بررسی برهان‌های ریاضیّاتی ابطال تسلسل بر اساس نظریّهٔ مجموعه‌ها

وحید خادم‌زاده*[1]ــ دکتر محمد سعیدی‌مهر[2]
[1]دانشجوی کارشناسی ارشد دانشگاه تربیت مدرس ـ [2]دانشیار دانشگاه تربیت مدرس
(تاریخ دریافت مقاله: ۱۳۸۸/۸/۱۸ـ تاریخ پذیرش نهایی: ۱۳۸۹/۱/۳۰)

چکیده

برخی از براهین ابطال تسلسل در فلسفهٔ اسلامی، مانند برهان تطبیق یا برهان آحاد و الوف، مبتنی بر مبانی و مقدّمات ریاضیّاتی‌اند. تحلیل و استخراج این مقدّمات پرده از ماهیّت ریاضیّاتی این برهان‌ها برمی‌دارد و نشان می‌دهد که در کنار روی‌کرد فلسفی به این براهین می‌باید از منظر ریاضیّات نیز به آن‌ها نگریست. با اتّخاذ این منظر، روشن می‌شود که شأن این براهین هم‌سنگ برخی پارادوکس‌هایی است که در ریاضیّات فراروی مفهوم **بی‌نهایت بزرگ** مطرح شده‌اند. با استفاده از نظریّهٔ مجموعه‌های کانتور، پارادوکس‌های مزبور حلّ شده و راه برای پذیرش نامتناهی ریاضیّاتی هموار گشته است. با توجّه به ماهیّت ریاضیّاتی براهین ابطال تسلسل، بهره‌گیری از نظریّهٔ مجموعه‌ها نشان می‌دهد که مبانی و مقدّمات ریاضیّاتی براهین مزبور قابل‌خدشه و، در نتیجه، از اثبات امتناع تسلسل ناتوان‌اند.

کلیدواژه‌ها: تسلسل، نامتناهی، وجود ریاضیّ، نظریّهٔ مجموعه‌ها، کانتور

طرح مسئله

معنای لغوی تسلسل این است که اموری، زنجیره‌وار، به دنبال هم واقع شوند، خواه حلقه‌های این زنجیره متناهی باشد، خواه نامتناهی، و خواه میان آن‌ها رابطهٔ علّی برقرار باشد، خواه نباشد (مصباح یزدی، ۷۹/۲). امّا در معنای فلسفی، تسلسل عبارت است از ترتّب یک شیء بر شیء دیگر و ترتّب شیء دوم بر سوم و شیء سوم بر چهارم و

* نویسنده مسؤول: تلفن: ۰۹۱۲۵۳۰۵۴۷۳ـ فاکس: ۰۲۱ـ۸۸۲۲۰۲۱۷ Email: v.khademzadeh@gmail.com

به‌همین‌سان تا بی‌نهایت، به‌گونه‌ای که این اشیا بالفعل و با هم موجود باشند، خواه از دو طرف یا از یک طرف استمرار یابد (طباطبائی، ۲۱۷).

فیلسوفان اسلامی تسلسل را، در معنای فلسفی آن، محال دانسته و شروط سه‌گانه‌ای را برای معرّفی تسلسل محال مطرح کرده‌اند. این شروط عبارت‌اند از ۱) فعلیّت اجزای سلسله، ۲) اجتماع اجزای سلسله در وجود، و ۳) ترتّب حقیقی میان اجزای سلسله (ابن سینا، *الشفاء*، الطبیعیّات، السماع الطبیعی، ۲۱۲). این شروط سبب خروج دسته‌ای از مجموعه‌های نامتناهی از تسلسل محال می‌گردند: شرط **فعلیّت** سبب خروج مجموعهٔ نامتناهی اعداد (عدم تناهی لایقفی)، شرط **اجتماع** سبب خروج سلسله‌های نامتناهی و متعاقب حوادث زمانی، و شرط **ترتّب** سبب خروج اموری همچون مجموعهٔ نفوس ناطقه (شیرازی، قطب‌الدین، ۱۷۸) یا مجموعهٔ فرشتگان و شیاطین (ابن‌سینا، *النجاة*، ۲۴۶) می‌شود. بنابراین، می‌توان گفت که در نگاه فیلسوفان اسلامی مجموعه‌های نامتناهی به‌طور مطلق محال نیستند.

فیلسوفان مسلمان ادلّهٔ بسیاری را برای اثبات استحالهٔ تسلسل اقامه کرده‌اند که گروهی از آن‌ها از مقدّمات ریاضی بهره می‌برند. حال پرسیدنی است که این براهین تا چه حدّ وامدار ریاضیّات‌اند؟ آیا می‌توان مفاهیم و اصول ریاضیّاتی این دسته از استدلال‌ها را صرفاً با روی‌کردی فلسفی بررسی کرد، یا آنکه می‌باید از همان آغاز ریاضیّات را داور قرار داد؟ آیا در حوزهٔ ریاضیّات استدلال‌هایی شبیه آنچه فیلسوفان ما در باب ابطال تسلسل ارائه کرده‌اند وجود دارد؟

مقالهٔ حاضر درصدد است که در تلاش برای پاسخ‌گویی به پرسشهای بالا تحلیل دقیق‌تری از آن دسته از براهین ویژهٔ ابطال تسلسل که حاوی مقدّمات ریاضیّاتی‌اند ارائه کند و سپس با مقایسهٔ روی‌کرد فلسفی و ریاضیّاتی نشان دهد که جایگاه این براهین در ریاضیّات هم‌پایهٔ پارادوکس‌هایی است که دربارهٔ مفهوم بی‌نهایت ریاضی شکل گرفته است و، از همین‌رو، در صورت قبول راه‌حلّ‌های ارائه‌شده برای آن پارادوکس‌ها این براهین نیز حجّیّت خود را از دست خواهند داد.[1]

۱. شایان ذکر است که سال‌ها پیش در مقاله‌ای با مشخّصات ذیل کوشش شده است که با توسّل به اصول ریاضیّات جدید برهان‌های ابطال تسلسل نقد شوند. مقالهٔ حاضر البتّه با نگاهی متفاوت و به‌صورت دقیق‌تر و جامع‌تر به این موضوع می‌پردازد: ⟵

براهین استحالهٔ تسلسلِ مبتنی بر مقدّمات ریاضی

در ابتدا به تحلیل چند نمونه از براهین ویژهٔ ابطال تسلسل که در آن‌ها از مقدّمات ریاضی استفاده شده است می‌پردازیم.

برهان تطبیق

سلسله‌ای نامتناهی از اشیای دارای ترتیب را فرض می‌کنیم به گونه‌ای که از یک جهت متناهی و از جهت دیگر نامتناهی باشد. این سلسله را **الف** می‌نامیم. آن‌گاه تعدادی متناهی از اعضای سلسله را از جهت متناهی سلسله کم می‌کنیم و نام سلسلهٔ حاصل را **ب** می‌گذاریم. سلسله‌های **الف** و **ب** را بر یکدیگر تطبیق می‌دهیم. حال اگر در این وضعیّت به ازای هر عضوی از سلسلهٔ **الف،** عضوی از سلسلهٔ **ب** موجود باشد کلّ و جزء مساوی خواهند بود که باطل است. و اگر پس از تطبیق، عضوی از سلسلهٔ **الف** یافت شودد که به ازای آن، عضوی از سلسلهٔ **ب** موجود نباشد، این امر مقتضی انقطاع سلسلهٔ **ب** و، در نتیجه، متناهی بودن آن است. حال با فرض متناهی بودن **ب،** سلسلهٔ **الف** نیز که برحسب فرض به تعدادی متناهی بیش‌از سلسلهٔ **ب** عضو دارد، متناهی خواهد بود. بنابراین، از تناهی سلسلهٔ **ب** تناهی سلسلهٔ **الف** حاصل می‌آید که خلاف فرض ما است (نکـ : ابن‌سینا، *الشفاء*، الطبیعیّات، السماع الطبیعی، ۲۱۲؛ رازی، ۴۷۷/۱؛ سبزواری، ۴۵۰/۲ـ۴۵۱، زنوزی، ۳۲-۳۶).

برهان آحاد و الوف

اگر سلسله و یا مجموعه‌ای نامتناهی از علّت‌ها و معلول‌ها، و یا غیر از آن، موجود باشد ناگزیر مشتمل بر دسته‌های هزارتایی از اجزا خواهد بود. سلسلهٔ اوّلیّه را **الف** و سلسله‌ای را که مشتمل بر دسته‌های هزارتایی است **ب** می‌نامیم، بدین‌گونه که هر عضو سلسلهٔ **ب** مجموعه‌ای مشتمل بر هزار عضو سلسلهٔ **الف** است. تعداد اعضای سلسلهٔ **ب** یا مساوی یا بیش‌تر و یا کم‌تر از تعداد اعضای سلسلهٔ **الف** است. امّا محال است که تعداد اعضای سلسلهٔ **ب** مساوی یا بیش‌تر از تعداد آحاد سلسلهٔ **الف** باشد، زیرا تعداد آحاد سلسلهٔ **الف**

لاریجانی، علی، «نقد و بررسی دلایل ابطال تسلسل»، *آموزگار جاوید: یادنامهٔ آیت‌اللّه العظمی حاج میرزا هاشم آملی (مجموعه مقالات)*، ویرایش: محسن صادقی، نشر مرصاد، قم، ۱۳۷۷.

می‌باید هزار بار بیش‌از تعداد اعضای سلسلهٔ **ب** باشد. از طرف دیگر، محال است که تعداد اعضای سلسلهٔ **ب** کم‌تر از تعداد آحاد سلسلهٔ **الف** باشد، زیرا در این هنگام آحاد سلسلهٔ **الف** مشتمل بر دو مجموعه خواهد بود: یکی به اندازهٔ تعداد اعضای سلسلهٔ **ب** و دیگری مقداری که زائد بر آن است. مجموعهٔ اوّل که به اندازهٔ تعداد اعضای سلسلهٔ **ب** است، یا در طرف متناهی سلسلهٔ **الف** و یا در طرف غیرمتناهی آن است. اما در هر دو حالت، تناهی سلسلهٔ **الف** لازم می‌آید که خلاف فرض است. هم‌چنین اگر سلسله از هر دو طرف نامتناهی باشد، می‌توان مقطعی را برای آن فرض گرفت تا طرف متناهی حاصل آید، سپس استدلال را ادامه داد. اما لزوم تناهی در فرض اوّل بدین علّت است که تعداد اعضای سلسلهٔ **ب** متناهی است، زیرا محصور بین دو حاصر است. یکی از دو حاصرْ طرف سلسله است و دیگری مقطعی است که مبدأ مجموعهٔ دوم، یعنی مجموعهٔ زائد بر تعداد اعضای سلسلهٔ **ب**، در آن فرض شده است. و هرگاه سلسلهٔ **ب** متناهی باشد، سلسلهٔ **الف** نیز متناهی خواهد بود، زیرا سلسلهٔ **الف** مشتمل بر مجموع آحادی است که دسته‌های هزارتایی در سلسلهٔ **ب** از آن‌ها تألیف یافته‌اند و سلسله‌ای که از سلسله‌هایی که اعداد و آحادشان متناهی است تألیف یافته باشد ضرورتاً متناهی است.

امّا در فرض دوم، مجموعه‌ای که همان مقدار زائد بر تعداد اعضای سلسلهٔ **ب** است در طرف متناهی واقع می‌گردد و این مجموعه به سبب انحصارش بین طرف سلسلهٔ **الف** و مبدأ سلسلهٔ **ب** ضرورتاً متناهی است. آحاد این مجموعهٔ زائد نهصد و نود و نه بار بیش از تعداد اعضای سلسلهٔ **ب** است. بنابراین، در این هنگام تناهی سلسلهٔ **ب** لازم می‌آید که خود مستلزم تناهی سلسلهٔ **الف** به علّت تناهی تعداد و آحاد اجزایش است (نکـ : تفتازانی، ۱۲۹/۲ـ۱۳۱).

برهان قریب‌المأخذ به تضایف[۱]

این برهان (که از این پس برای اختصار آن را «برهان قریب‌المأخذ» می‌خوانیم) چنین تقریر می‌شود: سلسله‌ای غیرمتناهی از علّت‌ها و معلول‌ها را فرض می‌کنیم که از سوی عللْ نامتناهی باشد. معلول اخیر را حذف می‌کنیم. هر یک از آحاد سلسله که بعد از آن

۱. این برهان تفاوت چندانی با برهان تضایف ندارد و تنها به سبب شباهت نحوهٔ تقریرش با دیگر برهان‌های مطرح در این مقاله مورد استفاده قرار گرفته است.

قرار دارد به دو اعتبار مختلف متّصف به علّیّت و معلولیّت می‌گردند، زیرا حیثیّت علّیّت هر عضو سلسله غیر از حیثیّت معلولیّت آن عضو است. با تفکیک بین علّیّت و معلولیّت اعضای سلسله، دو مجموعه حاصل می‌شود که دارای تغایر اعتباری است. سلسلهٔ علل را **الف** و سلسلهٔ معلول‌ها را **ب** می‌نامیم. هنگام تطبیق بین این دو سلسله، وصف علّیّت بر معلولیّت زیادت می‌یابد و، به عبارت دیگر، تعداد اعضای سلسلهٔ **الف** بیش‌از تعداد اعضای سلسلهٔ **ب** خواهد بود، زیرا هر معلولی مسبوق به یک علّت است.

از طرف دیگر، هر علّت با معلول مختصّ به خود که در مرتبهٔ آن است منطبق نمی‌شود، بلکه با معلولی که علّت‌اش در مرتبهٔ مقدّم بر آن است منطبق می‌گردد. زیرا معلول اخیر که معروض علّیّت واقع نمی‌شود از دایرهٔ تطبیق خارج است. بنابراین، باید در سلسلهٔ علل یک علّت افزون بر معلول‌ها باشد، در غیر این صورت، سبقتی که هر علّت بر معلول خود دارد نقض می‌گردد. معنای زیادت مراتب علّیّت بر معلولیّت این است که علّتی در مجموعهٔ علل یافت می‌گردد که به ازایش معلولی وجود ندارد و لازمهٔ این موضوع انقطاع و متناهی بودن دو سلسله است (نکـ : شیرازی، صدرالدین، ۱۶۳/۲).

تفکیک مقدّمات ریاضیّاتی از فلسفی

در یک نگاه کلّی می‌توان الگویی مشترک میان براهین یادشده، یعنی برهان تطبیق، آحاد و الوف، و قریب المأخذ یافت. این مدل مشترک در قالب مقدّمات ذیل قابل ارایه است:

۱ـ فرض سلسلهٔ نامتناهی (مطلقاً یا سلسله‌ای از علل و معلول‌ها)؛

۲ـ بر اساس فرض بالا سلسله‌های **الف** و **ب** تعریف می‌شوند (به تعبیر دیگر، فرض سلسلهٔ نامتناهی مستلزم دو سلسلهٔ **الف** و **ب** است.)

۳ـ بنا بر حصر عقلی، سلسلهٔ **الف** نسبت به سلسلهٔ **ب** یا بزرگ‌تر یا کوچک‌تر یا مساوی است.

۴ـ محال است که سلسلهٔ **الف** نسبت به سلسلهٔ **ب** کوچک‌تر یا مساوی باشد.

۵ـ محال است که سلسلهٔ **الف** بزرگ‌تر از سلسلهٔ **ب** باشد.

نتیجه: ابطال فرض اوّلیّه

با بررسی هر یک از برهان‌های فوق، موارد به‌کارگیری مقدّمات ریاضی در آن‌ها روشن می‌شود. بر حسب قرارداد، مقدّمه‌ای را «مقدّمهٔ ریاضی» می‌نامیم که *صرفاً* حاوی مفاهیم یا / و اصول ریاضیّاتی باشد، در غیر این صورت، آن را فلسفی قلمداد می‌کنیم.

مقدّمهٔ اوّل: تعیین ریاضی یا فلسفی بودن این مقدّمه بستگی کاملی به محتوای مقدّمات دیگر برهان دارد، زیرا آنچه در این مقدّمه واقعاً مفروض است مرتبط با آن چیزی است که در مقدّمات دیگر برهان (مقدّمه‌های چهارم و پنجم) در پی ابطال آن هستیم. بنابراین، صرف ذکر بعضی از قیود در عبارت‌پردازی این مقدّمه نمی‌تواند به معنای این باشد که این قیود حقیقتاً جزء فرض برهان‌اند. به‌عنوان مثال، گاه در تقریرهایی که از براهین سه‌گانهٔ بالا ارائه می‌گردد، وجود سلسله‌ای نامتناهی که میان اعضای آن *رابطهٔ علیت* برقرار است، فرض گرفته می‌شود. اما باید توجّه کرد که اخذ رابطهٔ علیت در این فرض همواره لازم نیست، بلکه در غالب موارد قید زائدی است که در پیش‌برد برهان نقشی ندارد. به عبارت دیگر، تنها زمانی می‌توان قید وجود رابطهٔ علیت میان اعضای سلسلهٔ نامتناهی را بخشی از این فرض دانست که این قید حقیقتاً در سایر مقدّمات ملحوظ باشد.

همان‌گونه که در بررسی مقدّمات بعدی برهان‌های فوق روشن خواهد شد، قید «وجود رابطهٔ علیت» در برهان‌های تطبیق و آحاد و الوف جایگاهی ندارد و، به همین سبب، قید زائدی است که باید از برهان حذف گردد. امّا اخذ این قید در برهان قریب‌المأخذ لازم است. بنابراین، با توجّه به نحوهٔ به‌کارگیری مفروضات این مقدّمه در مقدّمات دیگر، می‌توان گفت که مقدّمهٔ اوّل در دو برهان نخست، مقدّمه‌ای ریاضیّاتی و در برهان سوم، مقدّمه‌ای فلسفی است.

مقدّمهٔ دوم: در برهان‌های تطبیق و آحاد و الوف، سلسلهٔ **الف** همان سلسلهٔ نامتناهی مفروض در مقدّمهٔ اوّل است و سلسلهٔ **ب** نیز با استفاده از سلسلهٔ **الف** تعریف می‌گردد؛ بدین ترتیب که در برهان تطبیق سلسلهٔ **ب** از حذف تعدادی متناهی از اعضای سلسلهٔ **الف** از جانب متناهی آن حاصل می‌گردد و در برهان آحاد و الوف نیز مجموعه‌های هزارتایی از اعضای سلسلهٔ **الف**، اعضای سلسلهٔ **ب** را تشکیل می‌دهند. فلسفی یا ریاضی بودن این مقدّمه با تعیین جایگاه مقدّمهٔ اوّل ارتباط مستقیم دارد. بنابراین، می‌توان گفت که مقدّمهٔ دوم در برهان‌های تطبیق و آحاد و الوف مقدّمه‌ای ریاضیّاتی است. در برهان قریب‌المأخذ سلسلهٔ علّت‌ها را **الف** و سلسلهٔ معلول‌ها را **ب** می‌نامیم. بنابراین، مقدّمهٔ دوم در این برهان مقدّمه‌ای فلسفی است.

مقدّمهٔ سوم: مفاهیم «بزرگ‌تر»، «کوچک‌تر»، و «مساوی» تنها در حوزهٔ کمّیات معنا می‌یابند. فیلسوفان اسلامی نیز مساوات و عدم مساوات را از اعراض خاصّ کمّیّات

می‌دانند که به سبب امور کمّی بر اشیای دیگر عارض می‌شوند (شیرازی، صدرالدین، ۸/۴). بنابراین، مقدّمهٔ سوم مقدّمه‌ای ریاضیّاتی است.

مقدّمهٔ چهارم: این مقدّمه (به‌همراه مقدّمهٔ پنجم) در تعیین سرنوشت برهان جایگاه خاصّی دارد. در واقع، می‌توان گفت که مقدّمه‌های چهارم و پنجم هستند که ریاضی یا فلسفی بودن برهان را مشخّص می‌کنند. این امر را می‌باید با نظر به ادلّه‌ای که در ضمن برهان (به‌عنوان استدلال‌های فرعی) برای اثبات این مقدّمه به‌کار گرفته می‌شوند تعیین کرد.

در برهان‌های تطبیق و آحاد و الوف با استفاده از بخش ریاضیّاتی تعاریف مقدمهٔ دوم، نقصان و تساوی سلسلهٔ **الف** نسبت به سلسلهٔ **ب** تکذیب می‌شود. در برهان تطبیق با استفاده از این گزاره که «تساوی کلّ و جزء محال است»، تساوی سلسلهٔ **الف** و **ب** ابطال می‌گردد و استحالهٔ نقصان سلسلهٔ **الف** نسبت به **ب** بدیهی تلقی می‌شود. هم‌چنین در برهان آحاد و الوف برپایهٔ گزارهٔ «آحاد سلسلهٔ **الف** واجب است که هزار بار بیش‌از تعداد اعضای سلسلهٔ **ب** باشد» نقصان و تساوی سلسلهٔ **الف** نسبت به **ب** تکذیب می‌گردد. بنابراین، با نظر به محتوای این استدلال‌های فرعی، مقدّمهٔ چهارم در برهان‌های تطبیق و آحاد و الوف کاملاً ریاضیّاتی است.

در برهان قریب‌المأخذ با این بیان که «در غیر این صورت، سبقتی که هر علّت بر معلول خود دارد نقض می‌گردد»، نقصان و تساوی سلسلهٔ **الف** نسبت به **ب** ابطال می‌گردد. هرچند این استدلال استدلالی فلسفی است، مبتنی بر یک مقدّمهٔ ریاضیّاتی است که می‌تواند مورد اعتراض قرار گیرد. در واقع، تنها زمانی می‌توان این استدلال فلسفی را پذیرفت که تساوی دو سلسله را برابری اعضای دو سلسله معنا کنیم. در حالی که نشان داده خواهد شد که این معنا از تساوی در سلسله‌های نامتناهی قابل حصول نیست. به‌کارگیری مبنایی فلسفی در مقدّمهٔ چهارم برهان قریب‌المأخذ و استفاده از روابط علّی و معلولی در این مقدمه است که سبب می‌شود استفاده از قید «رابطهٔ علّیّت میان اعضای سلسله» در مقدمهٔ اوّل مجاز گردد.

مقدّمهٔ پنجم: می‌توان گفت که این مقدّمه در تمام براهین سه‌گانهٔ مذکور دارای محتوایی یکسان است. این مقدّمه بدین صورت تقریر می‌گردد که از زیادت سلسلهٔ **الف** نسبت به سلسلهٔ **ب**، تناهی سلسلهٔ **ب** لازم می‌آید و با توجّه به تعاریف مطرح‌شده در مقدّمهٔ دوم، از تناهی سلسلهٔ **ب**، تناهی سلسلهٔ **الف** اثبات می‌گردد که این امر خلاف

فرض اوّلیّه است. اثبات این مدّعا که زیادت سلسلهٔ **الف** نسبت به سلسلهٔ **ب** مستلزم تناهی سلسلهٔ **ب** است با استفاده از اصل «محصور بین دو حاصر متناهی است» میسّر می‌گردد. جواز توسّل به این اصل در این‌جا منوط به آن است که نقصان یک سلسله نسبت به دیگری را به معنای انقطاع سلسلهٔ ناقص محسوب کنیم. بنابراین، می‌توان گفت که استدلال مطرح‌شده در مقدمهٔ پنجمِ هر یک از براهین سه‌گانهٔ فوق کاملاً ریاضیّاتی است.

در این‌جا لازم است بر این امر تأکید شود که گزاره‌هایی هم‌چون «کلّ از جزء بزرگ‌تر است»، «محصور بین دو حاصر متناهی است» که در متون فلسفی ما زیاد مورد استفاده قرار گرفته‌اند، گزاره‌هایی ریاضیّاتی‌اند. این گزاره‌ها اوّلاً و بالذات در مورد کمّیّات جاری می‌شوند و کاربرد آن‌ها در موارد دیگر ثانیاً و بالعرض (یعنی از آن جهت که معروض کمّیّت واقع می‌شوند) است.

همان‌گونه که مشاهده می‌شود مقدّمات چهارم و پنجم در براهین تطبیق و آحاد و الوف تنها برپایهٔ مفاهیم و قواعد ریاضیّاتی استوار گردیده‌اند. از آن‌جا که ابطال لوازم سلسلهٔ نامتناهی مفروض تماماً در این دو مقدّمه انجام می‌شود، می‌توان نتیجه گرفت که این دو برهان تنها بر پایهٔ اصول ریاضیّاتی تقریر شده‌اند. این امر سبب می‌گردد که ابهام مطرح‌شده در مقدّمات اوّل و دوم نیز مرتفع گردد. بدین ترتیب می‌توان گفت که مقدّمات اوّل و دوم در این دو برهان نیز کاملاً ریاضیّاتی‌اند. امّا مقدّمهٔ چهارم در برهان قریب‌المأخذ حاوی یک استدلال فلسفی است که برپایهٔ یک مقدّمهٔ ریاضیّاتی بنا شده است و مقدّمهٔ پنجم نیز در این برهان یک استدلال ریاضیّاتی را در برمی‌گیرد. بنابراین، برهان قریب‌المأخذ را می‌توان یک برهان فلسفی دانست که در آن از مقدّمات ریاضیّاتی نیز استفاده شده است.

ممکن است گفته شود: در براهینی که آنها را استدلال‌های ریاضیّاتی دانستیم، به هر حال، بحث بر سر **وجود** (یا عدم) سلسله‌های نامتناهی است (هرچند صریحاً ذکری از واژهٔ «وجود» به میان نیاید)، و از آن‌جا که وجود یک مفهوم فلسفی است، براهین مزبور نمی‌توانند ریاضیّاتی باشند. در پاسخ به این استدلال می‌توان گفت که حتّی اگر بپذیریم که در این استدلال‌ها با **وجود** سلسله‌ها سروکار داریم، ظاهراً به‌راحتی می‌توانیم در این براهین سلسله را به‌مثابهٔ یک مفهوم ریاضی صرف تلقّی می‌کنیم و، در نتیجه، سخن‌گفتن از وجودِ یک سلسله، سخن‌گفتن از نحوهٔ وجود یک هویّت یا شیء ریاضیاتی

خواهد بود. این نحوه از وجود را «وجود ریاضی» در مقابل «وجود فلسفی» می‌نامیم. مناسب است اندکی دربارهٔ وجود ریاضی بحث کنیم.

وجود ریاضی

این پرسش که واژهٔ «وجود» در باب اشیای ریاضی حاوی چه معنایی است یکی از مهم‌ترین مسائل مطرح‌شده در فلسفهٔ ریاضی است. این موضوع با مبحث صدق در ریاضیّات پیوند نزدیکی دارد. در این باب مکاتب مختلفی به وجود آمده‌اند که در یک نگاه کلّی می‌توان آن‌ها را در دو دیدگاه عمده دسته‌بندی کرد: مکاتب افلاطون‌گرو[1] یا واقع‌گرو[2] و مکاتب مخالف افلاطون‌گروی. افلاطون معتقد بود که اشیای ریاضی حقایقی ازلی و ابدی‌اند که در عالم مخصوص به خود وجود دارند؛ عالمی که میان عالم مُثُل و عالم طبیعت قرار دارد. افلاطون‌گروان معاصر نیز با الهام از افلاطون معتقدند که اشیای ریاضی واقعی‌اند و وجودشان مستقلّ از آگاهی ما نسبت به آن‌ها است. این اشیا فیزیکی یا مادّی نیستند بلکه **انتزاعی**[3] اند و خارج از حوزهٔ مکان و زمان قرار دارند. آن‌ها ازلی اند؛ ما آن‌ها را نمی‌سازیم بلکه کشف می‌کنیم. بنابراین، یک جملهٔ معنادار در مورد یک شیء ریاضی یا صادق و یا کاذب است؛ چه ما آن را بدانیم و چه ندانیم (Hersh, p.138). تا به حال قرائت‌های گوناگونی از افلاطون‌گروی ارائه شده است که هر کدام از آن‌ها سعی در ارائهٔ راه‌حلّی در جهت حلّ اشکالات وارد بر افلاطون‌گروی کرده‌اند. یکی از مکاتبی که ملهم از افلاطون‌گروی است و اشیای ریاضی را مستقلّ از ذهن، زبان، و جامعهٔ انسانی می‌داند، ساختارگروی[4] است (Shapiro, p.257).

امّا در میان مکاتب مخالف افلاطون‌گروی، صورت‌گروی[5] از جایگاه خاصّی برخوردار است. صورت‌گروان معتقدند که اشیای ریاضی دارای وجود واقعی نیستند. ریاضیّات مجموعه‌ای از اصول موضوع (آکسیوم‌ها)، تعاریف، تئوری‌ها و، به‌طور خلاصه، فرمول‌ها

1. Platonist
2. Realist
۳. در باب اصطلاح «انتزاعی» باید به این نکته توجّه کرد که می‌تواند دارای دو معنای مختلف باشد؛ معنایی کـه در گذشته از آن برداشت می‌شد ارتباط با مبحث کلّی و جزئی داشت. در این دیدگاه، یک امر کلی مانند «قرمـزی» از امر جزئی مانند سیب‌های قرمز جزئی، سنگ‌های قرمز جزئی، و خون قرمز جزئی انتـزاع یافتـه اسـت. امـا در این‌جا «انتزاعی» به معنای خارج از حوزهٔ مکان و زمان است (Brown, p.13).
4. Structuralism
5. Formalism

است. قواعدی برای استخراج یک فرمول از فرمول‌های دیگر وجود دارد، امّا فرمول‌ها دربارهٔ اشیای واقعی نیستند بلکه زنجیره‌هایی از نمادهای بی‌معنایند که نمی‌توان آنها را صادق یا کاذب دانست. البتّه زمانی که یک فرمول، مثلاً در علم فیزیک، به‌کار گرفته می‌شود، دارای معنا می‌گردد و می‌تواند صادق یا کاذب باشد. با این حال، صدق وکذب تنها به آن تفسیر فیزیکی که از فرمول ارائه می‌گردد، مربوط می‌شود (Hersh, p.139). در صورت‌گروی تنها می‌توان از **سازگاری** یک شیء ریاضی در علم ریاضیّات سخن گفت. در این مکتب «وجود داشتن» تبدیل به اصطلاحی تکنیکی می‌گردد و می‌توان آن را مساوق با سازگاری منطقی دانست. به قول کانتور، هر آنچه سازگار است وجود دارد (Kaplan, p.258). سازگاری یک شیء نیز در یک ساختار خاصّ معنا می‌یابد. بنابراین، وجود یک شئ خاصّ می‌تواند در یک ساختارْ محال و در ساختار دیگری ممکن باشد (Phillip).

صورت‌گروان و افلاطون‌گروان، هرچند در باب مسئلهٔ وجود و حقیقت با هم اختلاف دارند، در مورد اصول برهان ریاضی[1] با هم اختلافی ندارند (Hersh, p.139). از همین‌رو، عدّه‌ای از افلاطون‌گروان سازگاری صرف را برای پذیرش یک نظریّهٔ ریاضی کافی می‌دانند. اینان تلاش می‌کنند تا این پرسش را که چگونه می‌توانیم به اشیای انتزاعی ریاضی علم پیدا کنیم به این پرسش که چگونه می‌توانیم بدانیم که تعدادی از جملات و نظریّه‌های ریاضیّاتی سازگارند تبدیل کنند (Balaguer, p.74). امّا عدّه‌ای دیگر، هرچند سازگاری را شرط لازم برای این نحو از وجود می‌دانند، کفایت این شرط را در همهٔ موارد مورد تردید قرار می دهند (Hunter).

از دیگر مکاتب مخالف افلاطون‌گروی می‌توان به شهودگروی[2] و ساخت‌گروی[3] اشاره کرد. این مکاتب به این دلیل که دارای مبادی مغایر با دیدگاه عمومی‌اند، هیچ‌گاه تبدیل به یک جریان مؤثّر در جامعهٔ ریاضیدانان نشدند (Hersh, p.157). شهودگروان قانون طرد شقّ ثالث را نمی‌پذیرند (ibid, p.154). از نظر آنان، سازگاری صرف نمی‌تواند هیچ کمکی به درک ریاضیّاتی کند (Moore, p.132). ساخت‌گرایی نیز ملهم از شهودگروی است امّا از شهودگروی به درک عمومی از ریاضیّات نزدیک‌تر است. با این حال،

1. Mathematical proof
2. Intuitionism
3. Constructivism

ساخت‌گرایی نیز قانون طرد شقّ ثالث را در مورد مجموعه‌های نامتناهی نمی‌پذیرد (Hersh, p.157). از همین‌رو، ما نیز از بررسی این مکاتب صرف نظر می‌کنیم.

امروزه واقع‌گروی و صورت‌گروی جریان‌های غالب در حوزهٔ ریاضیّات را تشکیل می‌دهند. هر کدام از این مکاتب در معرض نقدها و اشکالات گوناگون قرار گرفته است. از طرف دیگر، هیچ کدام از این مکاتب را نمی‌توان منطبق بر نظرات فیلسوفان اسلامی دانست. در این مقاله در صدد بررسی حقّانیت این مکاتب فلسفهٔ ریاضی و یا نسبت آنان با نظرات فیلسوفان اسلامی نیستیم، بلکه تنها در پی آن‌ایم که مغایرت میان وجود ریاضی و وجود فلسفی را روشن سازیم تا از خلط میان آن دو جلوگیری شود. در صورت‌گروی، «وجود» تبدیل به اصطلاحی تکنیکی می‌گردد و فاقد معنای هستی‌شناختی[۱] است، امّا در نظر واقع‌گروان «وجود» معنایی هستی‌شناختی به خود می‌گیرد و از لحاظ **معنایی** به «وجود» مورد نظر در فلسفه نزدیک می‌شود. با این حال، وجود به معنای مورد نظر واقع‌گروان، از حیث حیطه و گستره، خاص‌ّتر از وجود فلسفی است، چراکه تنها شامل هویّات انتزاعی می‌گردد. از همین‌رو، اگر وجود شیئی در عالم ریاضیّات اثبات گردد، نمی‌توان وجود این شیء را در بخش‌های دیگر هستی بدون توجیه پذیرفت.

روی‌کرد فلسفی و روی‌کرد ریاضیاتی به برهان‌های ابطال تسلسل

در بخش‌های قبل روشن شد که برهان‌های تطبیق و آحاد و الوف برهان‌هایی صرفاً ریاضیّاتی‌اند. این دسته از براهین، بر فرض درستی، اثبات می‌کنند که برپایهٔ ساختار ریاضیّاتیِ مورد پذیرش فیلسوفان اسلامی، مجموعهٔ نامتناهی امری ناسازگار و محال است. نتیجه‌ای که فیلسوفان ما از این براهین طلب می‌کنند اثبات استحالهٔ وجود سلسلهٔ نامتناهی است که اعضایش مجتمع‌الوجود و مترتّب باشند. بدین ترتیب، وجودی که در این برهان‌ها بر استحالهٔ تسلسل در آن استدلال می‌شود، وجود **حدّاکثری** فلسفی[۲] است؛

1. Ontological

۲. مقصود ما از وجود حدّاکثری، در این‌جا، مفهومی از وجود است کـه مـصادیق آن فـی‌الجمله شـامل دو بخـش هویّات انتزاعی و هویات انضمامی می‌گردد. و مقصود از وجود حدّاقلی مفهومی اسـت کـه تنهـا شـامل هویـات انتزاعی می‌گردد. هرچند آنچه فیلسوفان معاصر از هویّت یا شیء انتزاعی اراده می‌کنند با مفهوم وجود مجرّد در نظر فیلسوفان مسلمان تفاوت دارد، با قدری تسامح می‌توان دو اصطلاح «حداکثری» و «حداقلی» را، بـه ترتیـب، بر وجود نزد فیلسوفان مسلمان و وجود نزد ریاضی‌دانان واقع‌گرَوْ اطلاق کرد.

بدین معنا که بخشی از اعضای سلسلهٔ مفروض می‌توانند به عالم محسوسات و بخش دیگر به عالم مجرّدات متعلّق باشند. در حالی که از منظر یک ریاضی‌دان حدّاکثر چیزی که در این براهین قابل ابطال است، وجود **حدّاقلی** سلسلهٔ نامتناهی است، یعنی وجود این سلسله به‌عنوان مجموعه‌ای از هویّات انتزاعی.

از سوی دیگر، شکّی نیست که تناهی و عدم تناهی، اوّلاً و بالذات، مختصّ کمّیّات‌اند و به امور دیگر ثانیاً و بالعرض اطلاق می‌گردند (ابن‌سینا، *الإشارات*، ۱۷۵). ریاضیّات نیز، بر اساس دیدگاه فیلسوفان مسلمان، علمی است که در آن از عوارض ذاتی کمّیّات سخن گفته می‌شود. بنابراین، استفاده از مفهوم **نامتناهی** برای توصیف جهان خارج، تنها زمانی مجاز است که این مفهوم در ریاضیّات به‌عنوان یک مفهوم سازگار با دیگر مفاهیم ریاضیّاتی پذیرفته شود و اگر وجود ریاضی نامتناهی در ریاضیات انکار گردد، دیگر نمی‌توان از این مفهوم در هیچ علم دیگری، از جمله فلسفه، استفاده کرد.

ظاهراً برخی مخالفان برهان‌های ریاضیّاتیِ ابطال تسلسل به همین نکته توجّه داشته‌اند. برای مثال، مخالفان برهان تطبیق در جهت نقض اصل برهان گفته‌اند که اگر این برهان صادق باشد، می‌توان به وسیلهٔ آن، تناهی سلسلهٔ اعداد، مقدورات، و معلومات الاهی، نفوس انسانی، و حرکات فلکی را اثبات کرد (شیرازی، صدرالدین، ۱۴۵/۲). این اشکال را می‌توان بر همهٔ برهان‌های ریاضیّاتی وارد کرد. در واقع، باید گفت که اشکال فوق به‌طور ضمنی حاوی این نکته است که برهان‌های ریاضیّاتی، به فرض پذیرش، وجود هرگونه نامتناهی را در فلسفه ناممکن می‌سازند. مدافعان برهان تطبیق نیز در مقام پاسخ به این اشکال می‌گویند که این موارد (سلسلهٔ اعداد، مقدورات و معلومات الاهی، و ...) دارای شروط سه‌گانهٔ تسلسل محال نیستند و، بنابراین، این برهان در مورد آن‌ها صادق نیست (همو، ۱۴۷/۲). این جواب با توجّه به تحلیلی که قبلاً از برهان تطبیق به‌همراه دیگر برهان‌های ریاضی ارائه شد، پذیرفتنی نیست. زیرا شروط سه‌گانهٔ فوق حاوی معنای فلسفی هستند، درحالی‌که برهان‌های مزبور کاملاً ریاضی‌اند. به عبارت دیگر، واژهٔ «وجود» که در دو شرط از شروط تسلسل محال اخذ می‌گردد، وجود حداکثری فلسفی است، ولی برهان‌های ریاضیّاتی در بهترین حالت از وجود حدّاقلی بهره می‌برند. نکتهٔ قابل توجّه آن است که با اتّخاذ روی‌کردی ریاضیّاتی چه بسا ادّعا شود که شرط دوم و سوم تسلسل (یعنی فعلیّت اعضای سلسله و اجتماع در وجود) در موارد مورد بحث نیز صادق‌اند. همان‌گونه که اشاره شد، در نظر واقع‌گروان، اعداد خود از جملهٔ

اشیای ریاضی‌اند (هویات انتزاعی) که به صورت بالفعل و مجتمع در عالم مخصوص خود موجودند. این ادّعای فیلسوفان مسلمان که سلسلهٔ اعداد همگی فعلیّت نیافته‌اند و همیشه تعدادی متناهی از آن‌ها موجودند در واقع خلط میان عدد و معدود است که از این باور سرچشمه گرفته است که اعداد عرض خارجی معدوداتاند (ابن‌سینا، *الالهیّات من کتاب الشفاء*، ۱۲۶). در باب امور خارج از عالم ریاضیّات، همانند حرکات فلکی، مقدورات و معلومات الاهی، و نفوس بشری نیز باید گفت که زمانی ما می‌توانیم از تناهی و عدم تناهی چنین اموری بحث کنیم که معروض کمّیّات قرار گیرند یا، به عبارت بهتر، تفسیری کمّی از آن‌ها ارائه شود. در این صورت، تناهی هر یک از این سلسله‌ها بدین معنا خواهد بود که فرایند شمارش در مورد آن پایان می‌پذیرد و عدم تناهی آن‌ها بدین معنا است که فرایند شمارش در مورد آن پایان‌ناپذیر است. بنابراین، از منظر ریاضیّات، برهان‌های ریاضیّاتیِ ابطال تسلسل، در صورت توفیق، اثبات می‌کنند که عمل شمارش که عملی کاملاً ریاضیّاتی است، فارغ از ماهیّت اشیای مورد شمارش و نحوهٔ وجودشان، نمی‌تواند به صورت نامتناهی واقع شود. زیرا فرض سلسله‌ای نامتناهی از اعدادی که در فرایند شمارش مورد استفاده قرارگیرند، ناسازگار است.

مسئلهٔ نامتناهی در ریاضیّات

در بخش قبلی روشن گردید که اگر برهان‌های ریاضیّاتی مذکور مورد پذیرش قرار گیرند، دیگر نمی‌توان از مفهوم نامتناهی در هیچ علمی، از جمله فلسفه، استفاده کرد. حال باید درستی این برهان‌ها را مورد بررسی قرار داد. از آن‌جا که این برهان‌ها در قلمرو ریاضیّات مطرح شده‌اند، لازم است که مفهوم نامتناهی را با نگاهی دقیق‌تر در ریاضیّات بررسی کنیم.

یکی از مهم‌ترین مسائل مربوط به مفهوم نامتناهی این است که آیا با توجّه به این که هرگونه تلاش برای تعریف نامتناهی مستلزم محدود یا مشروط کردن آن است، اساساً می‌توان این مفهوم را تعریف کرد؟ (Moore, p.1). این مسئله به ظهور پارادوکس‌هایی انجامیده است. در قرن هفدهم نیوتن و لایبنیتز با مشکل مفهوم **بی‌نهایت کوچک**[1] روبه‌رو شدند که نتیجهٔ آن ابداع حساب دیفرانسیل در علم ریاضیّات

1. Infinitesimal or infinitely small

بود (see: Lavine, pp.15-22). سال‌ها بعد و در قرن نوزدهم، کانتور به بررسی پارادوکس‌های مربوط به مفهوم **بی‌نهایت بزرگ**[1] پرداخت و نظریّهٔ مجموعه‌ها را پایه‌ریزی کرد. تمایز میان بی‌نهایت کوچک و بینهایت بزرگ رجوع به تمایزی دارد که ارسطو اولین بار میان **بی‌نهایت به‌وسیلهٔ تقسیم** و **بی‌نهایت به‌وسیلهٔ افزودن** مطرح کرد (Moore, p.3). در واقع، تسلسل یکی از اقسام بی‌نهایت بزرگ محسوب می‌شود. حال به ارائهٔ تعدادی از پارادوکس‌هایی که پیرامون مفهوم بی‌نهایت بزرگ مطرح می‌شود می‌پردازیم:

پارادوکس گالیله

اگر مجموعهٔ اعداد طبیعی را فهرست کنیم، سلسله‌ای نامتناهی حاصل می‌گردد. اگر در این امر شک دارید می‌توانید عددی مفروض مانند B را به‌عنوان آخرین عدد این مجموعه در نظر بگیرید. آن‌گاه قادر خواهیم بود با اضافه کردن یک واحد به این عدد (B+1) عدد بزرگ‌تری بسازیم. در نتیجه، این سلسله نمی‌تواند متناهی باشد. حال به‌وسیلهٔ ضرب کردن هر عددی در خودش، مربّع آن عدد را می‌سازیم. مربّع‌های سلسلهٔ اعداد طبیعی را در سلسله‌ای دیگر مرتّب می‌سازیم و این دو سلسله را با هم مقایسه می‌کنیم:

number	→	square
1	→	1
2	→	4
3	→	9
4	→	16
5	→	25
6	→	36
7	→	49
8	→	64
9	→	81
10	→	100

. . . and so on forever . . .

از یک طرف، به نظر می‌رسد که این دو سلسله باید دارای اندازه‌ای برابر باشند، زیرا به ازای هر یک از اعضای سلسلهٔ اعداد طبیعی، عضوی از سلسلهٔ مربع‌ها موجود است. از طرف دیگر، مشاهده می‌شود که هر یک از اعداد سلسلهٔ مربّع‌ها در جایی از سلسلهٔ اعداد طبیعی یافت می‌گردد، ولی چنین نیست که هر یک از اعداد سلسلهٔ اعداد طبیعی در سلسلهٔ مربّع‌ها جای گیرند. به‌عنوان مثال، سه عضو نخست سلسلهٔ مربع‌ها، به‌ترتیب، به‌عنوان عضو اوّل، عضو چهارم، و عضو نهم سلسلهٔ اعداد طبیعی مشاهده می‌شوند، ولی عضو دوم و سوم سلسلهٔ اعداد طبیعی داخل

1. Infinitely big

در سلسلۀ مربّع‌ها قرار نمی‌گیرد. بنابراین، سلسلۀ اعداد طبیعی هم‌چنین باید بزرگ‌تر از سلسلۀ مربّع‌ها باشد (لازم می‌آید که سلسلۀ اعداد طبیعی نسبت به سلسلۀ مربّع‌ها هم مساوی باشد و هم بزرگ‌تر!) (Barrow, pp.55-59).

هتل هیلبرت[1]

فرض کنید هتلی با بی‌نهایت اتاق وجود دارد. هر کدام از اتاق‌های هتل توسّط یک مهمان اشغال شده است. در این هنگام، یک مهمان جدید وارد هتل می‌شود. به نظر می‌رسد که مهمان‌دار هتل باید از پذیرش این مهمان جدید صرف نظر کند. امّا با کمال تعجّب مشاهده می‌شود که مهمان‌دار با استقبالی گرم از مهمان جدید استقبال می‌کند. سپس او برای این‌که بتواند یک اتاق خالی در اختیار مهمان جدید بگذارد، از مهمان اتاق ۱ می‌خواهد به اتاق ۲ برود، و از مهمان اتاق ۲ می‌خواهد به اتاق ۳ برود، و از مهمان اتاق N می‌خواهد به اتاق (N+1) برود، و این عمل تا بی‌نهایت تکرار می‌شود. بدین ترتیب، او می‌تواند اتاق ۱ را برای مهمان جدید خالی کند، بدون آن‌که مهمان‌های قبلی را از هتل بیرون کند. حال اگر به این هتل به صورت ناگهانی بی‌نهایت مهمان جدید وارد شود. باز هم مهمان‌دار از ورود این مهمان‌های جدید دستپاچه نمی‌شود، بلکه برای استقرار آن‌ها در هتل، از مهمان اتاق ۱ می‌خواهد به اتاق ۲ برود و از مهمان اتاق ۲ می‌خواهد به اتاق ۴ برود و از مهمان اتاق ۳ می‌خواهد به اتاق ۶ برود و از مهمان اتاق N می‌خواهد به اتاق 2N برود. بدین ترتیب، تمام اتاق‌های فرد هتل خالی می‌گردد. حال بی‌نهایت اتاق خالی در اختیار مهمان‌دار است تا مهمان‌های جدید را مستقر سازد (Oppy, p.8).

تریسترام شاندی

فرض کنید تریسترام شاندی[2] در حال نگارش زندگی‌نامه‌اش است. امّا سرعت نگارش او بسیار پایین است، به‌گونه‌ای که برای نگارش خاطرات یک روز از زندگی‌اش به یک سال زمان نیازمند است. با این حال، به نظر می‌رسد که اگر او عمری ازلی می‌داشت و از گذشته‌ای نامتناهی نگارش زندگی‌نامه‌اش را شروع کرده بود، باید تا به امروز آن را به

1. Hilbert
2. Tristram Shandy

پایان می‌رساند. امّا از طرف دیگر، چنین به نظر می‌رسد که هیچ راهی برای موفّقیّت او در این امر وجود ندارد. زیرا برای به پایان رساندن این زندگی‌نامه، او باید در مورد آخرین روزی که این زندگی‌نامه را می‌نویسد نیز مطلبی بنویسد. در حالی که نگارش خاطرات همین یک روز نیز یک سال طول خواهد کشید (Ibid, p.9).

برهان‌ها و پارادوکس‌ها

مقایسۀ برهان‌های ریاضیّاتی ابطال تسلسل با پارادوکس‌های پیش‌گفته نشان از تشابه فراوان آن‌ها دارد. در برهان تطبیق و پارادوکس هتل هیلبرت دو مجموعۀ نامتناهی که یکی زیرمجموعۀ دیگری است با هم مقایسه می‌شوند، با این تفاوت که در برهان تطبیق تفاوت دو مجموعه به تعدادی متناهی است درحالی‌که در پارادوکس هیلبرت نشان داده می‌شود که اگر تفاوت دو مجموعه به تعدادی نامتناهی نیز باشد تفاوتی در نتیجه حاصل نمی‌شود. برهان آحاد و الوف و پارادوکس تریسترام شاندی نیز به مقایسۀ دو مجموعه می‌پردازند که اعضای یکی از آن دو را مجموعه‌هایی تشکیل می‌دهند که زیرمجموعه‌های متناهی مجموعۀ دیگرند، با این تفاوت که در برهان آحاد و الوف زیرمجموعه‌ها حاوی هزار عضو مجموعۀ دیگر است و در پارادوکس شاندی حاوی ۳۶۵ عضو است.

با این حال، نمی‌توان برهان‌ها و پارادوکس‌های مورد بحث را از هر جهت مشابه دانست. مهم‌ترین تفاوت این دو دسته به مقدّمۀ پنجم در برهان‌ها باز می‌گردد که می‌توان گفت در پارادوکس‌ها تقریباً وجود ندارد. به عبارت دیگر، برهان‌ها بر اساس یک حصر عقلی تقریر شده‌اند که مقدّمات چهارم و پنجم به ابطال شقوق این حصر عقلی می‌پردازند، امّا پارادوکس‌ها از باور و شهود عمومی کمک می‌گیرند، به‌گونه‌ای که نتایج حاصل از فرض وجود نامتناهی را در تعارض با باور عمومی قرار می‌دهند. امّا از آن‌جا که باور عمومی از تجربۀ امور متناهی شکل می‌گیرد، می‌تواند جایگزین مناسبی برای مقدّمۀ پنجم در پارادوکس‌ها باشد.

حال باید مبانی ریاضیّاتی را، که در برهان‌ها و پارادوکس‌ها سبب بروز تعارض با سلسلۀ نامتناهی مفروض می‌گردند، استخراج کنیم. با توجّه به استدلال‌های ارائه‌شده برای اثبات مقدّمه‌های چهارم و پنجم در برهان‌های مذکور می‌توان این مبانی را این‌گونه تقریر کرد: کلّ از جزء بزرگ‌تر است؛ تساوی دو سلسله به معنای برابری اعضای

دو سلسله است؛ زیادت یک سلسله نسبت به دیگری به معنای انقطاع سلسلهٔ ناقص است؛ محصور بین دو حاصر متناهی است.

اشکال مشهوری که برخی از فیلسوفان اسلامی بر برهان‌های مذکور وارد آورده‌اند بیان می‌دارد که احکام ریاضی همانند تساوی، بزرگ‌تری و کوچک‌تری مختصّ کمّیّت‌های متناهی است و نمی‌توان این امور را در باب کمّیّت‌های نامتناهی به‌کار برد (شیرازی، صدرالدین، ۱۶۵/۲). مفاد این اِشکال به‌عنوان یک راه‌حلّ برای پارادوکس‌های مذکور توسّط گالیله ارائه شده است (Kaplan, p.228). در این باب باید گفت که کاربست احکام تساوی، بزرگ‌تری و کوچک‌تری را در مورد امور نامتناهی به یک معنا مجاز و به معنای دیگر غیرمجاز است. در بخش بعدی مقاله این موضوع روشن می‌شود.

در بخش بعدی به بررسی راه‌حلّ کانتور برای پارادوکس‌های مورد بحث خواهیم پرداخت؛ راه‌حلّی که دریچه‌ای جدید را در مقابل ریاضی‌دانان گشود.

راه‌حلّ کانتور

کانتور نظریّهٔ مجموعه‌ها را برپایهٔ دو مفهوم ساده بنا کرد: مفهوم **مجموعه** و مفهوم **تناظر یک‌به‌یک**. مفهوم مجموعه بدیهی و بی‌نیاز از تعریف است. تناظر یک‌به‌یک نیز رابطه‌ای میان دو مجموعه است، به‌گونه‌ای که به ازای هر عضو از یک مجموعه، عضوی از مجموعهٔ دیگر قرار گیرد و اعضای دو مجموعه با یکدیگر جفت گردند (Moar, p.56). برای این‌که اهمّیّت مفهوم تناظر یک‌به‌یک مشخّص گردد باید به نحوهٔ مقایسهٔ دو مجموعه توجّه کنیم. اوّلین راهی که برای مقایسه میان اعضای دو مجموعه به ذهن می‌رسد شمارش اعضای دو مجموعه است. امّا این روش برای مجموعه‌های بزرگ متناهی کار دشواری است و در این موارد روش جفت کردن یا تطبیق روش مناسب‌تری به نظر می‌رسد. به‌عنوان مثال، برای مقایسهٔ تعداد صندلی‌های موجود در یک سالن سینما و تعداد تماشاگرانی که برای مشاهدهٔ فیلم داخل سالن آمده‌اند بهتر است، به جای شمارش صندلی‌ها و تماشاگران، از تماشاگران خواسته شود که بر روی صندلی‌ها بنشینند. از این طریق به‌راحتی می‌توان زیادت، نقصان، و یا تساوی مجموعهٔ صندلی‌ها نسبت به مجموعهٔ تماشاگران را تشخیص داد. بی‌تردید، روش شمارش اعضا برای مجموعه‌های نامتناهی غیرممکن است، زیرا مشخّصهٔ اصلی این مجموعه‌ها این است که شمارش همهٔ اعضایشان غیرممکن است. امّا روش جفت کردن و تطبیقِ یک‌به‌یک نیازی

به دانستن یا شمردن تعداد اعضای دو مجموعه ندارد و به همین سبب می‌توان آن را در مورد دو مجموعۀ نامتناهی به کار گرفت (Guillen, p.43).

شایان ذکر است که با اتّخاذ روش جفت کردن، معنای تساوی، و به تبع آن، معنای زیادت و نقصان دو مجموعه نسبت به یکدیگر تغییر خواهد یافت؛ بدین گونه که دو مجموعه تنها در صورتی با هم برابرند که میان اعضای آن‌ها بتوان تناظر یک‌به‌یک برقرارکرد (Vilenkin, p.49).[1]

کانتور برای تفکیک مباحث مجموعه‌های متناهی و نامتناهی، مفهوم عدد اصلی یا عدد کاردینال[2] را وارد نظریّه‌های خود کرد. واژۀ «کاردینالیته»[3] در باب مجموعه‌های نامتناهی معادل واژۀ «تعداد اعضا» در مورد مجموعه‌های متناهی است (ibid, p.50). بنابراین، هرگاه میان اعضای دو مجموعه تناظر یک‌به‌یک برقرار گردد، به اصطلاح ریاضی‌دانان، این دو مجموعه دارای عدد کاردینال یکسان هستند (Kaplan, p.232).

اصل اقلیدوسی «کلّ از جزء بزرگتر است» را، هرچند در باب مجموعه‌های متناهی صادق است، نمی‌توان در مورد مجموعه‌های نامتناهی به‌کار برد. زیرا میان یک مجموعۀ نامتناهی و زیرمجموعۀ نامتناهی‌اش می‌توان تناظر یک‌به‌یک برقرار کرد. به‌عنوان مثال، میان مجموعۀ اعداد طبیعی و مجموعۀ اعداد زوج طبیعی تناظر یک‌به‌یک برقرار است (Vilenkin, p.50).

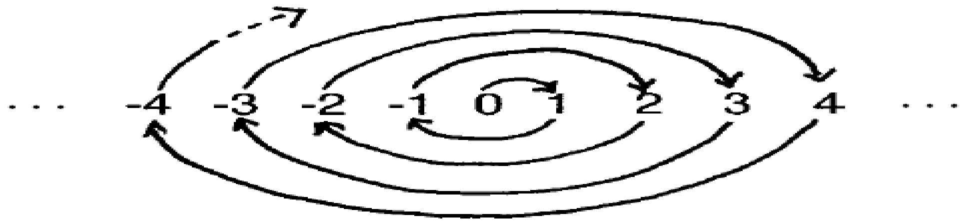
کانتور افزون بر این‌که نشان داد تمام زیرمجموعه‌های نامتناهی اعداد طبیعی دارای عدد کاردینال یکسان با مجموعۀ اعداد طبیعی هستند، به مقایسۀ انواع دیگر اعداد با اعداد طبیعی پرداخت. اعداد صحیح، برخلاف اعداد طبیعی، شامل اعداد منفی نیز می‌گردند. بنابراین مجموعۀ اعداد صحیح از دو جهت نامتناهی است. از این‌رو، در نگاه نخست به نظر می‌رسد که مجموعۀ اعداد صحیح بزرگ‌تر از مجموعۀ اعداد طبیعی است. امّا کانتور نشان داد که میان مجموعۀ اعداد طبیعی و مجموعۀ اعداد صحیح تناظر یک‌به‌یک برقرار است. به همین سبب این دو مجموعه دارای کاردینال‌های یکسان‌اند. کانتور برای نشان دادن این تناظر از روش زیر بهره برد:

---

۱. لازم به تذکّر است که در میان اندیشمندان مسلمان کسانی هم‌چون تفتازانی این معنا از تساوی را مورد توجّه قرار داده و آن را در مورد مجموعه‌های نامتناهی جایز دانسته‌اند (تفتازانی، ۱۲۹/۲-۱۳۱).

2. Cardinal number

3. Cardinality



حال میان اعضای دو مجموعه تناظر برقرار می‌کنیم:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & & \mathbb{Z} \\ 1 & \leftrightarrow & 0 \\ 2 & \leftrightarrow & 1 \\ 3 & \leftrightarrow & -1 \\ 4 & \leftrightarrow & 2 \\ 5 & \leftrightarrow & -2 \\ 6 & \leftrightarrow & 3 \\ 7 & \leftrightarrow & -3 \\ . & . & . \\ . & . & . \end{array}$$

کانتور با روش مشابهی نشان داد که میان مجموعهٔ اعداد طبیعی و مجموعهٔ اعداد گویا تناظر یک‌به‌یک برقرار است و دارای اعداد کاردینال یکسان هستند.

ممکن است به نظر برسد که با استفاده از این روش می‌توان هر مجموعهٔ نامتناهی را در تناظر یک‌به‌یک با مجموعهٔ اعداد طبیعی قرار داد. امّا کانتور نشان می‌دهد که مجموعهٔ اعداد حقیقی را نمی‌توان در تناظر یک‌به‌یک با مجموعهٔ اعداد طبیعی قرار داد. اعداد حقیقی مجموعهٔ اعداد گویا و اعداد گنگ هستند. اعداد گنگ اعدادی هستند که نمی‌توان آن‌ها را به صورت یک عدد گویا نشان داد بلکه تنها به وسیلهٔ یک زنجیرهٔ نامتناهی از ارقام که دارای الگوی تکراری نیستند، نمایش داده می‌شوند.[1]

کانتور ادّعای بزرگ‌تری را نیز مطرح می‌کند. او بیان می‌دارد که اعداد حقیقیِ بین صفر و یک را نیز نمی‌توان در تناظر یک‌به‌یک با اعداد طبیعی قرار داد. به عبارت دیگر، اعداد حقیقیِ بین صفر و یک از کلّ اعداد طبیعی بیش‌تر است و مجموعهٔ اعداد حقیقی دارای کاردینالی بزرگ‌تر از کاردینال مجموعهٔ اعداد طبیعی است. هم‌چنین کانتور نشان

۱. برای مثال، جذر عدد ۲ (که برابر است با ...۱/۴۱۴۲۱۳۵۶۲) یک عدد گنگ است.

داد که میان مجموعۀ اعداد حقیقیِ بین صفر و یک و هر مجموعه دیگری از اعداد حقیقی هم‌چون اعداد حقیقیِ بین صفر و دو و حتّی کلّ اعداد حقیقی تناظر یک‌به‌یک برقرار است. او هم‌چنین وجود مجموعه‌هایی نامتناهی با اعداد کاردینال بزرگ‌تر را نیز اثبات کرد. هرچند این مجموعه‌ها دارای مصداق مشخّصی در میان اشیای ریاضیّاتی معمول نیستند (Kaplan, pp.228-262).

بنابراین، در دیدگاه کانتور، میان دو مجموعۀ نامتناهی می‌توان روابط تساوی، بزرگ‌تری، و کوچک‌تری را برقرار کرد. این روابط بر اساس مفهوم تناظر یک‌به‌یک تعریف می‌گردند. به همین سبب، دیگر از نقصان یک سلسله نسبت به دیگری نمی‌توان متناهی بودن سلسلۀ ناقص را نتیجه گرفت و، در نتیجه، گزاره یا اصل «زیادت یک سلسله نسبت به دیگری به معنای انقطاع سلسلۀ ناقص است» که از مبانی براهین ابطال تسلسل بود ردّ می‌شود. از طرف دیگر، مشاهده شد که مجموعۀ اعداد حقیقی و یا حتّی اعداد گویای بین صفر و یک نامتناهی‌اند. در نتیجه، نمی‌توان محصور بین دو حاصر را متناهی دانست و این به معنای ردّ اصل «محصور بین دو حاصر متناهی است»خواهد بود.

با این حال، شاید بتوان برخی از این مبانی را با افزودن یک قید پذیرفت. به‌عنوان مثال، می‌توان گفت: در میان زیرمجموعه‌های اعداد طبیعی، نقصان یک سلسله نسبت به دیگری مستلزم انقطاع و متناهی بودن سلسلۀ ناقص است (اعداد گویا شمارش‌پذیرند ولی اعداد گویای میان صفر و یک نامتناهی‌اند). و یا این‌که در میان زیرمجموعه‌های اعداد طبیعی، مجموعه‌ای که محصور بین دو حاصر باشد متناهی است. مجموعه‌های نامتناهی شمارش‌پذیر همانند مجموعۀ اعداد صحیح، اعداد گویا، اعداد زوج یا فرد دارای اندازه‌ای برابر با مجموعۀ اعداد طبیعی هستند.

به هر تقدیر، کانتور با در نظر گرفتن مجموعۀ نامتناهی به عنوان یک کلّ، وجود ریاضی بی‌نهایت بالفعل را پذیرفت (Moar, p. 55). البتّه این دیدگاه مورد انتقاد قرار گرفت. گاس[1] بیان داشت که «نامتناهی بالفعل هرگز در ریاضیّات پذیرفتنی نیست». پونکاره[2] نیز در این باب گفت: «نامتناهی بالفعل وجود ندارد. کانتور این امر را فراموش کرد و دچار تناقض شد». هیلبرت برنامه‌ای برای حذف عناصر نامتناهی از ریاضیّات ارائه

1. Gauss
2. Poincare

داد که به تناهی‌گروی[1] مشهور شد. با این حال، دیدگاه‌های کانتور سرانجام فائق آمد و سازگاری آن‌ها مورد تأیید جامعهٔ ریاضی‌دانان قرار گرفت (Potter, p. 69). برنامهٔ هیلبرت نیز به دلیل مشکلات ذاتی‌اش هرگز عملی نشد. با تقریر نظریّهٔ مجموعه‌ها بر اساس روش اصل موضوعی، نامتناهی در قالب اصل موضوع (آکسیوم) نامتناهی در نظریّهٔ مجموعه‌ها جای گرفت. در اصل موضوع نامتناهی، در واقع وجود حدّاقل یک مجموعهٔ نامتناهی پذیرفته می‌شود (Ibid, p.70). بنابراین، باید گفت که وجود نامتناهی در نظریّهٔ مجموعه‌ها اثبات نمی‌گردد، بلکه فرض می‌شود. البتّه این فرض نتایج سازگاری را به‌همراه می‌آورد و می‌تواند به عنوان یک ابزار مفید در جهت رفع بسیاری از مشکلات موجود در علم ریاضیّات به‌کار گرفته شود.

نتیجه

استفاده از مقدّمات ریاضیّاتی در برهان‌های ابطال تسلسل سبب شده است که مسئلهٔ تسلسل و نامتناهی در فلسفهٔ اسلامی با مسئلهٔ نامتناهی در ریاضیّات گره بخورد. از آن‌جا که مسئلهٔ تناهی و عدم تناهی اوّلاً و بالذات متعلّق به ریاضیّات است، هرگونه استفاده از نامتناهی در فلسفهٔ اسلامی منوط به پذیرش مفهوم نامتناهی به‌نوان یک مفهوم سازگار در ساختار ریاضیّاتیِ مورد پذیرش فیلسوفان اسلامی است. در این باب دیدگاه‌های کانتور می‌تواند مورد توجّه قرار گیرد. با این حال، پذیرش نامتناهی بالفعل در ریاضیّات بدین معنا نیست که در سایر عوالم هستی نیز باید نامتناهی به صورت بالفعل موجود باشد. عدم پذیرش راهکار کانتور و، در نتیجه، تأیید حجّیّت برهان‌های ریاضیاتی سبب خواهد شد که هرگونه استفاده از مفهوم نامتناهی در سنّت فکری ما غیرممکن گردد.

برهان‌هایی هم‌چون تطبیق، و آحاد و الوف، بیش‌از آن‌که فلسفی باشند باید به‌مثابهٔ یک پارادوکس در ریاضیّات مورد توجّه قرار گیرند. این برهان‌ها بخشی از صورت مسئله‌اند، نه یک راه‌حلّ. راهکار پیشنهادی کانتور در این باب با بی‌اعتبار ساختن استدلال‌های مطرح‌شده در مقدّمهٔ چهارم این برهان‌ها سبب رفع تناقضات موجود در آن‌ها می‌شود. مقدّمهٔ پنجم این برهان‌ها نیز باید مورد تجدید نظر قرار بگیرند.

1. Finitism

برهان‌هایی همچون قریب‌المأخذ نیز با استفاده از دیدگاه‌های کانتور بی‌اعتبار خواهند شد، زیرا مقدّمات ریاضیّاتی موجود در آن‌ها براساس راهکار کانتور قابل پذیرش نیستند.

فهرست منابع

۱. ابن‌سینا، ابوعلی حسین، *النجاة*، با ویرایش محمّدتقی دانش‌پژوه، انتشارات دانشگاه تهران، تهران، ۱۳۷۹.

۲. همو، *الشفاء*، الطبیعیات، السماع الطبیعی، تحقیق سعید زائد و دیگران، قم، مکتبة آیةاللّه النجفی، ۱۴۰۵هـ ق؛

۳. همو، *الإلهیات من کتاب الشفاء*، به تحقیق حسن حسن‌زاده آملی، مکتبة الإعلام الإسلامی، قم، ۱۳۷۶.

۴. همو، *الإشارات و التنبیهات*، مع الشرح لنصیرالدین الطوسی و شرح الشرح لقطب‌الدین الرازی، ج۳، نشر البلاغة، قم، ۱۳۸۳.

۵. تفتازانی، سعدالدین، *شرح المقاصد*، تحقیق عبدالرحمن عمیرة، انتشارات شریف رضی، قم، ۱۳۷۱.

۶. رازی، فخرالدین، *المباحث المشرقیة*، ج۱، مکتبة الأسدی، تهران، ۱۹۶۶.

۷. زنوزی، ملّاعبداللّه، *لمعات الهیّه*، تصحیح جلال‌الدین آشتیانی، مؤسسۀ مطالعات و تحقیقات فرهنگی، تهران، ۱۳۶۱.

۸. سبزواری، ملّاهادی، *شرح المنظومة*، ج۲، تعلیقة آیةاللّه حسن حسن زاده آملی، نشر ناب، تهران، ۱۳۸۴.

۹. شیرازی، قطب‌الدین، *شرح حکمة الإشراق*، به اهتمام عبداللّه نورانی و مهدی محقّق، انجمن آثار و مفاخر فرهنگی، تهران، ۱۳۸۳.

۱۰. شیرازی، صدرالدین (ملّاصدرا)، محمد بن ابراهیم، *الحکمة المتعالیة فی الأسفار العقلیة الأربعة*، ج ۲ و ۴، دار احیاء التراث العربی، بیروت، ۱۴۱۰هـ.ق.

۱۱. طباطبائی، محمد حسین، *نهایة الحکمة*، تحقیق عباس‌علی زارعی، مؤسسۀ نشر اسلامی، تهران، ۱۴۲۴هـ.ق.

۱۲. لاریجانی، علی، «نقد و بررسی دلایل ابطال تسلسل»، *آموزگار جاوید: یادنامه آیت‌اللّه العظمی حاج میرزا هاشم آملی (مجموعه مقالات)*، ویرایش: محسن صادقی، نشر مرصاد، عزیزی، قم، ۱۳۷۷.

۱۳. مصباح یزدی، محمّدتقی، آموزش فلسفه، تهران، سازمان تبلیغات اسلامی،۱۳۶۸.

14. Balaguer, Mark , *Platonism and Anti-Platonism in Mathematics*, Oxford University Press, Oxford, 1998.
15. Barrow, John D ., *The Infinite Book*, Pantheon Books, New York, 2005.
16. Brown, James Robert , *Philosophy of Mathematics; A Contemporary Introduction to the World of Proofs and Pictures*, Routledge, New York, 2008.
17. Guillen, Michael , *Bridges to Infinity*, Jeremy P. Tarcher, INC. Los Angeles 1983.
18. Hersh, Reuben , *What Is Mathematics, Really?*, Oxford University Press, Oxford, 1997.
19. Hunter, G.M , 'Is Consistency Enough for Existence in Mathematics', *Analysis*, no. 48, pp.3-5, 1988.
20. Kaplan, Rabert and Ellen Kaplan, *The Art of The Infinte*, Oxford University Press Oxford, 2003.
21. Lavine, Shaughan, *Undrestanding the Infinite*, Harward University Press, Cambridge, 1994.
22. Maor, Eli , *To Infinity and Beyond*, Princeton University Press, Princeton, 1991.
23. Moore, A.W , *The Infinite*, Routledge, New York, 2001.
24. Oppy, Graham, Philosophical Perspectives on Infinity, Cambridge University Press, Cambridge, 2006.
25. Phillip, Davis J , 'When Mathematics Says No', *Mathematics Magazine*, no.59, pp.67-76, 1986.
26. Potter, Michael, *Set Theory and Its Philosophy*, Oxford University Press, Oxford, 2004.
27. Shapiro, Stewart, *Thinking about Mathematics*, Oxford University Press, Oxford, 2000.
28. Vilenkin, N. Ya, *In Search of Infinity*, Translated by Abe Shenitzer, Birkhauser, Boston, 1995.

Bibliography

1. Ibn Sina, *al-Najāt min al-Gharq fī Baḥr al-Ḍalālāt*, ed. M. T. Daneshpajūh, Tehran: Enteshārāt Dāneshgah Tehran, 1379 AHS.
2. __________, *al-Shifā: al-Ṭabī'īyyāt, al-Samā' al-Ṭabī'ī,* ed. Sa'īd Zā'ed, Qom: Maktabah Ayatollah al-Najafī, 1405 AH.
3. __________, *al-Shifā: al-Ilāhiyyāt,* ed. H. Hassanzadeh Amoli, Qom: Maktabah al-E'lām al-Islami, 1376 AHS.

4. ___________, *al-Isharat wa Al-Tanbihat*, Qom: Nashr al-Balaghah. 1383 AHS.
5. Taftāzānī, Sa'd al-Dīn, *Sharḥ al-Maqāṣid,* ed. A. R. 'Omairah, Qom: Sharīf Razī publication, 1371 AHS.
6. Rāzī, Fakhr al-Dīn, *al-Mabāhith al-Mashriqīyyah*, vol. 1, Tehran: Maktabah al-Asadī, 1966.
7. Zonūzī, Mullā 'Abdollah, *Lama'āt-e Elāhiyyah*, ed, Seyyed Jalāal-Dīn Āshtianī, Tehran: Mo'assese-ye Moṭāle'āt wa Taḥqīqāt-e Farhangī-ye Iran, 1361 AHS.
8. Sabzewāri, Mullā Hādī, *Sharḥ al-Manẓūmah*, ed. H. Hasanzadeh Amoli, vol. 2, Tehran: Nashre Nāb, 1384 AHS.
9. Shīrāzī, Qoṭb al-Dīn, *Sharḥ Ḥikmat al-Ishrāq,* Abdollah Norani and Mehdi Mohaghegh (ed.), Tehran: Anjoman Āthar Wa Mafākher-e Farhangi, 1383 AHS.
10. Mullā Ṣadrā, *Al-Ḥikmat al-Muti'ālīah fi al-Asfār al-'Aqlīah al-Arba'ah*, Dar Eḥya at-Torath al-'Arabi, Beyrut, 1410 AH.
11. Ṭabāṭabāyī, Mohammad Hossein, *Nehayat al-Hikmah,* ed. 'Abbas 'Ali Zare'ī, Tehran: Moasseseye Nashre Eslami, 1424 AH.
12. Lārījānī, 'Ali, 'Naqd wa Barrasī-e Dalāyel-e Ebṭāl-e Tasalsol', *Āmūzegar-e Jāvīd*, ed. Moḥsen Ṣādeqī, Qom: Nashre Merṣād, 1377 AHS.
13. Meṣbāḥ Yazdī, M. T., *Āmūzesh Falsafe*, Tehran: Sāzmān Tabliqāt Eslāmī, 1368 AHS.