Iranian Journal of Insurance Research JR
Scientific Research Quarterly Journal
Vol. 35. No.3. Autumn 2020

A Study of Issuing Mortality Bonds in Iran and its Pricing

Mohammad Ali Rastegar[1], **Zahra Manshouri** [2]

Received: 5/14/2019 **Accepted:** 10/3/2020

Abstract

Objective: This paper analyzes the possibility of publishing mortality bonds. This class of securities provides attractive investment opportunities for capital market and is a good hedging tool for managing the risk of life insurance companies. It allows the insurers to access a new source of financing and provides some facilities for investors to diversify their portfolios.

Methodology: It is required to predict future rate of mortality in order to conduct pricing of mortality bonds. We used lee and carter model simulation mortality rate, as it is very flexible and can be used for limited data. First, the mortality rate of 5_ year age groups for years between 1996 and 2016 was calculated. The reason for using Gregorian calendar is that we use the united nation's database. With Singular Value Decomposition (SVD), Lee-Carter model parameters were estimated and we have produced various scenarios for Iran's mortality index for the next three years using the Monte Carlo simulation. In the last step, a sensitivity analysis for the interest rate and catastrophe threshold was provided to examine the price response to changes in interest rates and changes in the threshold.

One of the characteristics of the q-forward contracts if that they can be used for hedging both mortality and longevity risk. Mortality risk refers to the risk that mortality rates are higher than expected whereas longevity risk refers to the risk that mortality rates are lower than expected. A q-forward is an agreement between two counterparties to exchange at a future date (the maturity of the contract) an amount equal to the realized mortality rate of a given population at that future date (the floating leg), in return for a fixed mortality rate agreed upon at the inception of the contract (the fixed leg). In principle there are hedgers who are interested in both sides of the trade of a q-forward contract.

Finding: The result shows that at maturity of three-year mortality bonds, increasing the interest rate, will rise the prices of these securities. Moreover, as the threshold grows, the price of these securities also increases; it is because the probability of default by issuer is reduced. Furthermore, by keeping other conditions constant, if the issuer determines the threshold range to two units, the price of these securities is reduced. Ultimately, the result shows that there is a small possibility of issuing these papers in the Iranian financial market.

Conclusion: In addition to introduction of mortality bonds which is an available investment instrument in global financial markets, this study aims to investigate possibility of issuing it in Iran and also overview the pricing of these bonds for domestic investors and issuers based on earnings discount approach.

Keywords: Possibility of issuing mortality securities, Pricing, Lee Carter- model, Simulation, Monte Carlo, Swiss reinsurance.

JEL Classification: G13, G22, G23, C63.

---

1. Assistant Professor of Department of financial Engineering, Faculty of Industrail Engineernig & Systemt, Tarbiat Modares University Tehran, Iran. **(Corresponding Author)** ma_rastegar@modares.ac.ir

2. MSc in Financial Engineering, Finance Department, Khatam University, Tehran, Iran. Zahra.manshouri@yahoo.com

(DOI): 10.22056/jir.2020.185240.2500

www.SID.ir

فصلنامه علمی پژوهشی پژوهشنامه بیمه JR
سال سی‌وپنجم، شماره ۳، پاییز ۱۳۹۹

بررسی انتشار اوراق مرگ و میر در ایران و قیمت‌گذاری آن

محمدعلی رستگار[۱]، زهرا منشوری[۲]

تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۰۲/۲۴ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۰۵/۱۲

چکیده

هدف: این تحقیق با هدف بررسی اوراق مرگ‌ومیر شکل گرفته که یک فرصت سرمایه‌گذاری جذاب برای بازار سرمایه، ابزار مدیریت ریسک و دست‌یابی به منبع جدید تأمین مالی برای شرکت‌های بیمه و ابزار تنوع‌بخشی سبد سرمایه‌گذاری و افزایش بازدهی آن برای سرمایه‌گذاران محسوب می‌شود.

روش شناسی: در این پژوهش ابتدا نرخ مرگ‌ومیر گروه‌های سنی ۵ ساله طی سال‌های ۱۹۹۶ تا ۲۰۱۶ برآورده و با روش تجزیه ارزش منفرد، پارامترهای مدل لی کارتر تخمین زده شد. در گام بعد، با استفاده از شبیه‌سازی مونت‌کارلو، حالات مختلفی برای شاخص مرگ‌ومیر ایران در سه سال آتی تولید شد. در نهایت، بر روی نرخ سود و آستانه فاجعه تحلیل حساسیتی انجام شد تا واکنش قیمت به تغییرات نرخ سود و تغییرات بازه آستانه مورد بررسی قرار گیرد.

یافته‌ها: نتایج نشان داد در پایان عمر سه ساله این اوراق، با افزایش نرخ سود، قیمت آن افزایش می‌یابد. همچنین، با افزایش سطح آستانه، قیمت این اوراق افزایش می‌یابد؛ زیرا احتمال عدم بازپرداخت از جانب ناشر کاهش می‌یابد. اگر نیز ناشر بازه آستانه را دو واحدی تعیین کند با ثابت نگه داشتن سایر شرایط، قیمت این اوراق کاهش می‌یابد.

نتیجه‌گیری: در این پژوهش سعی شد اوراق مرگ‌ومیر به‌عنوان یک ابزارمالی موجود در بازارهای جهانی معرفی و امکان انتشار آن در ایران بررسی گردد. به‌علاوه، با روش تنزیل عایدی، قیمت این اوراق برای سرمایه‌گذاران و ناشران داخلی مشخص شود.

واژگان کلیدی: اوراق مرگ‌ومیر، قیمت‌گذاری، روش لی کارتر، شبیه‌سازی مونت کارلو.

طبقه‌بندی موضوعی: G13, G22, G23, G63.

---

۱. استادیار گروه مهندسی مالی، دانشکده مهندسی صنایع و سیستم‌ها، دانشگاه تربیت مدرس، ایران، تهران **(نویسنده مسؤول)**. ma_rastegar@modares.ac.ir

۲. دانش آموخته کارشناسی ارشد مهندسی مالی، دانشکده مدیریت، دانشگاه خاتم، ایران
Zahra.manshouri@yahoo.com

www.SID.ir

مقدمه

اوراق فاجعه‌آمیز[1] ابزاری برای مقابله با بلایا و حوادث فاجعه‌آمیز است و اوراق بهادار بیمه‌ای یکی از مهم‌ترین و پرانتشارترین آنها می‌باشد. اوراق بهادار بیمه‌ای نیز انواع مختلفی دارد که یک نوع رایج آن، اوراق مرگ‌ومیر[2] است. بر این اساس که بسیاری از شرکت‌های بیمه عمر و صندوق‌های بازنشستگی تحت تأثیر ریسک تغییرات نرخ مرگ‌ومیر قرار دارند و با استفاده از اوراق مرگ‌ومیر می‌توانند آن را مدیریت کنند. ریسک مذکور از دو جنبه قابل اهمیت است؛ نخست، در صورت افزایش نرخ مرگ‌ومیر بر اثر بیماری‌هایی مانند آنفلوانزا و سایر بیماری‌ها، شرکت‌های بیمه عمر را تحت فشار قرار می‌دهد. جنبه دیگر؛ در صورت بهبود مرگ‌ومیر و افزایش طول عمر افراد، بدهی صندوق‌های بازنشستگی را افزایش می‌دهد.

از سویی، امروزه، ابزارهای مالی بسیاری جهت یکپارچه کردن بازارهای مالی شامل بخش بانکی، صنعت بیمه و بازار سرمایه ظهور یافته‌اند که از آنها می‌توان جهت مدیریت ریسک و انتقال ریسک‌های موجود در بانکداری یا صنعت بیمه به بازار سرمایه استفاده کرد. در این بین، ارتباط میان صنعت بیمه و بازار سرمایه و انتقال ریسک بیمه‌نامه‌ها به بازار سرمایه با ابزارهای جدید نیز بیش از پیش احساس می‌شود. مخصوصاً این که مدل بیمه اتکایی سنتی که این ریسک‌ها باهم مرتبط هستند، ناکارا است. زیرا، به ریسک عدم تقارن بیمه اتکایی، بخشی اضافه می‌شود که به بزرگی سرمایه صاحبان سهام بیمه اتکایی بستگی دارد. همچنین، هزینه سرمایه عدم تقارن اطلاعاتی بین بیمه‌گر اتکایی و بازار سرمایه و هزینه نمایندگی و دیگر هزینه‌های معاملاتی بازار افزایش می‌یابد و ممکن است قیمت بیمه اتکایی نسبتاً بالا و پوشش بیمه‌ای محدود باشد. بر این اساس، پژوهش حاضر به معرفی ابزار مدیریت ریسک صنعت بیمه قابل انتشار در بازار سرمایه و یکی از روش‌های قیمت‌گذاری آن پرداخته

1. Catastrophic Bond
2. Mortality Bond

www.SID.ir

که با توجه به نرخ مرگ و میر و نرخ بازدهی مورد انتظار بازار سرمایه ایران تعدیل شده است. برای این منظور شاخص مرگ‌ومیر ایران با استفاده از داده‌های نرخ مرگ‌ومیر ویژه سنی سال‌های ۱۹۹۶ تا ۲۰۱۶ و مدل لی-کارتر[1] محاسبه شده است. سپس، به روش مونت کارلو[2]، ۵۰۰۰ حالت محتمل برای شاخص مرگ‌ومیر سال‌های ۲۰۱۷ تا ۲۰۱۹ تولید شده است. در نهایت، امکان انتشار اوراق مرگ‌ومیر سه ساله در ایران با بررسی حساسیت قیمت این اوراق به نرخ سود و دامنه آستانه تعریف فاجعه، بررسی شده است. لازم به ذکر است سازوکار طراحی اوراق مرگ‌ومیر مذکور به‌گونه‌ای است که سرمایه‌گذاران در صورت ثبات و یا کاهش نرخ مرگ‌ومیر به سود دست خواهند یافت و درصورت افزایش نرخ مرگ‌ومیر متضرر خواهند شد. متقابلاً، از منظر شرکت بیمه عمر صادرکننده اوراق، در صورت ثبات و یا کاهش نرخ مرگ‌ومیر باید سود سرمایه‌گذاران پرداخت شود که این سود پرداختی بخشی از حق بیمه دریافتی از قراردادهای بیمه عمر است و در صورت افزایش نرخ مرگ‌ومیر شرکت بیمه عمر از سود حاصل از این اوراق ضرر ناشی از افزایش خسارت بیمه‌نامه‌های عمر را جبران می‌کند.

در ادامه، ادبیات تحقیق مرور شده است. سپس، درباره مدل محاسبه شاخص مرگ‌ومیرِ لی-کارتر توضیحات لازم ارائه شده و به نحوه کاربرد مونت کارلو برای پیش‌بینی مرگ‌ومیر اشاره شده و تحلیل حساسیت قیمت این اوراق بر روی نرخ سود و آستانه شاخص بررسی شده است. در بخش نهایی، نتایج پژوهش و توصیه‌های سیاستی بیان شده است.

1. Lee & Carter
2. Monte Carlo

www.SID.ir

۱. مروری بر پیشینه تحقیق

درباره اوراق فاجعه‌آمیز تحقیقات گسترده‌ای انجام شده که در دو دسته اصلی قابل تقسیم هستند:

دسته اول، تحقیقاتی است که توسط محققان حوزه اقتصاد مالی انجام شده و از آن جمله می‌توان به گالاتی[1] (۲۰۰۳)، چودهری[2] (۲۰۱۳)، دمی[3] (۲۰۰۷) و کلین[4] (۲۰۰۷) اشاره کرد. این افراد به دنبال پاسخگویی به این سوال بوده‌اند که آیا بیمه‌گران می‌توانند به جای بیمه اتکایی از روش‌های دیگر انتقال ریسک استفاده کنند و منتفع شوند؟ برای این منظور، راهکارهایی برای جایگزینی ابزارهای انتقال ریسک با بیمه اتکایی ارائه داده‌اند و پیشنهاد انتشار اوراق بهادار انتقال ریسک در سال ۱۹۹۰ نیز توسط اقتصاددانان مالی مطرح گردیده است (لانه[5]، ۲۰۰۰). دسته دوم تحقیقاتی است که در حوزه کمی و مدل‌سازی انجام شده و تحقیق حاضر در زمره این نوع مطالعات محسوب می‌شود. بنابراین، این دسته از مطالعات در ادامه به تفصیل مورد بحث قرار گرفته‌اند.

فروت[6](۲۰۰۱) بازار ریسک فاجعه‌آمیز را بررسی کرده است. بوئر و کرامر[7](۲۰۰۷) به تحلیل و قیمت‌گذاری اوراق مرگ‌ومیر فاجعه‌آمیز بر مبنای مدل‌سازی تصادفی زمان پیوسته مرگ‌ومیر پرداخته‌اند. سپس، مرور مختصری بر معاملات اوراق فاجعه‌آمیز کرده‌اند. چن و کومینس[8](۲۰۱۰) به بررسی صرف ریسک‌های اوراق قرضه طول عمر با رویکرد مقدار کرانی[9] پرداخته‌اند. این مطالعه با هدف بررسی اوراق بهادار ریسک طول عمر با تأکید بر مدل‌سازی ریسک طول عمر و

1. Gallati
2. Choudhry
3. De Mey
4. Klein
5. Lane
6. Froot
7. Bauer & Kramer
8. Chen & Cummins
9. Extreme Value Theory (EVT)

www.SID.ir

قیمت‌گذاری صرف ریسک اوراق قرضه طول عمر انجام شده است. دنگ و همکاران[1] (۲۰۱۲) ادعا کرده‌اند بحران‌های مرگ‌ومیر و جهش‌هایی که در داده‌های تاریخی اتفاق افتاده بر روی قیمت‌گذاری اوراق اثر مهمی دارند. آنها یک مدل انتشار تصادفی با فرآیند انتشار پرش دونمایی[2] که هر دو پرش‌های رو به بالا و رو به پایین پشت سر هم اتفاق می‌افتند و اثر گروهی در روند مرگ‌ومیر را در برمی‌گیرد، معرفی نموده‌اند. در این مقاله، یک مدل تصادفی بر مبنای حرکت براونی به علاوه انتشار پرش‌های نامتقارن برای تخمین و پیش‌بینی نرخ مرگ‌ومیر و امید به زندگی ارائه شده است. همچنین از آن‌جایی که طبق‌نظر زنجانی[3] (۲۰۰۲) پرش‌های پرش‌های مرگ‌ومیر و طول عمر منبع حیاتی ریسک صندوق‌های بازنشستگی و بیمه‌گرها هستند، پس با توجه به نظر کاکس و همکاران[4] (۲۰۱۰) باید آگاهانه این پرش‌ها را مدل‌سازی نمود و در فرایند اوراق بهادارسازی در نظر گرفت. روش انتشار پرش دونمایی، اثر گروهی که شامل به کارگیری سری زمانی مرگ‌ومیر و تعدیل آن برای تناسب با گروه سنی متفاوت است را در نظر می‌گیرد که از جمله مزایای مدل سری زمانی مرگ‌ومیر لی کارتر است. همچنین، مدل انتشار پرش دونمایی بر داده‌های تجربی سازگارتر است. بیتفیس[5] (۲۰۰۵) فرایند انتشار پرش‌ها را برای مدل‌سازی شدت مرگ‌ومیر در چارچوب زمان پیوسته ارائه داد. وانگ و سوهانگ‌لی[6] (۲۰۱۶) نیز از روش همبستگی شرطی پویا[7] برای مدل‌سازی نرخ مرگ‌ومیر چندجمعیتی استفاده کردند، به اعتقاد آنها این مدل می‌تواند برای قیمت‌گذاری اوراق مرگ‌ومیر که معمولاً با مرگ‌ومیرهای بیش از یک کشور و جمعیت روبرو هستند، به کار رود. آنها همچنین اثرات ویژگی‌های مختلف مدل

1. Deng et al
2. Double Exponential jump diffusion process
3. Zanjani
4. Cox et al
5. Biffis
6. Wang & Li
7. Dynamic Conditional Correlation- Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity

www.SID.ir

همبستگی شرطی پویا را در مورد قیمت‌گذاری بررسی کردند. نتایج نشان داد نادیده گرفتن ناهمسانی همبستگی نرخ مرگ‌ومیر در میان کشورها منجر به قیمت‌گذاری بالاتر می‌شود.

درباره اوراق قرضه حوادث فاجعه‌آمیز در داخل کشور تحقیقات اندکی به شرح موارد زیر صورت گرفته است:

گرگانی (۱۳۹۲) امکان‌سنجی انتشار اوراق بهادار فاجعه‌آمیز در مورد خسارت‌های زلزله را بررسی کرده است. برای این منظور، ابتدا با تخمین پارامترهای توزیع مادر (۱۰۰۰۰) سناریوی تصادفی برای خسارت‌های زلزله با این توزیع تولید شده است. در ادامه، از تئوری ارزش فرین[1] و به‌طور خاص توزیع پارتوی تعمیم‌یافته[2] برای تخمین ارزش در معرض ریسک در بالای آستانه u استفاده می‌نماید. پس از تخمین آستانه با استفاده از شبیه‌سازی بوت استرپ[3] و روش حداکثر درست نمایی پارامترهای توزیع پارتوی تعمیم‌یافته و مقدار دارایی‌درخطر یا ارزش‌های مخاطره‌پذیر[4] بالاتر از آستانه گروه است است و سرانجام با استفاده از مفهوم صرف ریسک حداقل نرخ بازدهی این اوراق تعیین می‌گردد.

پیکارجو و داودی رستمی (۱۳۸۸) به بررسی توجیه انتشار اوراق بهادار فاجعه‌آمیز بر اساس داده‌های شبیه‌سازی شده خسارات زلزله احتمالی تهران پرداخته‌اند. سپس، با استفاده از مدل رگرسیون خطی به وجود ارتباط مثبت بین خسارات آتش‌سوزی و حق بیمه دریافتی از آتش‌سوزی پی برده‌اند. همچنین، با استفاده از شبیه‌سازی مونت کارلو و با تولید هزار تکرار فراوانی توزیع خسارت به‌دست آمده و در مرحله بعد ارزش در معرض ریسک محاسبه شده است. با استخراج ارزش در معرض ریسک، نواحی نگهداری و انتقال ریسک مشخص شده است.

1. Extreme Value Theory
2. Generalized Pareto Distribution
3. Bootstrap
4. Value at Risk

www.SID.ir

پیکارجو و حسین پور (۱۳۸۵) به محاسبه نرخ سود بهینه اوراق قرضه حوادث فاجعه‌آمیز در شرکت بیمه ملت پرداخته‌اند. در این مقاله آن‌ها به تخمین سهم نگهداری بهینه شرکت بیمه ملت و همچنین یک شرکت بیمه اتکایی داخلی نوعی با استفاده از شبیه‌سازی مونت‌کارلو و حداقل‌سازی ارزش در معرض ریسک خسارت‌های شبیه‌سازی شده پرداخته و سپس فرض نموده‌اند که سرمایه مورد تعهد مازاد بر این سهام‌ها (اتکایی و بیمه نگهداری) به‌صورت اوراق قرضه در اختیار مردم قرار می‌گیرد. در واقع بر اساس نتایج به دست‌آمده از این نوشتار، نرخ سود پرداختی به خریدار می‌تواند بین دو مقدار ۲۰,۶۶٪ و ۲۶,۸٪ نوسان نماید و بدین ترتیب خارج از این بازه خرید و فروش به ترتیب برای خریدار و فروشنده صرفه اقتصادی ندارد.

همان‌گونه که ملاحظه شد در ایران مطالعات کمی درباره اوراق مرگ‌ومیر انجام شده است. این در صورتی است که این اوراق در مدیریت ریسک شرکت‌های بیمه عمر می‌تواند نقش مهمی ایفا کند.

۲. مبانی نظری

مدل‌های نرخ مرگ‌ومیر بیان شده توسط هویت و بلک[1] (۲۰۲۰) به‌طور خلاصه در ادامه توضیح داده شده است.

۲-۱. مدل لی- کارتر

پرکاربردترین مدل استفاده شده برای مدل‌سازی مرگ‌ومیر که تاکنون نیز کاربرد دارد، توسط لی و کارتر(۱۹۹۲) مطرح شد. ،مدل لی و کارتر یک مدل سنی و دوره زمانی منفرد[2] است.

لی و کارتر اولین مدل پیش‌بینی مرگ‌ومیر تصادفی را ارائه کرده‌اند، در این مدل عوامل وابسته به زمان توسط یک مدل سری زمانی تخمین زده می‌شوند؛ آن‌ها از روش تجزیه

1. Hunt & Blake
2. A Single Age/ Period Term

www.SID.ir

مقادیر منفرد (SVD[1])، برای تخمین پارامترها استفاده کرده‌اند. با توجه به سادگی تخمین، مدل لی کارتر به یک مدل محبوب تبدیل شده است، به طوری که امروزه کشورهایی مانند آمریکا، شیلی، چین، ژاپن، هفت کشور توسعه یافته اقتصادی[2] (G7[3])، هند، کشورها شمال اروپا، سریلانکا و تایلند و دیگر کشورها از این مدل برای پیش بینی مرگ‌ومیر استفاده می‌کنند.

مدل لی کارتر با ارائه یک فاکتور تصادفی سناریوهای مختلفی برای آینده می‌سازد.

(۱)

a_xاثر ثابت سن است. k_t شاخص مرگ ومیر در سال t به ازای تمان سنین و b_x شیب منحنی مرگ‌ومیر را به ازای گروه سنی x نشان میدهد. $\varepsilon_t = \sigma z_{t+1}$ بخش تصادفی پیش‌بینی است که فرض می‌شود توزیع نرمال و دارای میانگین صفر و واریانس یک است. نقطه قوت لی‌کارتر (۱۹۹۲) در سادگی و ثبات روند خطی میزان مرگ ومیر است.

۲-۲. مدل کارنز، بلک و داو

یکی از رقیب‌های اصلی مدل لی کارتر، مدل کارنز، بلک و داو[4] (۲۰۰۶) است که به مدل CBD معرفی شده است.

مدل کارنز، بلک و داو نیز یک مدل دو عاملی است و تنها مدلی است که ویژگی داده‌های جدید ثابت[5] را در نظر می‌گیرد.

$$\ln\left(\frac{q_{x,t}}{1-q_{x,t}}\right) = k_t^1 + k_t^2(X - \bar{X}) \qquad (۲)$$

1. Singular Value Decomposition

۲. آلمان، فرانسه، ایتالیا، ژاپن، بریتانیا و ایالات متحده آمریکا

3. Group of Seven
4. Cairns-Blake-Dowd Model
5. New-Data-Invariant

www.SID.ir

$q_{x,t}$ شاخص مرگ‌ومیر برای گروه سنی x در سال t است. k_t^1 شاخص مرگ‌ومیر است که نشان‌دهنده سطح منحنی مرگ‌ومیر پس از تبدیل لوگاریتم $q_{x,t}$ درسال t است. روند کاهش در k_t^1، نشان‌دهنده بهبود مرگ‌ومیر در تمام سنین است و منجر به انتقال منحنی به چپ می‌شود. k_t^2 نشان‌دهنده شیب منحنی مرگ‌ومیر است، افزایش در k_t^2 نشان‌دهنده افزایش شیب منحنی مرگ و میر است. به عبارت دیگر مرگ‌ومیر در سنین جوان تر (کمتر از $\overline{X}$)سریع‌تر از افراد بزرگ سال (بالاتر از $\overline{X}$) اتفاق می‌افتد. در عمل مقدار$\overline{X}$، خطی بین افراد جوان و میان سال است که در تفسیر k_t^2، جز لازم است.

در پژوهشی که مک‌کرون و نوکیتو در سال ۲۰۱۶ بر روی داده‌های ایتالیا از سال از سال ۱۹۷۵ تا ۲۰۱۴ انجام داده‌اند و دو روش لی کارتر و کارنز، بلک و داو را به منظور ارزیابی قدرت پیش بینی کوتاه‌مدت مقایسه کرده‌اند. نتایج نشان داد روش کارنز، بلک و داو برای گروه‌های بالاتر از ۷۵ سال، بهتراز لی کارتر عمل کرده است. روش ارائه شده توسط کارنز، بلک و داو نسبت به روش لی کارتر در پیش‌بینی اریب بیشتری دارد.

۲-۳. مدل APC

مدل سن، دوره و گروه توسط رانشو و هابرمن در سال ۲۰۰۶ ارائه شد.

$$M = \frac{D_{ij}}{P_{ij}} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + \varepsilon_{ij} \qquad (۳)$$

M احتمال وقوع و یا در معرض مرگ و میر قرار گرفتن گروه سنی i برای دوره j است. D_{ij} نشانگر تعداد افراد فوت شده در سن i در سال j است؛ p_{ij} تخمین جمعیت گروه سنی i در سال j است. μ بیانگر وقفه و یا میانگین تعدیل شده است. α_i عامل مشترک میان تمام گروه سنی است. β_j نشانگر عامل مشترک میان تمام سال‌هاست. γ_k نشان‌دهنده اثر گروهی به عبارت دیگر عامل مشترک برای شاخص k (مرگ‌ومیر) است. ε_{ij} خطای تصادفی است که $E(\varepsilon(x, t)) = 0$ است.

www.SID.ir

تحلیل بلندمدت مرگ‌ومیر نیازمند شناسایی اثرات مستقل سن، دوره و گروه است که با استفاده از روش APC امکان‌پذیر می‌باشد. این روش با شناسایی عوامل بیولوژیکی، تاریخی، اجتماعی و اقتصادی در بلندمدت با در نظرگرفتن وضعیت سلامت و نابرابری بهداشتی به پیش‌بینی مرگ‌ومیر می‌پردازد. از جمله نقاط ضعف این روش نیازداشتن به حداقل ۱۰۰ سال داده و همچنین این روش بسیار به قضاوت محقق وابسته است. مدل APC توسط محققین بسیاری دنبال شده است و مدل‌های توسعه‌یافته آن نیز وجود دارد؛ از جمله مدل هاربمن و راشو[1] (۲۰۱۱-۲۰۰۹) که به مدل H_1 معروف است و همچنین مدل ارائه‌شده توسط هانت و ویگنز[2] (۲۰۱۵) می‌توان اشاره کرد.

از آن‌جا که متغیر مرگ‌ومیر در گذر زمان به صورت تصادفی است. در این مطالعه از شبیه‌سازی مونت کارلو برای تولید سناریوهای شاخص مرگ‌ومیر برای سه‌سال آتی در ایران استفاده شده است.

۳. واقعیات تجربی

بنابراین، اوراق مرگ‌ومیر برای پوشش ریسک شرکت بیمه عمر طراحی شده و در واقع نوع اوراق حق اختیاردار است؛ ترکیبی از ورقه قرضه و نوعی قرارداد حق فروش[3] است که متغیر پایه، اختیار[4] نرخ مرگ‌ومیر می‌باشد. بدین ترتیب تا زمانی که نرخ مرگ‌ومیر از γ_1 کمتر باشد، دقیقا مثل یک ورقه قرضه عمل می‌کند؛ و زمانی که نرخ مرگ ومیر بیش از γ_2 باشد، ورقه بی‌ارزش می‌شود. (مشابه حق فروش که قیمت دارایی پایه‌اش از قیمت توافقی آن بیشتر باشد[5])؛ و اگر نرخ مرگ‌ومیر بین γ_1 و γ_2 باشد، اختیار فعال می‌شود که نرخ کوپن ورقه قرضه را کاهش می‌دهد. ابزار دیگری که برای پوشش نرخ مرگ‌ومیر بکار می‌رود، نوعی آتی[6] است به نام آتی مرگ‌ومیر که شرکت

1. Haberman & Renshaw
2. Hunt & Villegas
3. Put Option
4. Option
5. Out of the Money
6. Forward

www.SID.ir

جی.پی مورگان[1] آن را منتشر کرده است. جی پی، مورگان قرارداد مشتقه آتی مرگ‌ومیر مرگ‌ومیر خود را به‌عنوان ابزاری ساده بازار سرمایه برای انتقال ریسک مرگ‌ومیر و طول عمر پیشنهاد می‌دهد.

در ادامه، مهم‌ترین بورس‌های دنیا که در آنها مشتقات اوراق بهادار فاجعه‌آمیز معامله می‌شود معرفی شده است.

جدول ۱. بورس معامله مشتقات فاجعه‌آمیز در دنیا

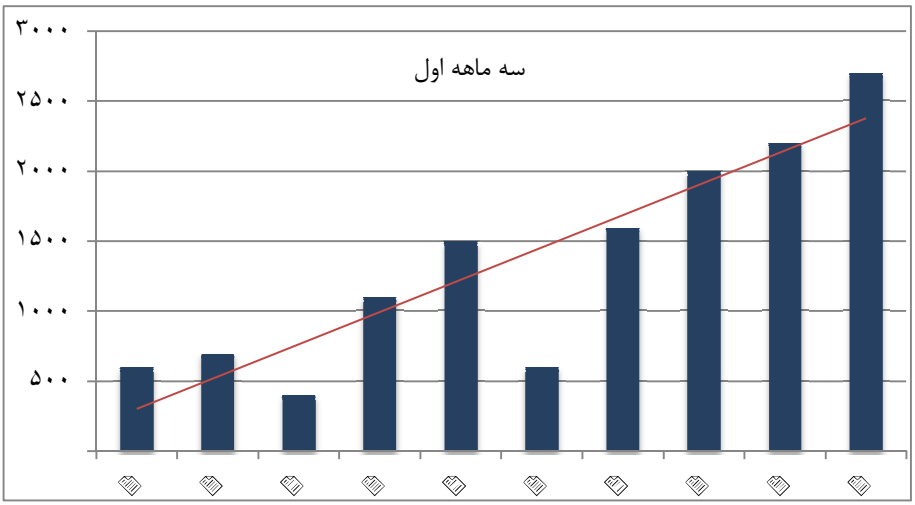
بورس معامله مشتقات فاجعه‌آمیز	زمان فعالیت بورس	علت توقف فعالیت	شرح
CBOT– هیئت تجاری شیکاگو[2]	۱۹۹۹-۱۹۹۲	تقاضای کمتر از انتظار و عدم مقبولیت به عنوان جایگزین سایر راه‌حل‌های ریسک فاجعه‌آمیز.	با هدف حفاظت از بخشی از زیان‌های آسیب‌های طبیعی مبنای تعیین ریسک، شاخص ISO (دفتر خدمات بیمه)[3] بود
CATEX[4] – نیویورک	۱۹۹۶-۱۹۹۶	برآورده نکردن انتظارات مشارکت‌کنندگان در بازار ریسک فاجعه‌آمیز	یک سیستم نمایش الکترونیکی بود که در آن شرکت‌های بیمه می‌توانستند ریسک خود را بفروشند.
BCE[5] – بورس کالای برمودا	۱۹۹۷– تاکنون	علت محدود بودن فعالیت: تنها آسیب‌های ناشی از طوفان، تگرگ و انجماد را دربر میگیرد.	بازار معاوضه ریسک فاجعه‌آمیز بر مبنا شاخص فاجعه آمیز گای کارپینتر[6].

منبع: براگمن– ورونیاک

همچنین، مبلغ فروش اوراق مرگ‌ومیر در سه ماهه اول ۱۰ سال‌های ۲۰۱۷–۲۰۰۸ در نمودار زیر ارائه شده که نشان می‌دهد، انتشار اوراق فاجعه‌آمیز و اوراق بهادار مربوط به بیمه در سه ماهه اول ۲۰۱۷ حدود ۱/۴ میلیارد دلار بالاتر از میانگین ده ساله بوده است.

1. Morgan
2. Chicago Board of Trade (CBOT)
3. Insurance Services Office (ISO)
4. Catastrophe Risk Exchange (CATEX)
5. Bermuda Commodities Exchange (BCE)
6. Guy Carpenter's catastrophe index (GCCI)

www.SID.ir



نمودار ۱. مبلغ انتشار اوراق مرگ و میر در سه ماهه اول سال‌های ۲۰۰۸ تا ۲۰۱۷ (میلیون دلار)

منبع: آرتمیس (۲۰۱۷)

پیمان‌های آتی کیو[1]، صندوق‌های بازنشستگی را به پوشش ریسک در مقابل افزایش امید به زندگی اعضا و شرکت‌های بیمه عمر را قادر به محافظت در برابر افزایش قابل ملاحظه نرخ مرگ‌ومیر بیمه‌گذاران قادر می‌سازد. یک پیمان آتی کیو، یک نوع از قراردادهای استاندارد است که به جذب نقدینگی در بازار سرمایه کمک می‌کند. در نهایت از آنها برای تسویه بر مبنای شاخص مرگ‌ومیر استفاده می‌شود.

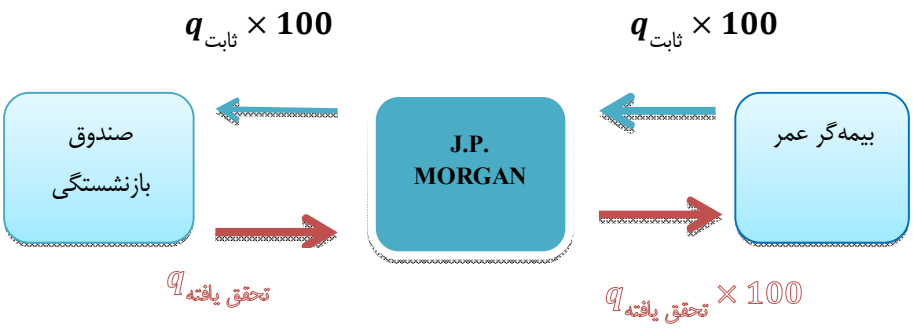
پیمان آتی کیو، نوعی قرارداد است که توسط بیمه عمر برای پوشش ریسک مرگ‌ومیر تحقق یافته استفاده می‌شود که در آن بیمه‌گرها نرخ ثابتی به بانک‌های سرمایه‌گذاری می‌پردازند و بانک‌های سرمایه‌گذاری بر مبنای نرخ مرگ‌ومیر تحقق یافته به بیمه‌های عمر می‌پردازند. مبلغ دریافتی بیمه عمر از بانک سرمایه‌گذاری به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\text{مبلغ قرارداد} \times \left[q_{\text{تحقق یافته}} - q_{\text{پیش‌بینی شده}} \right] \times ۱۰۰ \qquad (۴)$$

1. Q.forward

www.SID.ir

زمانی که میزان تحقق یافته بیشتر باشد، بانک سرمایه‌گذاری به بیمه عمر این مقدار را به‌منظور جبران خسارات وارده به بیمه عمر بر اثر افزایش مرگ ومیر تحقق یافته، پرداخت می‌کند. همچنین، پیمان آتی کیو می‌تواند توسط صندوق بازنشستگی یا تأمین اجتماعی برای پوشش ریسک طول عمر استفاده شود. صندوق‌های بازنشستگی معادل نرخ مرگ‌ومیر تحقق یافته را به بانک‌های سرمایه‌گذاری می‌پردازند و بانک‌های سرمایه‌گذاری نرخ ثابتی را به صندوق‌ها می‌پردازند.



شکل ۱. نحوه‌ی معامله پیمان آتی کیو

صندوق‌های بازنشستگی پرداخت‌هایی به صورت زیر دریافت می‌کنند:

$$\left[\text{مبلغ قرارداد} \times (q_{\text{ثابت}} - q_{\text{تحقق یافته}})\right] \times ۱۰۰ \qquad (۵)$$

زمانی که مرگ‌ومیر کاهش یابد، (طول عمر افزایش یابد)، بانک سرمایه‌گذاری مبلغی را به صندوق برای جبران خسارات ناشی از افزایش طول عمر می‌پردازد. به‌عبارت‌دیگر؛

www.SID.ir

صندوق‌های بازنشستگی موضع خرید[1] بر روی ریسک افزایش طول عمر می‌گیرند و در مقابل بانک سرمایه‌گذاری موضع فروش[2] روی ریسک افزایش طول عمر می‌گیرند. همچنین، بیمه عمر نیز موضع خرید بر روی ریسک مرگ‌ومیر می‌گیرند و در مقابل موضع فروش را کسانی می‌پذیرند که می‌خواهند این ریسک را بپذیرند؛ هرچند که صندوق‌های بازنشستگی و بیمه‌های عمر بازیگران اصلی هستند و بانک‌های سرمایه‌گذاری می‌توانند به‌عنوان واسطه‌گرهای مالی، این عمل را تسهیل کنند.

جدول ۲. توضیحات پیمان آتی کیو برای پوشش ریسک طول عمر

ارزش اسمی	۵۰,۰۰۰,۰۰۰ پوند
تاریخ معامله	۳۱ دسامبر ۲۰۰۶
تاریخ مؤثر	۳۱ دسامبر ۲۰۰۶
تاریخ سررسید	۳۱ دسامبر ۲۰۱۶
سال مبنا	۲۰۱۵
نرخ ثابت	٪۱,۲
پرداخت‌کننده نرخ ثابت	جی پی مورگان
مقدار ثابت	
نرخ مرجع	ماتریس عمر حاصل از نرخ اولیه مرگ‌ومیر برای مردان ۶۵ ساله در سال مبنا که از شاخص LMQMEW65 حاصل می‌شود.
پرداخت‌کننده نرخ شناور	صندوق بازنشستگی ABC
مقدار شناور	۱۰۰ × نرخ مرجع × اسمی ارزش
مقدار تسویه	

منبع: کوئکلن و همکاران (۲۰۰۷)

1. Long
2. Short

www.SID.ir

٤. روش‌شناسی

داده‌های مرگ‌ومیر ملی به صورت سالانه و هر سال گزارش می‌شوند که منجر به مدل زمان گسسته می‌شود. به‌طور معمول داده‌های مرگ‌ومیر به‌صورت خام عرضه می‌شود. برای ساختن جدول عمر به نرخ‌های مرگ‌ومیر ویژه سنی (m_x) برای همه سنین x نیاز است. با اتکا به نرخ‌های مرگ‌ومیر می‌توان کل عناصر جدول را به‌دست آورد که در ادامه این عناصر تخمین‌زده شده‌اند.

$$\mathbf{m_x(t,x)} = \frac{\mathbf{D(t,x)}}{\mathbf{E(t,x)}} \qquad (۶)$$

اینجا، D(t,x) بیانگر تعداد افراد فوت شده در زمان t در سن x است و E(t,x) بیانگر جمعیت در معرض فوت در زمان t و گروه سنی x در جمعیت مشخص است. در عمل، نرخ مرگ‌ومیر از تقسیم تعداد فوت شده هر سن بر جمعیت میانه آن سن به‌دست می‌آید.

اولین و پرکاربردترین مدل پیش‌بینی مرگ‌ومیر، مدلی است که توسط لی-کارتر در سال ۱۹۹۲ ارائه شد. مدل لی-کارتر، یک ساختار سنی منفرد و یک دوره‌ای به شکل زیر دارد:

$$\ln(m_{x,t}) = \alpha_x + \beta_x k_t \qquad (۷)$$

در این معادله، α_x متوسط زمانی لگاریتم نرخ مرگ‌ومیر در سن x، به‌عبارت دیگر، $\exp(\alpha_x)$ شکل کلی منحنی نرخ مرگ‌ومیر را نشان می‌دهد. β_x بیانگر میزان تغییرات در لگاریتم نرخ مرگ ومیر سن x به ازای تغییر در شاخص مرگ‌ومیر در طول زمان است. k_t شاخص مرگ‌ومیر در سال t است که روند اصلی موجود در لگاریتم طبیعی نرخ مرگ و میر تمام سنین در طول زمان را نشان می‌دهد.

www.SID.ir

$(m_{x,t})$ لگاریتم شدت مرگ‌ومیر را مدل می‌کند؛ مدل لی-کارتر با فرایند دو گامی بر داده‌ها سازگار می‌شود.

گام نخست: تخمین پارامتر را با استفاده از تجزیه مقدار منفرد(SVD[1]).

گام دوم: تعدیل k_t ، به‌منظور تناسب بهتر بر داده‌های فوت‌های مشاهده شده در هر سال، می‌باشد.

همان‌طور که مشخص است، هیچ متغیر توضیحی در سمت راست این رابطه وجود ندارد. بنابراین، مدل را نمی‌توان با استفاده از روش‌های رایج رگرسیونی برازش کرد. بنابراین، برای یافتن یک مجموعه جواب یکتا برای پارامترهای مدل، دو قید زیر به مدل اعمال می‌شود:

$$\sum_{t=t_1}^{t_1+T-1} k_t = 0 \qquad \sum_{X=X_1}^{X_N} \beta_x = 1 \tag{۸}$$

قید اول بیانگر آن است مجموع انحرافات از روند کلی مرگ ومیر در بازه زمانی $[t_1, t_1+T-1]$ صفر درنظر گرفته می‌شود. قید دوم نشان می‌دهد که مجموع پاسخ‌های گروه‌های سنی به تغییر در شاخص مرگ ومیر k_t برابر با واحد خواهد بود. به‌منظور به‌دست آوردن α, β, k از روش تجزیه ارزش منفرد استفاده شده است.

در گام بعدی که شامل پیش‌بینی شاخص مرگ‌ومیر است از فرمول زیر پیروی می‌کنیم:

$$k_{t+1} = k_t + \mu + \varepsilon_t \tag{۹}$$

k_{t+1} پیش بینی شاخص مرگ‌ومیر است. k_t میزان مرگ‌ومیر فعلی است.

جمله ثابت μ بیانگر میانگین تغییرات سالانه k_t است، که بر اساس آن می‌توان تغییرات بلندمدت مرگ‌ومیر را پیش‌بینی کرد، ε_t را می‌توان با توجه به هدف پژوهش به‌صورت تصادفی بیان کرد:

1. Singular Value Decomposition

www.SID.ir

$$\varepsilon_{t=\sigma z_{t+1}} \quad (۱۰)$$

که σ انحراف معیار شاخص مرگ‌ومیر است.

$$z_t \sim N(0,1) \quad (۱۱)$$

به این ترتیب ۵۰۰۰ هزار عدد نرمال تصادفی به‌منظور انجام روش مونت کارلو برای یافتن عدد q تولید شد.

عدد q ، میانگین موزون مرگ‌ومیر است:

$$q_t = \sum (w_x \times m_t) \quad (۱۲)$$

در این معادله w_x، وزن گروه‌های سنی برای سال مبدأ است که در این تحقیق سال ۲۰۱۶ به‌عنوان سال مبدأ در نظر گرفته شده است. نتایج به شرح جدول زیر است.

جدول ۳. جمعیت گروه‌های سنی ایران در سال ۲۰۱۶

گروه سنی	۰-۴	۵-۹	۱۰-۱۴	۱۵-۱۹	۲۰-۲۴	۲۵-۲۹	۳۰-۳۴	۳۵-۳۹	۴۰-۴۴	۴۵-۴۹	۵۰-۵۴	۵۵-۵۹	۶۰-۶۴	۶۵-۶۹	۷۰-۷۵
جمعیت در سال ۲۰۱۶	۰,۰۷۲	۰,۰۸۹	۰,۰۷۶	۰,۰۶۹	۰,۰۸۳	۰,۱۱۲	۰,۱۲۴	۰,۱۰۲	۰,۰۷۴	۰,۰۶۱	۰,۰۵۴	۰,۰۴۴	۰,۰۳۶	۰,۰۲۴	۰,۰۱۴

منبع: یافته‌های تحقیق

با توجه به این که مقدار α_x و β_x طی زمان ثابت است و مقدار k_{t+1} نیز از معادله حاصل می‌شود، در نتیجه می‌توان مقدار m را برای سال ۲۰۱۷، ۲۰۱۸و ۲۰۱۹ به‌دست آورد و با عنایت به این که از اعداد تصادفی است، نمی‌تواند مقدار ثابتی به خود بگیرد.

در گام بعدی، پس از آن که ۵۰۰۰ هزار بار عدد q ساخته شد و با توجه به آستانه γ که شرکت بیمه عمر برای شاخص اوراق مرگ‌ومیر لحاظ می‌کند. این شروط برای تعیین مقدار دریافتی سرمایه‌گذار به‌کار می‌رود.

www.SID.ir

$$\text{اصل پرداختی} = \max\left(1 - \sum_{t=2017}^{3} loss, 0\right) \quad (۱۳)$$

$$loss_t = \frac{\max(q_t - \gamma_1 q_0, 0) - \max(q_t - \gamma_2 q_0, 0)}{(\gamma_2 - \gamma_1) q_0} \quad (۱۴)$$

معادله (۱۴) بیان می‌کند که در صورتی که شاخص مرگ‌ومیر از γ_1 برابر سطح مبنا در سال ۲۰۱۶ تجاوز نکند، اصل دارایی سرمایه‌گذاری شده و سود آن مشخص‌شده در زمان انعقاد قرارداد به سرمایه‌گذار پرداخت می‌شود؛ و اگر مرگ و میر در پایان سال، بین γ_1 و γ_2 برابر سال مبنا باشد. سرمایه‌گذار سود را در پایان هر سال دریافت می‌کند ولی از اصل سرمایه کسر می‌شود و در نهایت اگر مرگ‌ومیر از γ_2 برابر سال ۲۰۱۶ بیشتر بود، سرمایه‌گذار اصل دارایی را از دست می‌دهد؛ این اوراق از نوع "اصل سرمایه در ریسک" است. به‌منظور دست‌یابی به قیمت مناسب این اوراق عایدی سرمایه‌گذار در پایان هر سال را به زمان صفر با استفاده از فرمول زیر تنزیل شد.

$$\mathrm{P} = \frac{\mathrm{y}}{(1+\mathrm{r})^1} + \frac{\mathrm{y}}{(1+\mathrm{r})^2} + \frac{\mathrm{a}+\mathrm{y}}{(1+\mathrm{r})^3} \quad (۱۵)$$

Yسود پرداختی در پایان هر سال به سرمایه‌گذار است، a مبلغ اصل سرمایه‌گذاری شده است. داده‌های مرگ‌ومیر ایران از اطلاعات پایگاه سازمان ملل استخراج شده است. گروه‌های سنی هر دو جنس زن و مرد از ۰ تا ۷۵ سال را به دسته‌های ۵ ساله تقسیم شده است. ۴-۰ ؛۹-۵؛ ... ۷۵-۷۰. داده‌ها از سال ۱۹۹۶ تا ۲۰۱۶ وجود دارد و برای سه سال آینده تخمین زده شده است.

۵ . یافته‌ها

جداول زیر مقدار تخمینی پارامترهای a_x،β_x، در مدل لی‌کارتر را نشان می‌دهد.

www.SID.ir

جدول٤. تخمین پارامترهای مدل لی کارتر

گروه سنی	۰-۴	۵-۹	۱۰-۱۴	۱۵-۱۹	۲۰-۲۴	۲۵-۲۹	۳۰-۳۴	۳۵-۳۹	۴۰-۴۴	۴۵-۴۹	۵۰-۵۴	۵۵-۵۹	۶۰-۶۴	۶۵-۶۹	۷۰-۷۴
a	-۴,۳۵	-۶,۰۲	-۵,۹۹	-۵,۵۱	-۵,۳۰	-۲,۲۶	-۵,۱۷	-۴,۳۴	-۴,۶۷	-۴,۳۴	-۳,۹۰	-۳,۴۷	-۳,۰۳	-۲,۴۷	-۱,۹۶
β	۰,۱۲	۰,۰۴	۰,۰۵	۰,۰۸۱	۰,۰۷	۰,۰۶	۰,۰۸	۰,۰۸	۰,۰۴	۰,۰۵	۰,۰۲	۰,۰۳	۰,۰۷	۰,۰۵	۰,۰۶

منبع: یافته‌های تحقیق

باتوجه به مقادیر برآورد پارامتر α_x، متوسط لگاریتم نرخ مرگ‌ومیر در گروه سنی کودکان و سالمندان بیشتر از دیگر گروه‌های سنی است. بنابراین، این دو گروه سنی بیشترین تأثیر را در سطح کلی مرگ‌ومیر دارند. از سوی دیگر، افزایش سطح مرگ و میر حدوداً از ۲۰ سالگی آغاز می‌شود که چنین الگویی در بیشتر کشورهای توسعه‌یافته نیز برقرار است؛ بسیاری از جمعیت‌شناسان، الگوی زندگی جوانان را دلیل این پیشامد می‌دانند.

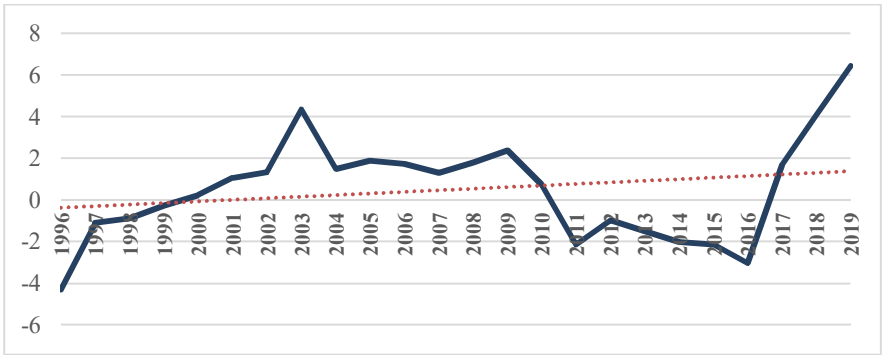
الگوی پارامتر β_x که بیانگر میزان حساسیت نسبی هر گروه سنی به تغییر در سطح عمومی مرگ‌ومیر می‌باشد، نشان می‌دهد که کودکان و سالمندان به ترتیب در معرض بیشترین و کمترین تأثیرپذیری هستند.جدول ۵ مقدار k_t را نشان می‌دهد.

جدول ۵. تخمین پارامتر k_t مدل لی کارتر

سال	۱۹۹۶	۱۹۹۷	۱۹۹۸	۱۹۹۹	۲۰۰۰	۲۰۰۱	۲۰۰۲	۲۰۰۳	۲۰۰٤	۲۰۰۵	۲۰۰٦
پارامتر k	-۴,۳۰	-۱,۰۹	-۰,۸۸	-۰,۲۴	۰,۲۳	۱,۰۶۴	۱,۳۴۱	۴,۳۵	۱,۴۷	۱,۸۹۲	۱,۷۳
سال	۲۰۰۷	۲۰۰۸	۲۰۰۹	۲۰۱۰	۲۰۱۱	۲۰۱۲	۲۰۱۳	۲۰۱۴	۲۰۱۵	۲۰۱۶	
پارامتر k	۱,۳۱	۱,۷۹	۲,۳۸	۰,۷۴	-۲,۱۲	-۰,۹۷	-۱,۵۰	-۲,۰	-۲,۱۴	-۳,۰۴	

منبع: یافته‌های تحقیق

www.SID.ir



نمودار ۲. پارامتر k_t

منبع: یافته‌های تحقیق

میانگین اصل پرداختی به سرمایه‌گذار در پایان سال سوم با احتساب ۵ هزار حالت شبیه‌سازی شده، ۰٫۸۱۵۸ می‌باشد که با تنزیل این عدد با نرخ سودهای متفاوت و آستانه‌های متفاوت، به قیمت‌های متفاوتی دست یافتیم که در جداول (۶) و (۷) نمایش داده شده است. لازم به ذکر است که محدوده آستانه در جدول اول، دو واحد تغییر می‌کند و در جدول دوم یک واحد تغییر می‌کند که تحلیل حساسیتی نیز علاوه‌بر نرخ سود بر آستانه انجام شده است.

جدول ٦. تحلیل حساسیت قیمت اوراق با نرخ سود و آستانه دو واحدی

قیمت	۰٫۷۸	۰٫۸۰	۰٫۸۲	۰٫۸۴	۰٫۸۷	۰٫۸۹	۰٫۹۱	۰٫۸۲	۰٫۸۴	۰٫۸۷	۰٫۸۹	۰٫۹۱	۰٫۹۳	۰٫۹۵
نرخ بهره	۰٫۱۵	۰٫۱۶	۰٫۱۷	۰٫۱۸	۰٫۱۹	۰٫۲۰	۰٫۲۱	۰٫۱۵	۰٫۱۶	۰٫۱۷	۰٫۱۸	۰٫۱۹	۰٫۲۰	۰٫۲۱
آستانه	−۱٫۱ ۱٫۳	−۱٫۱ ۱٫۳	−۱٫۱ ۱٫۳	−۱٫۱ ۱٫۳	−۱٫۱ ۱٫۳	−۱٫۱ ۱٫۳	−۱٫۱ ۱٫۳	−۱٫۲ ۱٫۴	−۱٫۲ ۱٫۴	−۱٫۲ ۱٫۴	−۱٫۲ ۱٫۴	−۱٫۲ ۱٫۴	−۱٫۲ ۱٫۴	−۱٫۲ ۱٫۴
قیمت	۰٫۸۵	۰٫۸۸	۰٫۹۰	۰٫۹۲	۰٫۹۴	۰٫۹۶	۰٫۹۸	۰٫۸۸	۰٫۹۰	۰٫۹۲	۰٫۹۴	۰٫۹۶	۰٫۹۹	۱٫۰۱
نرخ بهره	۰٫۱۵	۰٫۱۶	۰٫۱۷	۰٫۱۸	۰٫۱۹	۰٫۲۰	۰٫۲۱	۰٫۱۵	۰٫۱۶	۰٫۱۷	۰٫۱۸	۰٫۱۹	۰٫۲۰	۰٫۲۱
آستانه	−۱٫۳ ۱٫۵	−۱٫۳ ۱٫۵	−۱٫۳ ۱٫۵	−۱٫۳ ۱٫۵	−۱٫۳ ۱٫۵	−۱٫۳ ۱٫۵	−۱٫۳ ۱٫۵	−۱٫۴ ۱٫۶	−۱٫۴ ۱٫۶	−۱٫۴ ۱٫۶	−۱٫۴ ۱٫۶	−۱٫۴ ۱٫۶	−۱٫۴ ۱٫۶	−۱٫۴ ۱٫۶
قیمت	۰٫۸۹	۰٫۹۱	۰٫۹۴	۰٫۹۶	۰٫۹۸	۱٫۰۰	۱٫۲							
نرخ بهره	۰٫۱۵	۰٫۱۶	۰٫۱۷	۰٫۱۸	۰٫۱۹	۰٫۲۰	۰٫۲۱							
آستانه	−۱٫۵ ۱٫۷	−۱٫۵ ۱٫۷	−۱٫۵ ۱٫۷	−۱٫۵ ۱٫۷	−۱٫۵ ۱٫۷	−۱٫۵ ۱٫۷	−۱٫۵ ۱٫۷							

منبع: یافته‌های پژوهش

www.SID.ir

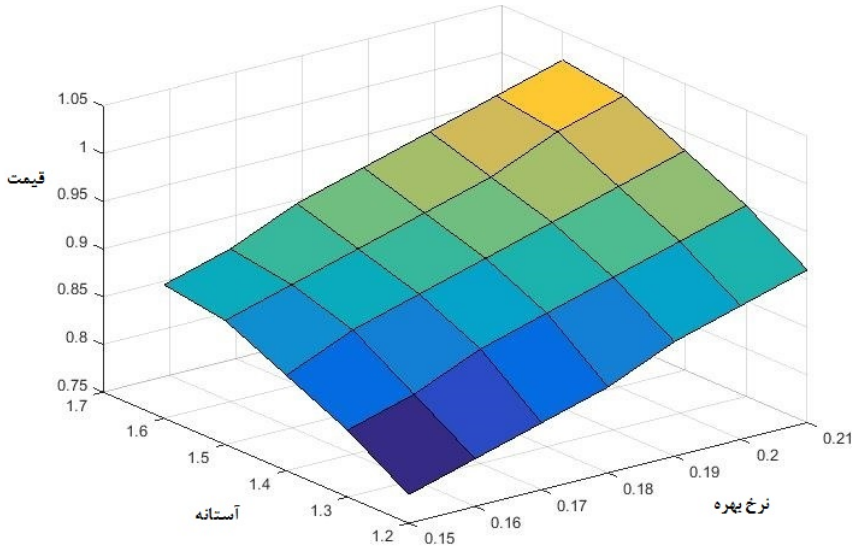
جدول ۷. تحلیل حساسیت قیمت اوراق با نرخ سود و آستانه یک واحدی

قیمت	۰٫۸۴	۰٫۸۶	۰٫۸۸	۰٫۹۱	۰٫۹۳	۰٫۹۵	۰٫۹۷	۰٫۸۷	۰٫۸۹	۰٫۹۱	۰٫۹۳	۰٫۹۵	۰٫۹۸	۱٫۰۰
نرخ بهره	۰٫۱۵	۰٫۱۶	۰٫۱۷	۰٫۱۸	۰٫۱۹	۰٫۲۰	۰٫۲۱	۰٫۱۵	۰٫۱۶	۰٫۱۷	۰٫۱۸	۰٫۱۹	۰٫۲۰	۰٫۲۱
آستانه	−۱٫۱ ۱٫۲	−۱٫۱ ۱٫۲	−۱٫۱ ۱٫۲	−۱٫۱ ۱٫۲	−۱٫۱ ۱٫۲	−۱٫۱ ۱٫۲	−۱٫۱ ۱٫۲	−۱٫۲ ۱٫۳	−۱٫۲ ۱٫۳	−۱٫۲ ۱٫۳	−۱٫۲ ۱٫۳	−۱٫۲ ۱٫۳	−۱٫۲ ۱٫۳	−۱٫۲ ۱٫۳
قیمت	۰٫۸۹	۰٫۹۱	۰٫۹۳	۰٫۹۵	۰٫۹۷	۱٫۰۰	۱٫۰۲	۰٫۹۰	۰٫۹۲	۰٫۹۴	۰٫۹۷	۰٫۹۹	۱٫۰۱	۱٫۰۳
نرخ بهره	۰٫۱۵	۰٫۱۶	۰٫۱۷	۰٫۱۸	۰٫۱۹	۰٫۲۰	۰٫۲۱	۰٫۱۵	۰٫۱۶	۰٫۱۷	۰٫۱۸	۰٫۱۹	۰٫۲۰	۰٫۲۱
آستانه	−۱٫۳ ۱٫۴	−۱٫۳ ۱٫۴	−۱٫۳ ۱٫۴	−۱٫۳ ۱٫۴	−۱٫۳ ۱٫۴	−۱٫۳ ۱٫۴	−۱٫۳ ۱٫۴	−۱٫۴ ۱٫۵	−۱٫۴ ۱٫۵	−۱٫۴ ۱٫۵	−۱٫۴ ۱٫۵	−۱٫۴ ۱٫۵	−۱٫۴ ۱٫۵	−۱٫۴ ۱٫۵
قیمت	۰٫۹۱	۰٫۹۳	۰٫۹۵	۰٫۹۸	۱٫۰۰	۱٫۰۲	۱٫۰۴							
نرخ بهره	۰٫۱۵	۰٫۱۶	۰٫۱۷	۰٫۱۸	۰٫۱۹	۰٫۲۰	۰٫۲۱							
آستانه	−۱٫۵ ۱٫۶	−۱٫۵ ۱٫۶	−۱٫۵ ۱٫۶	−۱٫۵ ۱٫۶	−۱٫۵ ۱٫۶	−۱٫۵ ۱٫۶	−۱٫۵ ۱٫۶							

منبع: یافته‌های پژوهش

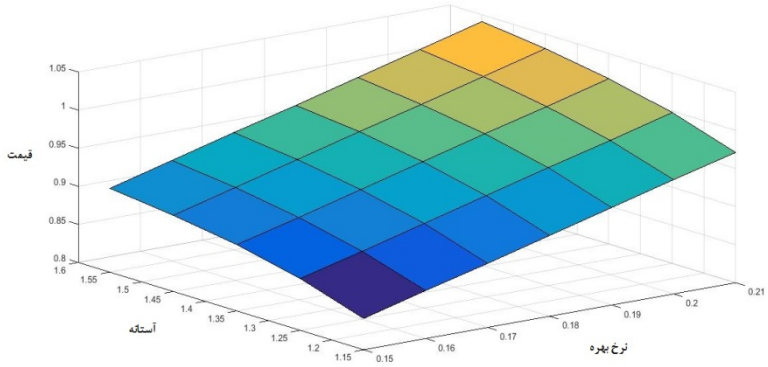
همان‌طور که در جداول (۷) و (۸) مشخص شده، کمترین قیمت درآستانه دو واحدی مقدار $(\gamma_1, \gamma_2 = 1.1\ , 1.3)$ با نرخ سودی ۱۵٪ است و در آستانه یک واحدی برابر با $(\gamma_1, \gamma_2 = 1.1\ , 1.2)$ با نرخ سودی ۱۵٪ می‌باشد. در مواردی مانند آستانه بین۱٫۵ و ۱٫۷ با بهره ۲۱٪ سرمایه‌گذار علاقه‌ای به سرمایه‌گذاری ندارد و در مواردی مانند $(\gamma_1, \gamma_2 =$ *1.5 , 1.6*$)$ با نرخ سود ۱۹٪، که قیمت برابر ۱ می‌شود و از آنجایی که فرض شده سرمایه‌گذار ۱ واحد پولی سرمایه‌گذاری می‌کند، سرمایه‌گذار بی‌تفاوت است.

www.SID.ir



نمودار ۳. نمودار نرخ سود، آستانه دو واحدی و قیمت

منبع: یافته‌های پژوهش



نمودار ٤. نمودار نرخ سود، آستانه‌ی یک واحدی و قیمت

منبع: یافته‌های پژوهش

www.SID.ir

٦. جمع‌بندی و پیشنهادات

در این مقاله، اوراق مرگ‌ومیر در بازارهای مختلف دنیا معرفی شد. سپس، با استفاده از مدل لی کارتر به پیش‌بینی نرخ مرگ‌ومیر طی سه سال آینده پرداخته شد و متعاقباً قیمت‌گذاری مرگ‌ومیر انجام شد.

با توجه با اعمال شرایط و تحلیل حساسیت نسبت به آستانه و نرخ سود، مشاهده شد که این اوراق می‌تواند در ایران برای سرمایه‌گذاران و پوشش‌دهندگان ریسک مرگ‌ومیر جذاب باشد. چرا که بر اثر کاهش نرخ مرگ‌ومیر در اکثر موارد شبیه‌سازی شده، اصل سرمایه و سود اوراق به‌طور کامل به سرمایه‌گذاران پرداخت شده است.

نتایج بررسی‌ها نشان داد بین نرخ سود و قیمت اوراق مرگ‌ومیر رابطه خطی وجود دارد که قیمت این اوراق با افزایش نرخ سود افزایش می‌یابد. همچنین، با افزایش مقادیر آستانه γ_1 و γ_2، قیمت این اوراق افزایش می‌یابد. زیرا دامنه تعیین شده توسط ناشر به سرمایه‌گذاران را مشخص می‌کند و هر چه آستانه بالاتر تعیین شود احتمال عدم پرداخت از جانب شرکت بیمه کاهش می‌یابد و ریسک سرمایه‌گذار پایین می‌آید.

بنابراین، پیشنهاد می‌شود در ایران از اوراق بیمه ای مرگ ومیر به عنوان ابزار پوشش ریسک در مقابل افزایش نرخ مرگ‌ومیر استفاده گردد که گاهی اوقات هزینه‌های سنگینی را نیز بر دولت متحمل می‌کند. همچنین، با توجه به کمبود ظرفیت بیمه اتکایی در کشور و اعمال محدودیت در دسترسی به بیمه‌های اتکایی خارجی ناشی از تحریم‌های مالی و بیمه‌ای بر علیه کشور، به‌نظر می‌رسد با طراحی سازوکار مناسب و منطبق با وضعیت داخلی، استقرار شرکت‌های واسط (SPV[1])، انتشار اوراق توسط آن‌ها می‌تواند ظرفیت بیمه‌ای کشور را تا حد زیادی گسترش دهد و همچنین به‌عنوان یک نوآوری مالی در بازار سرمایه، ابزار جدیدی به بازار سرمایه اضافه کند. البته, این نکته را باید مدنظر قرار گیرد که برای ایجاد این محصول باید در مرحله نخست مشروعیت

1. Special Purpose Vehicle (SPV)

www.SID.ir

آن مورد بررسی قرار گیرد که خارج از بحث پژوهشی این مقاله است. سرمایه‌گذاران می‌توانند با تشکیل سبد داریی با تعداد سهام کمتر در کنار تخصیص بهینه سرمایه بین سهام موجود در سبد دارایی به عملکرد مناسب دست یابند و هزینه‌های معاملاتی و مدیریتی سبدهای دارایی را کاهش دهند.

امید است با توسعه دانش بتوان انتشار این اوراق را با توجه به شرایط بازار داخلی انجام داد. در گام بعدی نیز قانون‌گذاران و نهادهای مربوطه بستر انتشار ابزارهای جدید را فراهم کنند و انتظار می‌رود ابزارهای مشتقه اوراق مرگ‌ومیر مانند آتی مرگ‌ومیر و تاخت مرگ‌ومیر در ایران امکان معامله را بیابند که در نهایت بتوان از ظرفیت بازار سرمایه برای مدیریت ریسک مرگ‌ومیر استفاده مناسب کرد و ریسک شرکت‌های بیمه و صندوق‌های بازنشستگی را به میزان فراوانی کاهش داد.

با نگاهی به صنعت سرمایه‌گذاری ریسک‌پذیر می‌توان فهمید که فرایندهای درونی این صنعت نیز دارای اهمیت زیادی هستند که با افزایش تعداد ابزارهای مبتنی بر نیاز بازار و طرح‌های نوآورانه متمایز، کاهش زمان فرایند تأسیس و انحلال شرکت و صندوق‌های سرمایه‌گذاری ریسک‌پذیر، فراگیری شاخص‌های ارزیابی موشکافانه و به‌کارگیری حرفه‌ای آن در فرایند سرمایه‌گذاری ریسک‌پذیر، همچنین طراحی سازوکار داوری توسط مراجع ذی‌صلاح برای ترفیع اختلافات بالقوه، به‌کارگیری قراردادهای استاندارد و حرفه‌ای، بهبود شرایط خروج با آماده‌سازی بستر عرضه اولیه در بورس و صندوق‌های سرمایه‌گذاری خصوصی می‌تواند توسعه یابد.

www.SID.ir

ملاحظات اخلاقی

حامی مالی

این مقاله حامی مالی ندارد.

مشارکت نویسندگان

تمام نویسندگان در آماده سازی این مقاله مشارکت کرده‌اند.

تعارض منافع

بنا به اظهار نویسندگان، در این مقاله هیچ‌گونه تعارض منافعی وجود ندارد.

تعهد کپی‌رایت

طبق تعهد نویسندگان، حق کپی‌راست (CC) رعایت شده است.

www.SID.ir

منابع

پیکارجو، کامبیز و داوودی رستمی، حانیه. (۱۳۸۸). توجیه انتشار اوراق بهادار فاجعه‌آمیز بر اساس داده‌های شبیه‌سازی شده خسارات زلزله احتمالی تهران. پژوهشنامه بیمه، ۲۴(۱): ۱۲۴-۹۵.

پیکارجو، کامبیز و حسین‌پور، بدریه. (۱۳۸۵). *اندازه گیری ارزش در معرض ریسک در شرکت‌های بیمه با استفاده از مدل GARCH*. *صنعت بیمه*، ۲۵(۴): ۵۸-۳۳.

تهرانی، رضا و نوربخش، عسگر. (۱۳۸۸). درس آموخته‌های بحران مالی جهانی برای نظام مالی ایران و جهان. دومین کنفرانس بین المللی توسعه نظام تأمین مالی در ایران، تهران، ۱۲ اسفندماه.

کمیجانی، اکبر.، کوششی، مجید و نیاکان، لیلی. (۱۳۹۲). برآورد و پیش‌بینی نرخ مرگ‌ومیر در ایران با استفاده از مدل لی-کارتر. *پژوهشنامه بیمه*، ۲۸(۴): ۱-۲۵.

گرگانی فیروزجاه، مصطفی و پیروی، علی. (۱۳۹۲). تعیین نرخ بازده انتظاری اوراق بهادار فاجعه‌آمیز با استفاده از رویکرد نظریه مقدار کرانی. *پژوهش‌ها و سیاست‌های اقتصادی*، ۲۱(۶۵): ۲۵۵-۲۸۰.

Barrieu, P. M. & Veraart, L. A. (2016). Pricing q-forward contracts: an evaluation of estimation window and pricing method under different mortality models. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2: 146-166.

Bauer, D., & Kramer, F. (2007). Risk and valuation of mortality contingent catastrophe bonds. *Available at SSRN: https://ssrn.com/abstract=2024255*.

Bauer, D., Börger, M., & Ruß, J. (2010). On the pricing of longevity-linked securities. *Insurance: Mathematics and Economics*, *46*(1): 139-149.

Biffis, E. (2005). Affine processes for dynamic mortality and actuarial valuations. *Insurance: mathematics and economics*, *37*(3): 443-468.

Cairns, A. J., Blake, D. & Dowd, K. (2006). A two-factor model for stochastic mortality with parameter uncertainty: theory and calibration. *Journal of Risk and Insurance*, *73*(4): 687-718.

www.SID.ir

Carter, L. R. & Lee, R. D. (1992). Modeling and forecasting US sex differentials in mortality. *International Journal of forecasting*, *8*(3): 393-411.

Chen, H. & Cox, S. H. (2009). Modeling mortality with jumps: Applications to mortality securitization. *Journal of Risk and Insurance*, *76*(3): 727-751.

Chen, H. & Cummins, J. D. (2010). Longevity bond premiums: The extreme value approach and risk cubic pricing. *Insurance: Mathematics and Economics*, *46*(1): 150-161.

Choudhry, M. (2013). An introduction to value-at-risk. John Wiley & Sons.

Cox, S. H., Lin, Y. & Pedersen, H. (2010). Mortality risk modeling: Applications to insurance securitization. *Insurance: Mathematics and Economics*, 46(1): 242-253.

Cummins, J. D. & Mahul, O. (2009). Catastrophe risk financing in developing countries: principles for public intervention. World Bank Publications.

Dahl, M. (2004). Stochastic mortality in life insurance: market reserves and mortality-linked insurance contracts. *Insurance: mathematics and economics*, 35(1): 113-136.

De Mey, J. (2007). Insurance and the capital markets. *The Geneva Papers on Risk and Insurance-Issues and Practice*, 32(1): 35-41.

Deng, Y., Brockett, P. L. & MacMinn, R. D. (2012). Longevity/mortality risk modeling and securities pricing. *Journal of Risk and Insurance*, 79(3): 697-721.

Duffie, D. (2010). *Dynamic asset pricing theory*. Princeton University Press.

Froot, K. A. (2001). The market for catastrophe risk: a clinical examination. *Journal of Financial Economics*, 60(2-3): 529-571.

Gallati, R. (2003). Risk management and capital adequacy. New York; London : McGraw-Hill.

Hunt, A. & Blake, D. (2020). Forward mortality rates in discrete time I: Calibration and securities pricing. *North American Actuarial Journal*, 25(1): S482-S5507.

Hunt, A. & Blake, D. (2020). On the structure and classification of mortality models. *North American Actuarial Journal*, 25(1): S215-S234.

www.SID.ir

Klein, R. W. & Wang, S. (2007). Catastrophe risk financing in the US and EU: A comparative analysis of alternative regulatory approaches. *Journal of Risk and Insurance*, 76(3): 607-637.

Lane, M. N. (2000). Pricing risk transfer transactions1. *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA*, 30(2): 259-293.

Lin, Y. & Cox, S. H. (2008). Securitization of catastrophe mortality risks. *Insurance: Mathematics and Economics*, 42(2): 628-637.

Wang, J. L., Jeng, V. & Peng, J. L. (2007). The impact of corporate governance structure on the efficiency performance of insurance companies in Taiwan. *The Geneva Papers on Risk and Insurance-Issues and Practice*, 32(2): 264-282.

Wang, Z. & Li, J. S. H. (2016). A DCC-GARCH multi-population mortality model and its applications to pricing catastrophic mortality bonds. *Finance Research Letters*, 16(c): 103-111.

Yang, S. S., Yue, J. C. & Huang, H. C. (2010). Modeling longevity risks using a principal component approach: A comparison with existing stochastic mortality models. *Insurance: Mathematics and Economics*, 46(1): 254-270.

Zanjani, G. (2002). Pricing and capital allocation in catastrophe insurance. *Journal of financial economics*, 65(2): 283-305.

Zhou, R., Li, J. S. H. & Tan, K. S. (2015). Economic pricing of mortality-linked securities: A tâtonnement approach. *Journal of Risk and Insurance*, 82(1): 65-96.

https://www.artemis.bm/news/q1-2017-catastrophe-premiums-up-at-renre-davinci-profits-decline/

www.SID.ir

پیوست ۱

جدول مرگ‌ومیر: تعداد افراد فوت شده به جمیعت میانه آن مربوط به گروه‌های سنی و سال‌های ۱۹۹۶ تا ۲۰۱۶.

$$m_x(t,x) = \frac{D(t,x)}{E(t,x)}$$

	۱۹۹۶	۱۹۹۷	۱۹۹۸	۱۹۹۹	۲۰۰۰	۲۰۰۱	۲۰۰۲
۰ تا ٤	۰.۰۰۹۶	۰.۰۱۱۷	۰.۰۱۲۹	۰.۰۱۳۵	۰.۰۱۵۵	۰.۰۱۶۰	۰.۰۱۶۷
۵ تا ۹	۰.۰۰۲۸	۰.۰۰۳۱	۰.۰۰۲۶	۰.۰۰۲۸	۰.۰۰۲۵	۰.۰۰۲۴	۰.۰۰۲۳
۱۰تا۱٤	۰.۰۰۲۷	۰.۰۰۳۴	۰.۰۰۲۷	۰.۰۰۳۳	۰.۰۰۲۹	۰.۰۰۲۶	۰.۰۰۲۳
۱۵ تا ۱۹	۰.۰۰۲۹	۰.۰۰۳۶	۰.۰۰۳۳	۰.۰۰۳۷	۰.۰۰۳۷	۰.۰۰۴۰	۰.۰۰۴۰
۲۰ تا ۲٤	۰.۰۰۳۷	۰.۰۰۳۸	۰.۰۰۳۹	۰.۰۰۴۲	۰.۰۰۴۷	۰.۰۰۵۰	۰.۰۰۵۳
۲۵تا۲۹	۰.۰۰۴۰	۰.۰۰۴۳	۰.۰۰۴۶	۰.۰۰۴۵	۰.۰۰۴۶	۰.۰۰۵۲	۰.۰۰۵۴
۳۰تا۳٤	۰.۰۰۲۹	۰.۰۰۵۳	۰.۰۰۵۴	۰.۰۰۵۳	۰.۰۰۵۵	۰.۰۰۶۱	۰.۰۰۶۳
۳۵ تا۳۹	۰.۰۰۳۴	۰.۰۰۶۱	۰.۰۰۶۳	۰.۰۰۶۱	۰.۰۰۶۴	۰.۰۰۷۰	۰.۰۰۷۲
٤۰تا٤٤	۰.۰۰۷۸	۰.۰۰۸۵	۰.۰۰۸۹	۰.۰۰۹۳	۰.۰۰۹۹	۰.۰۱۰۶	۰.۰۱۰۶
٤۵ تا٤۹	۰.۰۱۰۵	۰.۰۱۲۰	۰.۰۱۱۹	۰.۰۱۲۰	۰.۰۱۲۶	۰.۰۱۳۷	۰.۰۱۳۸
۵۰تا۵٤	۰.۰۲۰۶	۰.۰۲۱۱	۰.۰۲۱۵	۰.۰۲۰۷	۰.۰۲۰۵	۰.۰۲۰۹	۰.۰۲۰۸
۵۵-۵۹	۰.۰۲۵۶	۰.۰۲۸۰	۰.۰۳۰۲	۰.۰۳۰۶	۰.۰۳۱۷	۰.۰۳۳۵	۰.۰۳۴۷
٦۰-٦٤	۰.۰۳۳۵	۰.۰۳۷۵	۰.۰۴۱۱	۰.۰۴۴۳	۰.۰۴۶۹	۰.۰۵۴۴	۰.۰۵۸۵
٦۵-٦۹	۰.۰۶۶۲	۰.۰۷۲۴	۰.۰۷۸۰	۰.۰۸۲۴	۰.۰۸۵۵	۰.۰۹۷۳	۰.۱۰۲۲
۷۰-۷٤	۰.۰۷۸۰	۰.۱۳۳۷	۰.۱۴۶۱	۰.۱۵۳۶	۰.۱۵۵۶	۰.۱۶۴۰	۰.۱۶۶۸
۷۵و بیشتر	۰.۶۴۸۹	۰.۶۶۸۳	۰.۶۹۰۷	۰.۷۱۲۴	۰.۷۲۸۶	۰.۷۱۷۳	۰.۷۳۸۰

www.SID.ir

	۲۰۰۳	۲۰۰۴	۲۰۰۵	۲۰۰۶	۲۰۰۷	۲۰۰۸	۲۰۰۹
۰ تا ۴	۰.۰۱۸۹	۰.۰۱۵۴	۰.۰۱۵۸	۰.۰۱۸۰	۰.۰۱۷۳	۰.۰۱۷۹	۰.۰۱۵۸
۵ تا ۹	۰.۰۰۴۶	۰.۰۰۲۴	۰.۰۰۲۶	۰.۰۰۲۴	۰.۰۰۲۲	۰.۰۰۲۴	۰.۰۰۲۶
۱۰تا۱۴	۰.۰۰۴۳	۰.۰۰۲۶	۰.۰۰۲۸	۰.۰۰۲۲	۰.۰۰۲۱	۰.۰۰۲۳	۰.۰۰۳۶
۱۵ تا ۱۹	۰.۰۰۶۰	۰.۰۰۴۶	۰.۰۰۵۰	۰.۰۰۴۷	۰.۰۰۴۵	۰.۰۰۵۰	۰.۰۰۵۰
۲۰ تا ۲۴	۰.۰۰۶۹	۰.۰۰۵۳	۰.۰۰۵۵	۰.۰۰۵۵	۰.۰۰۵۶	۰.۰۰۶۳	۰.۰۰۶۷
۲۵تا۲۹	۰.۰۰۷۴	۰.۰۰۵۵	۰.۰۰۵۹	۰.۰۰۵۷	۰.۰۰۵۴	۰.۰۰۵۷	۰.۰۰۶۶
۳۰تا۳۴	۰.۰۰۸۱	۰.۰۰۶۵	۰.۰۰۶۷	۰.۰۰۶۵	۰.۰۰۶۲	۰.۰۰۶۳	۰.۰۰۷۰
۳۵ تا۳۹	۰.۰۰۹۱	۰.۰۰۷۲	۰.۰۰۷۷	۰.۰۰۷۷	۰.۰۰۷۶	۰.۰۰۸۰	۰.۰۰۹۰
۴۰تا۴۴	۰.۰۱۱۸	۰.۰۱۰۰	۰.۰۰۹۹	۰.۰۱۰۰	۰.۰۰۹۴	۰.۰۰۹۴	۰.۰۱۰۷
۴۵ تا۴۹	۰.۰۱۵۶	۰.۰۱۵۳	۰.۰۱۵۵	۰.۰۱۵۶	۰.۰۱۴۸	۰.۰۱۴۴	۰.۰۱۵۳
۵۰تا۵۴	۰.۰۲۱۴	۰.۰۲۰۵	۰.۰۲۱۱	۰.۰۲۱۴	۰.۰۲۱۴	۰.۰۲۱۹	۰.۰۲۲۶
۵۵–۵۹	۰.۰۳۷۷	۰.۰۳۶۶	۰.۰۳۴۵	۰.۰۳۲۸	۰.۰۳۱۸	۰.۰۳۰۹	۰.۰۲۹۵
۶۰–۶۴	۰.۰۶۱۸	۰.۰۵۷۲	۰.۰۵۷۱	۰.۰۵۷۶	۰.۰۵۷۳	۰.۰۵۷۳	۰.۰۵۴۶
۶۵–۶۹	۰.۱۰۵۲	۰.۰۹۶۲	۰.۰۹۵۹	۰.۰۹۳۰	۰.۰۹۱۵	۰.۰۹۰۶	۰.۰۸۴۸
۷۰–۷۴	۰.۱۶۶۰	۰.۱۵۳۵	۰.۱۵۲۶	۰.۱۵۶۰	۰.۱۵۹۴	۰.۱۵۲۷	۰.۱۴۱۱
۷۵و بیشتر	۰.۷۵۰۶	۰.۷۴۸۸	۰.۷۳۴۴	۰.۷۳۱۹	۰.۷۴۰۱	۰.۷۱۶۴	۰.۶۷۴۲

www.SID.ir

	۲۰۱۰	۲۰۱۱	۲۰۱۲	۲۰۱۳	۲۰۱۴	۲۰۱۵	۲۰۱۶
۰ تا ٤	۰.۰۱۱۸	۰.۰۱۰۷	۰.۰۱۰۲	۰.۰۰۸۵	۰.۰۰۸۱	۰.۰۰۸۶	۰.۰۰۸۱
۵ تا ۹	۰.۰۰۲۲	۰.۰۰۳۳	۰.۰۰۲۰	۰.۰۰۱۸	۰.۰۰۱۹	۰.۰۰۱۶	۰.۰۰۱۷
۱۰تا۱٤	۰.۰۰۲۳	۰.۰۰۲۱	۰.۰۰۲۰	۰.۰۰۱۹	۰.۰۰۲۰	۰.۰۰۱۹	۰.۰۰۱۷
۱۵ تا ۱۹	۰.۰۰۴۶	۰.۰۰۱۷	۰.۰۰۴۲	۰.۰۰۴۱	۰.۰۰۴۰	۰.۰۰۴۲	۰.۰۰۴۰
۲۰ تا ۲٤	۰.۰۰۶۴	۰.۰۰۳۲	۰.۰۰۵۳	۰.۰۰۵۰	۰.۰۰۴۸	۰.۰۰۴۸	۰.۰۰۴۶
۲۵تا۲۹	۰.۰۰۶۳	۰.۰۰۵۱	۰.۰۰۵۱	۰.۰۰۴۹	۰.۰۰۴۷	۰.۰۰۴۵	۰.۰۰۴۴
۳۰تا۳٤	۰.۰۰۶۵	۰.۰۰۶۹	۰.۰۰۵۳	۰.۰۰۵۰	۰.۰۰۴۸	۰.۰۰۴۷	۰.۰۰۴۴
۳۵ تا۳۹	۰.۰۰۷۶	۰.۰۰۸۱	۰.۰۰۶۵	۰.۰۰۶۲	۰.۰۰۶۰	۰.۰۰۵۷	۰.۰۰۵۳
٤۰تا٤٤	۰.۰۰۹۳	۰.۰۰۸۲	۰.۰۰۹۰	۰.۰۰۹۳	۰.۰۰۸۸	۰.۰۰۸۴	۰.۰۰۷۳
٤۵ تا٤۹	۰.۰۱۳۶	۰.۰۱۰۵	۰.۰۱۲۰	۰.۰۱۲۰	۰.۰۱۱۳	۰.۰۱۲۰	۰.۰۱۱۲
۵۰تا۵٤	۰.۰۲۱۶	۰.۰۱۵۲	۰.۰۱۹۶	۰.۰۱۹۶	۰.۰۱۸۴	۰.۰۱۸۲	۰.۰۱۶۴
۵۵–۵۹	۰.۰۲۹۹	۰.۰۲۵۳	۰.۰۲۹۴	۰.۰۳۰۳	۰.۰۳۰۲	۰.۰۳۰۲	۰.۰۲۷۵
٦۰–٦٤	۰.۰۵۰۶	۰.۰۴۴۶	۰.۰۴۴۰	۰.۰۴۳۴	۰.۰۴۲۰	۰.۰۴۳۰	۰.۰۴۰۱
٦۵–٦۹	۰.۰۸۶۷	۰.۰۷۴۳	۰.۰۸۳۳	۰.۰۸۵۷	۰.۰۸۰۱	۰.۰۷۵۰	۰.۰۶۳۶
۷۰–۷٤	۰.۱۴۴۷	۰.۱۰۱۷	۰.۱۳۲۸	۰.۱۳۵۸	۰.۱۳۲۰	۰.۱۳۳۴	۰.۱۲۱۴
۷۵و بیشتر	۰.۷۴۷۷	۰.۸۱۴۹	۰.۷۹۶۲	۰.۸۶۰۷	۰.۸۵۱۹	۰.۸۹۸۴	۰.۸۹۱۴

www.SID.ir

پیوست ۲

مقادیر منفرد:

برای ماتریس مختلط A_{m*n}، ماتریس A^*A و AA^* یک ماتریس هرمیتی و مثبت معین است. اگر $m<n$ باشد، جذر مقادیر ویژه AA^* و اگر $m>n$ باشد جذر مقادیر A^*A را مقادیر منفرد[1] ماتریس A می‌نامند. برای ماتریس حقیقی A_{m*n} جذر مقادیر ویژه ماتریس متقارن A^TA و AA^T در نظرگرفته می‌شود.

تجزیه ماتریس‌ها بر اساس مقادیر منفرد

یکی از مهم‌ترین روش‌های تجزیه ماتریس‌ها، تجزیه بر اساس مقادیر منفرد[2] است. در این روش یک ماتریس مانند A_{m*n} با رتبه k را می‌توان به‌صورت زیر تجزیه کرد.

$$A = U\Sigma V^T$$

که در آن $U_{m\times n} = [U_1 \dots U_M]$ و $V_{m\times n} = [V_1 \dots V_n]$ ماترس‌های متعامد هستند. ستون‌های ماتریس $U_{m\times n}$ از بردارهای ویژه یکا متعامد ماتریس AA^T و ستون‌های $V_{m\times n}$ از بردارهای ویژه یکا متعامد ماتریس A^TA تشکیل می‌شوند و $\Sigma_{m\times n}$ یک ماتریس قطری است که عناصر روی قطر آن مقادیر منفرد غیرصفر ماتریس AA^T یا A^TA می‌باشند.

در اینجا $V' = (v_{ji})$ که ترانهاده ماتریس $V=(v_{ij})$ است. همچنین (A.1) به‌شرح زیر نمایش داده می‌شود.

$$A = \begin{bmatrix} u_{1.1} & \cdots & \cdots & u_{1.m} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ u_{m.1} & \cdots & \ddots & u_{m.m} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \rho_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \rho_{m-1} & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \rho_m & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_{1.1} & \cdots & v_{1.m} & \cdots & v_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ v_{m.1} & \ddots & v_{m.m} & \ddots & v_{m.n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ v_{n,1} & \cdots & \cdots & \cdots & v_{n.n} \end{bmatrix}$$

1. Singular Value
2. Singular Value Decomposition

www.SID.ir

در عمل برای $A = [\ln(m_{x,t}) - \alpha_x], x = 1, \cdots, X \,.\, t = 1, \cdots, T$ برای مرتبه ۱ به‌صورت تقریبی به‌صورت زیر است.

$\hat{Y}_{x,1}^{(1)} = \rho_1 U_{x,1} V_{1,t} = \beta_x^{(1)} k_x^{(1)}$ که در اینجا $\hat{\beta}^{(1)} = (u_{1,1} \quad u_{2,1} \quad \cdots \quad u_{X,1})'$ و $\hat{k}^{(1)} = \rho_1 \times (v_{1.1} \quad v_{2,1} \quad \cdots \quad v_{T,1})$ است.

و با توجه به محدودیت ضرایب مقدار نهایی را تخمین زده می‌شود.

$\hat{\beta}^{(1)} = (1/\sum_x u_{x,1})(u_{1,1} \quad u_{2,1} \quad \cdots \quad u_{X,1})'$ و $\hat{k}^{(1)} = (\sum_x u_{x,1}) \times s_1 \times$ *(v1,1v2,1⋯vT,1)*

www.SID.ir