alpha^2 + m_\rho^2 \rho_\alpha^2 - m_\delta^2 \delta_r^2 \right] + \sum_{j=B,l} \frac{2}{(2\pi)^3} \int_0^{k_{fj}} \frac{k^2}{\sqrt{k^2 + m_j^{*2}}} dk^2 + \rho \sum_0, \quad (11)$$

که جمله خود-انرژی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sum_0 = -\frac{\partial \Gamma_\sigma}{\partial \rho} \sigma \rho_s + \frac{\partial \Gamma_\omega}{\partial \rho} \omega_\alpha \rho + \frac{1}{2} \frac{\partial \Gamma_\rho}{\partial \rho} \rho_\alpha \rho_\alpha - \frac{\partial \Gamma_\delta}{\partial \rho} \delta_r \rho_{sr}, \quad (12)$$

در این رابطه، چگالی‌های عددی و برداری به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\rho_s = \langle \bar{\psi}_B \psi_B \rangle, \quad (13)$$

۱. Axisymmetric

۲. Stationary

۳. <https://lorene.obspm.fr/>

۴. Multi-domain spectral

۵. Chebyshev

پایدار ستاره معادل با نقطه بازگشت نمودار با افزایش چگالی انرژی مرکزی،  $\varepsilon_c$  است. این نقطه را می‌توان با حل معادله  $\frac{\partial M}{\partial \varepsilon_c} = 0$  به دست آورد. دومین مرز ناحیه تعادل ستاره، دنباله کپلری یا دنباله رها شدن-جرم<sup>۱</sup> نامیده می‌شود. یک ذره چرخان در استوای ستاره زمانی در حال تعادل است که نیروی گریز از مرکز و نیروی گرانشی در حال تعادل باشند. با در نظر گرفتن این شرط می‌توان سرعت زاویه‌ای و بسامد کپلری را محاسبه کرد. در استوای ستاره، ذرات با سرعت بیشتر از این مقدار به بیرون پرتاب می‌شوند، پس این شرط به‌عنوان یک حالت مرزی در نظر گرفته می‌شود. سومین مرز ناحیه تعادل ستاره چرخان در مد ناپایداری شبه-شعاعی<sup>۲</sup> مشاهده می‌شود که ناپایداری متقارن محوری مزمن<sup>۳</sup> نامیده می‌شود. همان طور که در بالا توضیح داده شد، برای ساختار غیرچرخشی حداکثر جرم پایدار (جرم بحرانی) منطبق بر اولین بیشینه هر دنباله از ساختارها با افزایش چگالی مرکزی است. در این نقطه بسامد اختلالات شعاعی صفر است. برای چگالی‌های بالاتر، بسامدهای مختلط به‌دست می‌آیند که باعث اختلالات غیر نوسانی و بنابراین ناپایداری می‌شوند. روش نقطه بازگشت را که نقاط ناپایداری مزمن نشان می‌دهد می‌توان در چرخش یکنواخت ستاره‌ها نیز مورد استفاده قرار داد [۴۰]. در یک دنباله با تکانه زاویه‌ای ثابت، نقطه بازگشت دنباله با افزایش چگالی مرکزی، پایداری و ناپایداری مزمن را از یکدیگر جدا می‌کند، یعنی ناپایداری متقارن محوری مزمن را می‌توان با استفاده از معادله:

$$\left. \frac{\partial M(\varepsilon_c, J)}{\partial \varepsilon_c} \right|_{J=const} = 0, \quad (24)$$

به‌دست آورد و بنابراین منحنی‌ای که تمام این نقاط بیشینه را به یکدیگر وصل می‌کند ناحیه تعادل ستاره را محدود می‌کند. محل برخورد این مرز با دنباله کپلری سریع‌ترین ساختار ستاره چرخان را مشخص می‌کند. در این رابطه تکانه زاویه‌ای از

$$ds^2 = e^{-2U'} [e^{2k'} (d\rho^2 + d\zeta^2) + W^2 d\phi'^2] - e^{2U'} (dt + a'd\phi')^2 dt^2, \quad (18)$$

که در این رابطه،  $\phi' = \phi - \Omega t$  و  $\Omega$  سرعت زاویه‌ای ثابت نسبت به ناظر بی‌نهایت است. روابط زیر ارتباط میان متغیرهای دو متریک بالا را نشان می‌دهند:

$$\alpha = k' - U', \quad W^{-1} e^{2\nu} \pm \omega = (W e^{-2U'} \pm a')^{-1}, \quad (19)$$

مجموعه معادلات به دست آمده از معادلات اینشتین برای متریک ذکر شده به صورت زیر خواهد بود [۳۹]:

$$\nabla \cdot (B \nabla \nu) - \frac{1}{\nu} \rho^2 B^2 e^{-2\nu} (\nabla \omega)^2 = 4\pi e^{\alpha} B \left[ (\varepsilon + P) \frac{1+\nu^2}{1-\nu^2} + 2P \right], \quad (20)$$

$$\nabla \cdot (\rho^2 B^2 e^{-2\nu} \nabla \omega) = -16\pi \rho B^2 e^{\alpha-2\nu} (\varepsilon + P) \frac{\nu}{1-\nu^2}, \quad (21)$$

$$\nabla \cdot (\rho \nabla B) = 16\pi B e^{-2\nu} P, \quad (22)$$

که در این روابط

$$B = \frac{W}{\rho}, \quad \nu = \rho B e^{-2\nu} (\Omega - \omega), \quad (23)$$

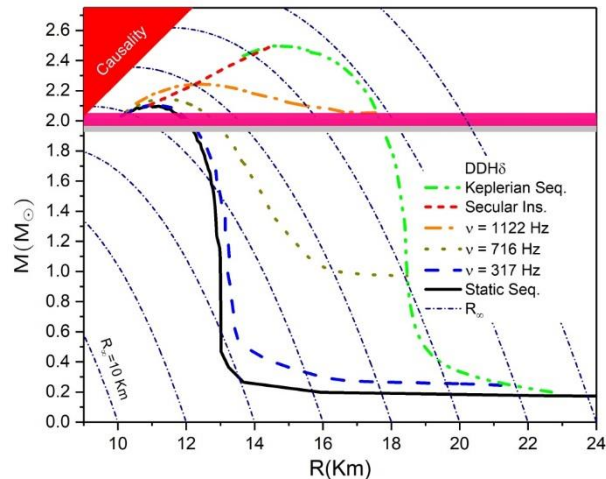
است. در این روابط  $\nabla$  عملگر فضای سه بعدی اقلیدسی،  $\rho$ ،  $\zeta$  و  $\phi$  مختصات استوانه‌ای و  $\nu$  سرعت خطی نسبت به ناظر غیرچرخان است. تمام پتانسیل‌های گرانشی، مقادیر مرزی و شکل نامشخص سطح ستاره برحسب چند جمله‌ای چیبیشف بسط داده می‌شوند. ضرایب بسط چیبیشف با حل مجموعه معادلات غیرخطی با استفاده از روش نیوتن-رافسون به دست می‌آیند.

به منظور به دست آوردن یک دنباله از حالت‌های تعادلی ستاره چرخان، ما مقدار  $\Omega$  را ثابت در نظر گرفته و اجازه می‌دهیم چگالی انرژی مرکزی در محدوده مجاز تغییر کند. مهم‌ترین نمایش حالت‌های تعادل یک ستاره نوترونی دنباله شعاع-جرم در  $\Omega$  یا  $J$  ثابت است. این دنباله‌ها توسط سه مرز به ترتیب زیر محدود شده و ناحیه تعادل ستاره را مشخص می‌کنند. اولین مرز ناحیه تعادل یک ستاره نوترونی چرخان، دنباله حالت تعادل ساختار غیرچرخشی است که در آن  $\Omega = 0$ . برای هر جرم، این دنباله حداقل شعاع ستاره را نشان می‌دهد. با کمی تراکم بیشتر، ستاره ناپایدار شده و به سیاه‌چاله فرو می‌ریزد. برای دنباله غیرچرخشی، حداکثر جرم

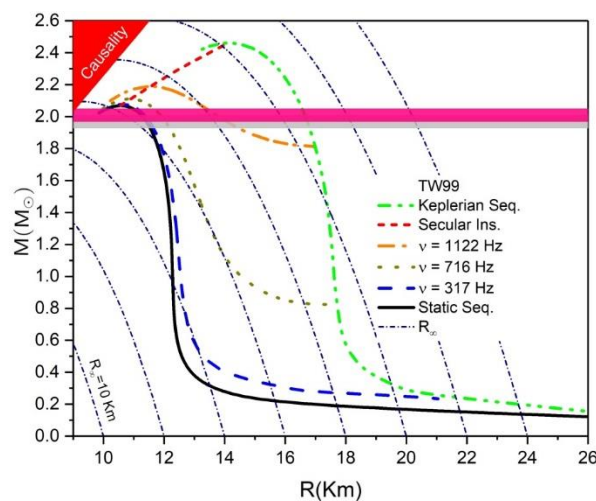
۱. Mass-shedding sequence

۲. Quasi-radial

۳. Secular axisymmetric instability



شکل ۱. (رنگی در نسخه الکترونیکی) نمودار جرم برحسب شعاع برای ستاره نوترونی در مدل DDHδ. در این شکل دنباله‌های غیرچرخشی، کیلری، ناپایداری متقارن محوری مزمن و همچنین دنباله‌های حالت‌های تعادل در بسامدهای چرخش مشاهده شده رسم شده است. منحنی‌های  $R_\infty$  و محدوده علیت نیز نشان داده شده‌اند. دو نوار افقی رسم شده، محدوده جرم  $J = 348 + 432$  و  $J = 1614 - 2230$  را نشان می‌دهند.



شکل ۲. (رنگی در نسخه الکترونیکی) مشابه شکل ۱ برای مدل TW99.

این کمیت را با داشتن روشنایی انتقال به سرخ<sup>۱</sup> و دمای ستاره می‌توان محاسبه کرد.

#### ۴. نتایج

در شکل‌های ۱ تا ۴ برای معادله حالت‌های انتخاب شده، ناحیه تعادل ستاره به‌همراه منحنی‌های  $R_\infty$  و بازه جرم اندازه‌گیری شده برای سنگین‌ترین تپ اخترهای مشاهده شده در حدود  $2M_\odot$ ، نشان داده شده است. همچنین محدودیت ناشی از

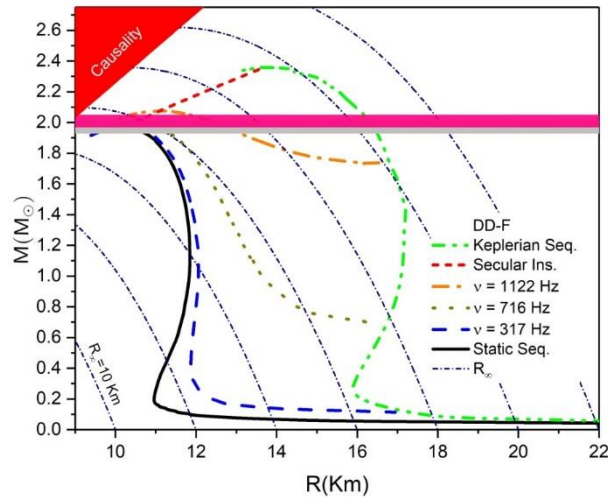
رابطه زیر به دست می‌آید [۳۸]:

$$J = -2\pi \int (\varepsilon + p) a' e^{\gamma k' - 2U'} W dp d\zeta. \quad (25)$$

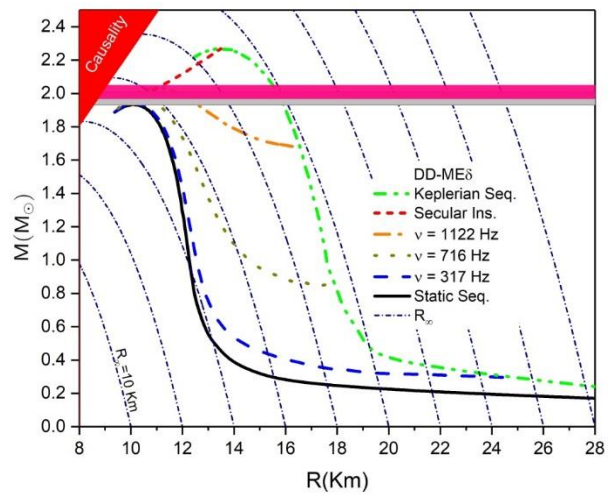
با استفاده از مشاهدات اختریفی می‌توان دامنه وسیعی از شعاع را برای ستاره‌های نوترونی به دست آورد. یکی از بهترین تقریب‌ها با استفاده از شبیه‌سازی تابش ایکس اتمسفر ستاره به دست می‌آید [۱ و ۴۱]. شعاع ستاره اندازه‌گیری شده توسط ناظری در بی‌نهایت را می‌توان از رابطه زیر محاسبه کرد:

$$R_\infty = \frac{R}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{Rc^2}}} \quad (26)$$

۱. Red-shifted luminosity



شکل ۳. (رنگی در نسخه الکترونیکی) مشابه شکل ۱ برای مدل DD-F.



شکل ۴. (رنگی در نسخه الکترونیکی) مشابه شکل ۱ برای مدل DD-MEδ.

سریع‌ترین ستاره‌های نوترونی چرخان، یعنی  $J1748-2446$  با بسامد  $716\text{ Hz}$  و  $J1739-285$  با بسامد  $1122\text{ Hz}$  را به دست آورد. بنابراین ما دنباله‌های حالت‌های تعادلی ستاره در بسامدهای چرخش  $25$ ،  $317$ ،  $716$  و  $1122$  هرتز را در این شکل‌ها نشان داده‌ایم (با توجه به این که تفاوت حالت غیرچرخشی و بسامد  $25\text{ Hz}$  قابل تشخیص نیست از رسم آن خودداری کرده‌ایم). در جدول‌های ۱ و ۲ خواص محاسبه شده برای ستاره غیرچرخان و سریع‌ترین ستاره چرخان توصیف شده در هر مدل آورده شده است. با توجه به این که معادله حالت‌های سخت، شیب نمودار بزرگ و معادله حالت‌های نرم شیب نمودار کم دارند، در ستون اول این جدول

علیت نیز در شکل‌ها نشان داده شده است. با توجه به این که سرعت صوت باید از سرعت نور در ستاره کمتر باشد، محدودیتی برای حد پایین شعاع ایجاد می‌شود که  $R \geq \frac{3GM}{c^2}$ . این محدودیت یک محدودیت ضعیف است و در معادله حالت‌های استفاده شده در این مطالعه برقرار است؛ چون این معادله حالت‌ها نسبی هستند. با استفاده از محاسبات انجام شده، می‌توان محدوده شعاع ستاره را برای سنگین‌ترین ستاره‌های مشاهده شده، یعنی  $J0348+432$  با جرم  $(2.01 \pm 0.04)M_{\odot}$  و  $J1614-2230$  با جرم  $(1.97 \pm 0.04)M_{\odot}$  و همچنین محدوده شعاع و جرم را برای

جدول ۱. ویژگی‌های محاسبه شده برای ستاره نوترونی غیرچرخان

$R_{\infty}$ (km)	R (km)	M ( $M_{\odot}$ )	مدل
۱۶/۸۱	۱۰/۹۹	۲/۱۲	DDH $\delta$
۱۶/۳۳	۱۰/۵۶	۲/۰۶	TW۹۹
۱۵/۵۹	۱۰/۱۷	۱/۹۶	DD-F
۱۵/۴۱	۱۰/۱۰	۱/۹۴	DD-ME $\delta$

جدول ۲. ویژگی‌های محاسبه شده برای سریع‌ترین ستاره نوترونی چرخان که هر مدل توصیف می‌کند

$v_{\max}$ (Hz)	$R_{\text{eq}}$ (km)	M ( $M_{\odot}$ )	مدل
۱۵۹۴/۲۴	۱۴/۷۷	۲/۵۰	DDH $\delta$
۱۶۷۳/۳۸	۱۴/۱۲	۲/۴۶	TW۹۹
۱۷۱۸/۳۳	۱۳/۷۱	۲/۳۶	DD-F
۱۷۶۸/۷۷	۱۳/۴۹	۲/۲۶	DD-ME $\delta$

جدول ۳. محدوده جرم و شعاع محاسبه شده با استفاده از مدل‌های DDH $\delta$  و TW۹۹. در ستون شعاع‌ها، عدد بالا مربوط به حداکثر جرم و عدد پایین مربوط به حداقل جرم است.

TW۹۹		DDH $\delta$		بسامد (Hz)
جرم ( $M_{\odot}$ )	شعاع (km)	جرم ( $M_{\odot}$ )	شعاع (km)	
۲/۰۱±۰/۰۴	۱۰/۹۴	۲/۰۱±۰/۰۴	۱۱/۶۶	۲۵
۲/۰۱±۰/۰۴	۱۱/۳۰	۲/۰۱±۰/۰۴	۱۲/۰۷	
۱/۹۷±۰/۰۴	۱۱/۳۴	۱/۹۷±۰/۰۴	۱۲/۰۳	۳۱۷
۱/۹۷±۰/۰۴	۱۱/۶۳	۱/۹۷±۰/۰۴	۱۲/۲۸	
۱/۴۶±۰/۰۶۴	۱۰/۸۹	۱/۵۵±۰/۰۵۹	۱۱/۳۱	۷۱۶
۱/۴۶±۰/۰۶۴	۱۷/۷۰	۱/۵۵±۰/۰۵۹	۱۸/۴۶	
۱/۹۹±۰/۰۱۹	۱۱/۵۴	۲/۱۴±۰/۰۱۰	۱۲/۵۱	۱۱۲۲
۱/۹۹±۰/۰۱۹	۱۶/۹۴	۲/۱۴±۰/۰۱۰	۱۷/۶۰	

در جدول ۳ و ۴ جرم‌ها و شعاع‌های محاسبه شده برای بسامدهای چرخش انتخاب شده، آورده شده است. برای ستاره با جرم  $(2.01 \pm 0.04) M_{\odot}$ ، در مدل‌های DDH $\delta$  و TW۹۹ محدوده شعاع به ترتیب  $12.60 \text{ km} - 12.46 \text{ km}$  و  $11.30 \text{ km} - 10.94 \text{ km}$  به دست آمده است و ستاره با این جرم و بسامد ۲۵ Hz را نمی‌توان توسط مدل‌های DD-F و DD-ME $\delta$  توصیف کرد. همچنین شعاع مطابق با جرم

سختی معادله حالت‌ها از بالا به پایین کاهش می‌یابد. محدوده شعاع محاسبه شده برای ستاره غیرچرخان  $10.99 \text{ km} - 10.10 \text{ km}$  است. همچنین حداقل و حداکثر شعاع  $R_{\infty}$  به ترتیب برابر با  $15.44 \text{ km}$  و  $16.81 \text{ km}$  برای مدل‌های DD-ME $\delta$  و DDH $\delta$  به دست آمده است. این محدوده شعاعی محاسبه شده برای  $R_{\infty}$  با نتایج حاصل از مشاهدات اختر فیزیکی،  $18.86 \text{ km} - 17.64 \text{ km}$ ، همخوانی دارد [۴۲].



جدول ۴. مشابه جدول ۳ برای مدل‌های DD-F و DD-ME $\delta$ .

DD-ME $\delta$		DD-F		بسامد (Hz)
جرم ( $M_{\odot}$ )	شعاع (km)	جرم ( $M_{\odot}$ )	شعاع (km)	
ستاره وجود ندارد	ستاره وجود ندارد	ستاره وجود ندارد	ستاره وجود ندارد	۲۵
$2/01 \pm 0/04$		$2/01 \pm 0/04$		
ستاره وجود ندارد	ستاره وجود ندارد	ستاره وجود ندارد	ستاره وجود ندارد	۳۱۷
$1/97 \pm 0/04$	۹/۸۷	$1/97 \pm 0/04$	۱۰/۸۶	
	۱۰/۴۳		۱۰/۴۸	
$1/41 \pm 0/56$	۱۷/۸۶	$1/34 \pm 0/66$	۱۶/۵۷	۷۱۶
	۱۱/۰۳		۱۱/۱۰	
$1/85 \pm 0/18$	۱۶/۵۷	$1/90 \pm 0/17$	۱۶/۶۲	۱۱۲۲

ستاره چرخان با بسامد ۱۱۲۲ Hz که تاکنون مشاهده شده است، محدوده جرم و شعاع به ترتیب  $2/24 M_{\odot} - 1/67 M_{\odot}$  و  $17/60 \text{ km} - 11/03 \text{ km}$  محاسبه شده است. این محاسبات نشان می‌دهند که مدل‌های DD-F و DD-ME $\delta$  مدل‌های مناسبی برای توصیف ویژگی‌های سنگین‌ترین ستاره‌های نوترونی مشاهده شده نیستند؛ چون با این جرم‌ها و بسامدها در این مدل‌ها هیچ ساختار تعادلی وجود ندارد. از طرف دیگر مدل‌های DDH $\delta$  و TW۹۹ برای این توصیف مناسب به نظر می‌رسند و می‌توان از آنها برای محاسبه ویژگی‌های دیگر ستاره مانند انتقال به سرخ، گشتاور چارقطبی، خروج از مرکز و لختی دورانی استفاده کرد.

$(1/97 \pm 0/04) M_{\odot}$  و بسامد چرخش ۳۱۷ Hz برای مدل‌های DDH $\delta$  و TW۹۹ به ترتیب  $12/28 \text{ km} - 12/03 \text{ km}$  و  $11/63 \text{ km} - 11/34 \text{ km}$  است. برای مدل‌های DD-F و DD-ME $\delta$ ، ستاره‌ای با حد بالای این محدوده جرم و بسامد ۳۱۷ Hz وجود ندارد و بیشینه جرم به دست آمده در این دو مدل به ترتیب  $1/97 M_{\odot}$  و  $1/95 M_{\odot}$  با شعاع‌های  $10/21 \text{ km}$  و  $10/13 \text{ km}$  تعیین می‌شوند. در این دو مدل، شعاع‌های محاسبه شده برای حد پایین این محدوده جرم  $10/86 \text{ km}$  و  $10/44 \text{ km}$  است. برای بسامد ۷۱۶ Hz محدوده جرم  $2/14 M_{\odot} - 0/68 M_{\odot}$  و محدوده شعاع  $18/46 \text{ km} - 10/43 \text{ km}$  به دست آمده است و برای سریع‌ترین

## مراجع

1. M Fortin, J Zdunik, P Haensel, and M Bejger, *Astron. Astroph* **576** (2015) A68.
2. M Fortin, C Providência, A R Raduta, F Gulminelli, J Zdunik, P .Haensel, and M Bejger, *Phys. Rev. C* **94** (2016) 035804.
3. J M Lattimer, and M Prakash, *Phys. Rep.* **442** (2007) 109.
4. R Riahi and S Z Kalantari, *Int. J. Mod. Phys. D* **30** (2021) 2150001.
5. H Cromartie, et al., *Nat. Astron.* **4**(1) (2020) 72.
6. A Bauswein, et al., *Phys. Rev. Lett.* **125** 14 (2020) 141103.
7. H Tan, J Noronha-Hostler, N Yunes, *Phys. Rev. Lett.* **125** 26 (2020) 261104.
8. B A Li, B J Cai, W J Xie, and N B Zhang, *Universe* **7** 6 (2021) 182.
9. R Riahi, S Z Kalantari, and J A Rueda, *Phys. Rev. D* **99** 4 (2019) 043004.
10. J Antoniadis, P C Freire, N Wex, T M Tauris, R S Lynch, M H van Kerkwijk, M Kramer, C Bassa, V S Dhillon, and T Driebe, *Science* **340** (2013) 1233232.
11. P Demorest, T Pennucci, S Ransom, M Roberts, and J Hessels, *Nature* **467** (2010) 1081.
12. J W Hessels, S M Ransom, I H Stairs, P C Freire, V M Kaspi, and F Camilo, *Science* **311** (2006) 1901.
13. P Kaaret, Z Prieskorn, S Brandt, N Lund, S Mereghetti, D Götz, E Kuulkers, and J Tomsick, *Astroph. J. Lett.* **657** (2007) L97.

- Greco, and H Wolter, *Nucl. Phys. A* **732** (2004) 24.
29. S Typel and H Wolter, *Nucl. Phys. A* **656** (1999) 331.
30. S Typel, *Phys. Rev. C* **71** (2005) 064301.
31. X Roca-Maza, X Viñas, M Centelles, P Ring, and P Schuck, *Phys. Rev. C* **84** (2011) 054309.
32. E Butterworth, J Ipser, *Astroph. J.* **204** (1976) 200.
33. J Friedman, J Ipser, and L Parker, *Astroph. J.* **304** (1986) 115.
34. J R Wilson, *Astroph. J.* **173** (1972) 431.
35. J M Lattimer, M. Prakash, D Masak, and A Yahil, *Astroph. J.* **355** (1990) 241.
36. S Bonazzola, E Gourgoulhon, M Salgado, and J Marck, *Astron. Astroph.* **278** (1993) 421.
37. S Bonazzola, E Gourgoulhon, and J A Marck, *Phys. Rev. D* **58** (1998) 104020.
38. M Ansorg, A Kleinwächter, and R Meinel, *Astron. Astroph.* **405** (2003) 711.
39. J Bardeen, and R V Wagoner, *Astrophys. J.* **167** (1971) 359.
40. J L Friedman, J R Ipser, and R D Sorkin, *Astroph. J.* **325** (1988) 722.
41. A Y Potekhin, *Phys.-Uspekhi* **57** (2014) 735.
42. F Cipolletta, C Cherubini, S Filippi, J A Rueda, and R. Ruffini, *Phys. Rev. D* **92** (2015) 023007.
14. G Baym, C Pethick, and P Sutherland, *Astroph. J.* **164** (1971) 569.
15. R N Manchester, G B Hobbs, A Teoh, and M Hobbs, *Astron. J.* **129** 4 (2005) 1993.
16. E Bavarsad, M Haghghat, and R Mohammadi, *Physical Review D* **82** 10 (2010) 105015.
17. D Lai and S L Shapiro, *Astrophys. J.* **383** (1991) 745.
18. A Broderick, M Prakash, and J M Lattimer, *Astrophys. J.* **537** (2000) 351.
19. A K Harding and D Lai, *Rep.Prog.Phys.* **69** 9 (2006) 2631.
20. A Broderick, M Prakash, and J M Lattimer, *Astrophys. J.* **537** (2000) 351.
21. S Chakrabarty, *Phys. Rev. D* **54** (1996) 1306.
22. S Chakrabarty, D. Bandyopadhyay, and S. Pal, *Phys. Rev. Lett.* **78** (1997) 2898.
23. A Rabhi, C Providência, and J Da Providencia, *J. Phys. G Nucl. Part. Phys.* **35** 12 (2008) 125201.
24. P Haensel, A Y Potekhin, and D G Yakovlev, "Neutron stars 1: Equation of state and structure", Springer Science & Business Media **326** (2007) .
25. P Yue and H Shen, *Phys. Rev. C* **74** 4 (2006) 045807.
26. R Brockmann, and H Toki, *Phys. Rev. Lett.* **68** (1992) 3408.
27. F de Jong, and H Lenske , *Phys. Rev. C* **57** (1998) 3099.
28. T Gaitanos, M D Toro, S Typel, V Baran, C Fuchs, V