مازاد سرمایه شرکت بیمه بلافاصله قبل و در زمان ورشکستگی در فرآیند ریسک کلاسیک با عامل اغتشاش

تاریخ دریافت مقاله: ۱۳۸۹/۰۴/۲۲
تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۸۹/۰۹/۱۵

دکتر رضا پورطاهری[۱]
جواد کابوسی[۲]

چکیده

هدف این تحقیق درنظرگرفتن مدل ریسک کلاسیک است که با عامل فرآیند وینر، به مدل ریسک کلاسیک با عامل اغتشاش تبدیل می‌شود. در این تحقیق فرمول‌هایی صریح برای تابع چگالی احتمال توأم و حاشیه‌ای مقدار مازاد سرمایه بلافاصله قبل و در زمان ورشکستگی و همچنین تابع چگالی احتمالی برای مقادیر و اندازه خسارت‌هایی که باعث ورشکستگی شده‌اند، به‌دست‌می‌آوریم. انجام چنین تحقیقی بدین سبب لازم است که در مدل ریسک کلاسیک، میزان دقیقی از احتمال میزان مازاد سرمایه باتوجه به عواملی چون سود و تورم و ... را به مدیریت ریسک گزارش نمی‌کند و این احتمالات با اطلاعات و داده‌های واقعی بیمه هم‌خوانی چندانی ندارند. اضافه‌کردن عامل اغتشاش به مدل کلاسیک را می‌توان از دو دیدگاه اضافه‌شدن عدم‌اطمینانی جدید در دریافتی‌های حق‌بیمه و یا کل خسارت تفسیر کرد. در ادامه باتوجه به فرمول‌های نظری به‌دست‌آمده برای تابع چگالی احتمال‌های محاسبه‌شده، توزیع احتمال فاز نوع معرفی می‌شود و با استفاده از ویژگی‌های ماتریسی در این توزیع، ارتباطی را بین فرمول‌های تابع چگالی احتمال‌های محاسبه‌شده و توزیع فاز نوع برقرار و نمودار توزیع احتمال‌های مورد نظر را رسم می‌کنیم.

واژگان کلیدی: *تئوری ورشکستگی، مازاد سرمایه قبل و در زمان ورشکستگی، توزیع فاز نوع*

---

۱. عضو هیئت علمی دانشگاه علامه طباطبایی، دانشکده اقتصاد (Email: Taher121@Yahoo.com)

۲. کارشناس‌ارشد علوم محاسبات و برنامه‌ریزی بیمه، دانشگاه علامه طباطبایی، دانشکده بیمه اکو(نویسنده مسئول)
(Email: Javad.actuary@Gmail.com)

۱. مقدمه

مدیران شرکت‌های بیمه در بازار رقابتی بیمه همواره سعی در پیداکردن نرخ مناسبی برای حق‌بیمه در هر رشته بیمه‌ای برای نیل به اهدافشان از جمله جلب مشتریان بیشتر و سودآوری برای شرکت بیمه دارند. شرکت بیمه‌ای را تصور کنید که سعی در ارائه خدمات بیمه‌ای در رشته بیمه‌ای جدیدی دارد، تصمیم‌گیری در مورد نرخ حق‌بیمه و سرمایه اولیه مورد نیاز برای این رشته بیمه‌ای باتوجه به اطلاعات تاریخی خسارت برای این رشته بیمه‌ای، اهمیت بسزایی دارد. مدل‌های ریسک، روند میزان سرمایه شرکت بیمه در رشته بیمه‌ای مورد نظر را دنبال کرده و احتمال ورشکستگی را محاسبه می‌کند؛ دراین‌صورت باتوجه به احتمال به‌دست‌آمده می‌توان در تخصیص مقداری مناسب برای حق‌بیمه تصمیم‌گیری کرد.

فرآیند ریسک کلاسیک را درنظربگیرید: $U(t)=u+ct-\sum_{i=۱}^{N(t)} X_i$

$U(t)$: میزان سرمایه شرکت در زمان t؛

$u \geq ۰$: مقدار سرمایه اولیه‌ای است که شرکت تمایل به سرمایه‌گذاری در یک رشته خاص بیمه‌ای دارد؛

c: مقدار نرخ ثابتی از حق‌بیمه‌هایی است که شرکت در واحد زمان از بیمه‌گذاران دریافت می‌کند؛

$\{X_i, i \geq ۱\}$: دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی و هم‌توزیع با تابع توزیع F_X و میانگین μ_X است که مقادیر خسارت iام را برای شرکت نشان می‌دهد؛

مؤلفه $\{N(t), t \geq ۰\}$: تعداد خسارت‌هایی است که برای شرکت بیمه تا زمان t اتفاق می‌افتد.

در این تحقیق فرض می‌کنیم تعداد خسارت‌ها تا زمان t از یک فرآیند پواسون با شدت وقوع λ در واحد زمان پیروی کند. اگرچه حالات دیگری برای توزیع تعداد خسارت‌ها ممکن است، فرض شود.

همچنین فرض دیگری که برای شرکت‌های بیمه می‌پذیریم این است که هزینه‌های سربار، مثبت درنظرگرفته‌می‌شوند؛ به‌عبارت‌دیگر میزان حق‌بیمه دریافتی از میزان شدت خسارت در میانگین خسارت بیشتر است یا به‌صورت ریاضی داریم:

$$q = \frac{c-\lambda\mu}{c} > ۰$$

حال مدل ریسک کلاسیک را درنظربگیرید که یک عامل اغتشاش فرآیند براونی به آن اضافه شود:

$$U(t)=u+ct-\sum_{i=۱}^{N(t)} x_i +\sigma B_t \qquad (۱)$$

عبارت σB_t دو ویژگی مهم دارد:

- σB_t دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس $\sigma^۲ t$ است.
- σB_t مستقل از خسارت کل، $\sum_{i=۱}^{N(t)} x_i$ است.

عامل اغتشاش در رابطه (۱) یک عدم‌اطمینان اضافی برای میزان خسارت کل بیان می‌کند یا به‌عبارت‌دیگر این عبارت یک عدم‌اطمینانی را به میزان درآمد از حق‌بیمه‌ها اضافه می‌کند.

برای مدل معرفی‌شده این مفاهیم را درنظرمی‌گیریم:

T زمان ورشکستگی: اولین زمانی است که مازاد سرمایه به زیر صفر می‌رسد؛ یعنی $T = \inf\{t, U(t) \le ۰\}$.

$U(T^-)$ میزان سرمایه بلافاصله قبل از ورشکستگی و $|U(T)|$ مقدار مازاد سرمایه در لحظه ورشکستگی است.

احتمالات ورشکستگی و بقای شرکت نیز به‌این‌صورت تعریف می‌شوند:

$$\psi(u)= p(U(T) < ۰, \forall T < \infty) \qquad (۲)$$

$$\varphi(u)=۱-\psi(u) \qquad (۳)$$

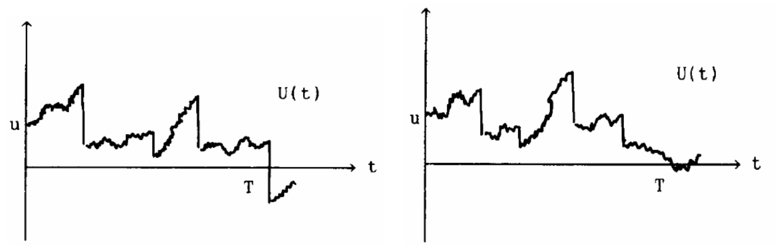
درک بهتری از تفاوت در رخداد ورشکستگی در مدل کلاسیک و مدل با عامل اغتشاش به‌این‌صورت است که در مدل ریسک با عامل اغتشاش دو عامل به‌طورجداگانه باعث رخداد ورشکستگی می‌شود. بنابراین احتمال ورشکستگی به‌این‌صورت تجزیه می‌شود:

$$\psi(u) = \psi_d(u)+\psi_s(u)$$

که $\psi_d(u)$ احتمال ورشکستگی به‌علت نوسانات در مازاد سرمایه را نشان می‌دهد. دراین‌حالت میزان مازاد سرمایه در زمان ورشکستگی برابر صفر است. $\psi_s(u)$ احتمال ورشکستگی به علت رخ‌دادن خسارت را نشان می‌دهد. دراین‌حالت مازاد سرمایه در زمان ورشکستگی منفی است (نمودار۱). به‌علاوه با استفاده از ویژگی عامل اغتشاش در همسایگی نقطه صفر می‌توان نشان داد:

$$\varphi(0)= \psi_s(0)= 0 \quad , \qquad \psi(0)= \psi_d(0)= 1$$

نمودار۱. ورشکستگی به‌علت عامل اغتشاش و رخداد خسارت



(Dufresne & Gerber, 1991)

در این تحقیق به مباحث میزان مازاد سرمایه در فرآیند ریسک کلاسیک و با عامل اغتشاش خواهیم پرداخت. نخستین بار مدل ریسک کلاسیک را فیلیپ لاندبرگ[1] (۱۹۰۳) معرفی کرد و به‌طورگسترده کرامر[2] (۱۹۳۰) مورد مطالعه قرار داد. بنابراین غالباً به نام مدل کرامر–لاندبرگ شناخته می‌شود. اما مدل ریسک در مازاد سرمایه با

1. Filip Lundberg
2. Cramer

عامل اغتشاش را نخستین بار گربر[1] (۱۹۷۰) معرفی کرد که عامل اغتشاش یک فرآیند براونی بود. گربر و شیو[2] به بررسی توزیع احتمال توأم مازاد سرمایه قبل و بعد از ورشکستگی پرداختند. در ادامه این کارها گربر و لندری[3]، تاسی[4] و رن[5]، روش‌هایی متفاوتی را برای محاسبه احتمال ورشکستگی و تابع چگالی‌های احتمال مازاد سرمایه قبل و در زمان ورشکستگی معرفی کردند. در این مقاله پیرو مقاله رن (۲۰۰۷) به بررسی بیشتر و پیداکردن روش‌هایی آسان‌تری برای دستیابی به هدفمان می‌پردازیم.

در این مقاله نخست به بررسی مفهوم کاهش در میزان مازاد سرمایه به‌علت خسارت[6] می‌پردازیم و با استفاده از تعاریف متغیرهای مربوطه و تابع توزیع آنها فرمول‌هایی تئوری برای تابع چگالی احتمال توأم و حاشیه‌ای مازاد سرمایه قبل و در زمان ورشکستگی به‌دست‌می‌آوریم. در پایان نشان می‌دهیم زمانی که توزیع خسارت‌ها از توزیع احتمال فاز نوع[7] پیروی کند تمامی کمیت‌های احتمالی به آسانی قابل محاسبه است و این بحث را با معرفی یک مثال به پایان می‌رسانیم.

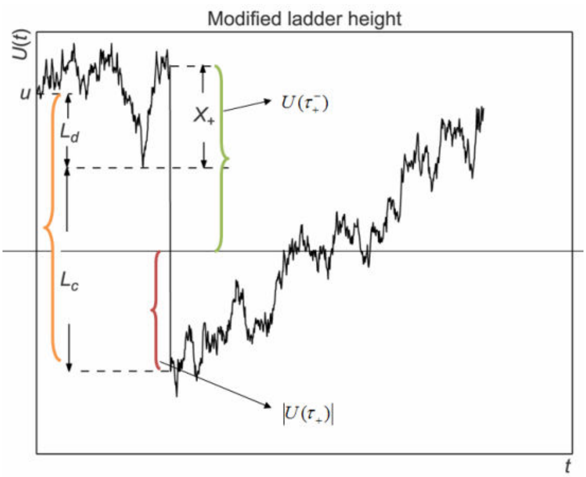
۲. بیشترین کاهش در مازاد سرمایه به‌علت خسارت

مقادیر $0<\sigma_1<\sigma_2<...$ را که دلالت بر زمان وقوع هر خسارت دارد، درنظربگیرید، به‌طوری‌که $T_i = \sigma_i - \sigma_{i-1}$ و $i = 1,2,3,...$ متغیرهای تصادفی مستقل و با توزیع مشترک نمایی باشند. τ_+ را زمانی از وقوع خسارت‌ها درنظرمی‌گیریم که مقدار مازاد سرمایه در آن زمان کمترین مقدار خود را تا آن زمان گرفته است.

1. Gerber
2. Gerber & Shiu, 1997
3. Gerber & Landry, 1998
4. Tsai, 2001
5. Ren, 2005; 2007
6. Modified Ladder Height
7. Phase Type Probability Distribution

متغیر $L_d = u\text{-inf}\,(U(t):0<t<\tau_+)$ نشان‌دهنده تفاوت بین مقدار سرمایه اولیه و کمترین مقدار مازاد سرمایه تا زمان τ_+ است. متغیر L_c تفاوت بین مقدار سرمایه اولیه و مازاد سرمایه در زمان τ_+ و مقدار L_d است؛ یعنی $L_c = u - U(t_+) - L_d$. متغیر دیگری که معرفی می‌شود به‌صورت تفاوت میزان مازاد سرمایه و تفاوت سرمایه اولیه با مقدار L_d است $X_+ = U(t_+^-) - u + L_d$. نمودار ۲ تعبیری شهودی از کاهش سرمایه به‌علت خسارت را نشان می‌دهد.

نمودار ۲. بیشترین کاهش در مازاد سرمایه به‌علت خسارت



(Ren, 2007)

رابطه احتمالی (۴) در ارتباط با متغیرهای X_+, L_d, L_c در رابطه (۱۳.۲.۱۳) کتاب فرآیندهای تصادفی برای بیمه و امور مالی رلسکی[1]، ثابت شده است.

$$pr(X_+ \ge x, L_d \ge y, L_c \ge z, t_+ < \infty) = e^{\frac{-2cy}{\delta^2}} \frac{\lambda}{c} \int_{x+y}^{\infty} \overline{F_X}(v)\,dv \qquad (۴)$$

با استفاده از رابطه (۴) به آسانی می‌توان ثابت کرد:

1. Rolski et al, 1999

$$H_1(x) = p(L_d \le x) = 1 - e^{-Bx} \qquad , B=\frac{2c}{\sigma^2} \tag{5}$$

به طور مشابه از رابطه (۴) به آسانی ثابت می‌شود:

$$\lim_{x\to-\infty, y\to-\infty} p(X_+ > x, L_d > y, L_c > z, \tau_+ <\infty) = p(L_c > z),$$

$$H_2(z) = p(L_c \le z) = \frac{\lambda}{c}\int_0^z (1 - F_X(y))\,dy \tag{6}$$

همچنین برای به‌دست‌آوردن تابع چگالی احتمال توام X_+, L_c با میل‌دادن y به سمت صفر در رابطه (۴) (کمترین مقدار L_d)، این رابطه حاصل خواهد شد:

$$\lim_{y\to 0} p(X_+ > x, L_d > y, L_c > z, \tau_+ <\infty)$$

$$= \frac{\lambda}{c}\int_{x+z}^{\infty} (1 - F_X(\xi))d\xi \qquad x, z > 0 \tag{7}$$

نماد $f_{+-}(x,z)$ را برای تابع چگالی احتمال توأم ناقص X_+, L_c به‌کارمی‌بریم و مقدار آن با مشتق‌گیری از رابطه (۷) نسبت‌به x, z به‌این‌صورت حاصل می‌شود:

$$f_{+-}(x,z) = \frac{\lambda}{c} f_X(x+z) \tag{8}$$

در این بخش مقادیر متغیرهای X_+, L_d, L_c و توابع چگالی احتمال مورد نیاز معرفی شدند و برخی از ویژگی‌های مورد نیاز مفهوم بیشترین کاهش سرمایه به‌علت خسارت بیان شد. حال با استفاده از این مفاهیم و ارتباط نزدیک آنها با احتمالات ورشکستگی به بیان روش‌هایی برای به‌دست‌آوردن احتمالات ورشکستگی می‌پردازیم.

۳. تابع چگالی احتمال توأم مقدار سرمایه بلافاصله قبل و در زمان ورشکستگی

هدف ما در این بخش پیداکردن تابع چگالی احتمال توأم صریح با استفاده از مفاهیمی است که معرفی شدند و تکنیک‌هایی است که در ادامه استفاده خواهیم کرد.

بدین‌منظور ابتدا تابع بقا را به‌صورت توابعی از متغیرهای L_d, L_c بیان می‌کنیم. اثبات این رابطه را می‌توان به‌طورخلاصه در مقاله دفرسن و گربر[1] و به‌طورکامل در پایان‌نامه مربوط‌به همین مقاله مشاهده کرد[2]:

$$\begin{aligned}\varphi(u) &= q\sum_{n=0}^{\infty}(1-q)^n\, H_1^{*(n+1)} * H_2^{*(n)}(u)\\ &\approx q\left(\sum_{n=0}^{\infty} H_3^{*(n)}\right) * H_1(u) \qquad (9)\\ &= qH_4 * H_1(u)\end{aligned}$$

دراین‌رابطه توابع H_1 و H_2 به‌ترتیب در رابطه‌های (۵) و (۶) معرفی شده‌اند و

$$H_4 = \sum_{n=0}^{\infty} H_3^{*(n)}, H_3 = H_1 * H_2$$

اکنون تابع چگالی احتمال توأم را پیدا می‌کنیم و مسئله را به‌این‌صورت شرطی می‌کنیم: آیا نخستین کاهش سرمایه به‌علت وقوع خسارت باعث وقوع ورشکستگی شده است یا خیر. می‌دانیم باید حداقل یک کاهش سرمایه به‌علت وقوع خسارت برای وقوع ورشکستگی رخ دهد. اگر نماد $h_{+-}(x, y, u)\,dxdy$ نشان‌دهنده احتمال وقوع ورشکستگی در نخستین کاهش سرمایه به‌علت وقوع خسارت برای مقادیر مازاد ورشکستگی بین $(x, x+dx)$ و کسری در زمان ورشکستگی بین $(y, y+dy)$ باشد، سه شرط مهم در این مورد باید درنظرگرفته‌شود:

$-L_d < u$

درغیراین‌صورت بدین معنی است که ورشکستگی قبلاً رخ داده است.

$-X_+ \in (x-u+L_d, x-u+L_d+dx)$

$-L_c \in (y+u-L_d, y+u-L_d+dy)$

1. Dufrecene & Gerber, 1991
2. Kabusi, 2010

با استفاده از این سه شرط، این معادله انتگرالی حاصل می‌شود:

$$h_{+-}(x,y,u)=\int_{\circ}^{u} h_{\text{١}}(\xi) f_{+-}(x+\xi-u,\, y+u-\xi)\,d\xi \qquad (\text{١٠})$$

با استفاده از تعریفی که برای متغیر X_+ در بخش ۲ بیان شده متغیر X_+ همیشه مقداری مثبت است، بنابراین با توجه به رابطه (۸)، در عبارت داخل انتگرال رابطه (۱۰)، به این شرط نیاز است که داشته باشیم $x > u-\xi$. این شرط به خودی خود زمانی که $x > u$ برقرار است ولی هنگامی که $x \le u$ چون متغیر انتگرال‌گیری ξ است با توجه به شرط $x > u-\xi$، مقدار حد پایینی انتگرال در معادله (۱۰) مقدار u-x خواهد بود. با توجه به این شرایط، معادله (۱۰) به زیر حاصل خواهد شد:

$$h_{+-}(x,y,u)=\begin{cases}\int_{\circ}^{u} h_{\text{١}}(\xi)\, f_{+-}(x+\xi-u,\, y+u-\xi)\,d\xi & x > u > \circ \\ \int_{u-x}^{u} h_{\text{١}}(\xi)\, f_{+-}(x+\xi-u,\, y+u-\xi)\,d\xi & \circ < x \le u\end{cases} \qquad (\text{١١})$$

حال با درنظرگرفتن شرط اینکه آیا نخستین کاهش سرمایه به‌علت وقوع خسارت باعث وقوع ورشکستگی شده است یا نه تابع چگالی احتمال توأم مازاد سرمایه قبل و در زمان ورشکستگی به‌این‌صورت نتیجه می‌شود:

$$f(x,y,u)=\int_{\circ}^{u} f(x,y,u-\xi)\,dH_{\text{٣}}(\xi)+h_{+-}(x,y,u) \qquad (\text{١٢})$$

که عبارت اول نشان‌دهنده عدم‌وقوع ورشکستگی است و مانند این است که می‌خواهیم تابع چگالی توأم را برای سرمایه اولیه جدید که مقدار نخستین کاهش سرمایه به‌علت وقوع خسارت از آن کم می‌شود را محاسبه کنیم. عبارت تابع چگالی احتمال توأم در دو طرف رابطه (۱۲) وجود دارد؛ بنابراین با استفاده از روش تبدیل لاپلاس به حل این معادله می‌پردازیم.

$$l_f(s) = l_f(s)\, l_{H_۲}(s) + l_{h_{+-}}(s)$$

$$l_f(s)\left[۱ - l_{H_۲}(s)\right] = l_{h_{+-}}(s)$$

$$l_f(s) = \frac{l_{h_{+-}}(s)}{\left[۱ - l_{H_۲}(s)\right]} \qquad (۱۳)$$

$$\rightarrow f(x,y,u) = L^{-۱}(L(h_{+-}))\left[L^{-۱}(1 + L(H_۳) + \left(L(H_۳)\right)^{۲} + \ldots)\right]$$

$$f(x,y,u) = \int_{۰}^{u} h_{+-}(x,y,u-z)\, dH_۴(z)$$

با استفاده از رابطه (۱۱) و ویژگی پیچش در تابع‌های توزیع، می‌توان تابع چگالی احتمال توأم را به‌این‌صورت بازنویسی کرد:

$$f(x,y,u) = H_۴ * H_۱(u) - H_۴ * H_۱(u-x)\, I(u \geq x)\frac{\lambda}{c} f_X(x+y) \qquad (۱۴)$$

درنهایت تابع چگالی احتمال توأم مازاد سرمایه قبل و در زمان ورشکستگی برحسب تابع بقا و تابع چگالی احتمال خسارت‌ها به‌این‌صورت حاصل می‌شود:

$$f(x,y,u) = \begin{cases} \varphi(u)\dfrac{\lambda}{cq} f_X(x+y) & x > u > ۰ \\ \left(\varphi(u)-\varphi(u-x)\right)\dfrac{\lambda}{cq} f_X(x+y) & ۰ < x \leq u \end{cases} \qquad (۱۵)$$

با داشتن تابع چگالی احتمال توأم مازاد سرمایه قبل و در زمان ورشکستگی، به‌دست‌آوردن تابع چگالی احتمال حاشیه‌ای مازاد سرمایه قبل از ورشکستگی[۱] کار ساده‌ای است و کافی است از رابطه (۱۵) نسبت‌به y یا متغیر کسری در زمان ورشکستگی روی مقادیر ۰ تا ∞ انتگرال‌گیری شود. بنابراین تابع چگالی احتمال مازاد سرمایه قبل از ورشکستگی به‌این‌صورت حاصل می‌شود:

1. Surplus Prior to Ruin

$$f(x,u)=\begin{cases}\frac{1}{q}\varphi(u)\,h_{2}(x) & x>u>0\\ \frac{1}{q}(\varphi(u)-\varphi(u-x))\,h_{2}(x) & 0<x\leq u\end{cases} \qquad (16)$$

در اینجا h_2 همان تابع چگالی احتمال متغیر L_d است.

در مدل ریسک با عامل اغتشاش، این تابع در نقطه $x = u$ تابعی پیوسته است و این در حالی است که در مدل‌های کلاسیک ثابت می‌شود که تابع مورد نظر در نقطه $x = u$ پیوسته نیست. تابع چگالی احتمال دیگری که به معرفی آن می‌پردازیم، تابع چگالی احتمال کسری سرمایه در زمان ورشکستگی است.

۴. کسری در زمان ورشکستگی[1]

روشی که برای محاسبه تابع چگالی احتمال کسری استفاده می‌کنیم درست مانند روشی است که برای محاسبه تابع چگالی احتمال توأم در بخش ۳ معرفی شده است. تابع $h_+(y,u)$ را احتمال ورشکستگی با مقدار کسری بین $(y, y+dy)$ در نخستین کاهش سرمایه به‌علت خسارت معرفی می‌کنیم. در اینجا نیز دو شرط برقرار است:

- $L_d < u$ که درغیراین‌صورت به معنی این است که ورشکستگی قبلاً روی داده است.
- با توجه به مقدار L_c متغیر L_c بین مقادیر $(y+u-L_d, y+u-L_d+dy)$ قرار می‌گیرد.

بنابراین باتوجه به این دو شرط:

$$h_+(y,u)=h_3(u+y)-e^{-Bu}h_3(y) \qquad (17)$$

حال با شرطی‌کردن پیشامد کسری در زمان ورشکستگی روی اینکه آیا نخستین کاهش سرمایه به‌علت خسارت باعث ورشکستگی شده است یا خیر، به این رابطه دست خواهیم یافت:

1. Deficit at Ruin

$$g(y,u) = \int_{\circ}^{u} g(y,u-z)\,dH_{۳}(z) + h_{+}(y,u) \qquad (۱۸)$$

که جمله انتگرال در معادله بالا بیانگر این است که نخستین کاهش سرمایه به‌علت خسارت باعث ورشکستگی نشده و باید میزان تابع چگالی احتمال را با میزان سرمایه جدید که به اندازه نخستین کاهش سرمایه به‌علت خسارت است، محاسبه نمود. با حل این معادله انتگرالی به روش تبدیل لاپلاس، این فرمول برای تابع چگالی کسری در زمان ورشکستگی حاصل می‌شود:

$$g(y,u) = \int_{\circ}^{u} h_{۳}(u+y-z)\,dH_{۴}(z) - \frac{h_{۳}(y)}{qB}\varphi'(u) \qquad (۱۹)$$

۵. اندازه خسارت‌هایی که باعث ورشکستگی می‌شود

متغیر مهم دیگری که برای میزان کنترل ریسک حائز اهمیت است، توجه به تابع چگالی احتمال برای اندازه خسارت‌هایی است که باعث ورشکستگی می‌شوند. اندازه خسارت در لحظه ورشکستگی برابر $U(T^-)+|U(T)|$ است. با داشتن تابع چگالی توأم سرمایه قبل و در زمان ورشکستگی و تعریف متغیرهای $z = U(T^-)+|U(T)|$ و $v = |U(T)|$ و استفاده از تکنیک تبدیل به آسانی می‌توان به این معادله برای تابع احتمال توام v,z دست یافت:

$$f_{Z,V}(z,v,u) = (\varphi(u) - \varphi(u+v-z)I(u \ge z-v))\frac{\lambda}{cq}f_X(z) \qquad ,z > v > \circ$$

با انتگرال‌گیری از رابطه بالا بر حسب متغیر v تابع چگالی احتمال مطلوب به آسانی و به‌این‌صورت نتیجه می‌شود:

$$f_Z(z) = \begin{cases} (\varphi(u)z - \int_{\circ}^{u}\varphi(\xi)d\xi)\frac{\lambda}{cq}f_X(z) & z > u > \circ \\ (\varphi(u)z - \int_{u-z}^{u}\varphi(\xi)d\xi)\frac{\lambda}{cq}f_X(z) & \circ < z \le u \end{cases} \qquad (۲۰)$$

۶. تئوری ریسک با استفاده از توزیع فاز نوع

در تمامی تابع چگالی احتمال‌های معرفی‌شده در بخش‌های قبلی نمی‌توان به محاسبه این تابع چگالی احتمال‌ها پرداخت و یا تابع توزیع آنها را برای مقادیر دلخواه محاسبه کرد. یکی از علت‌های اصلی آن وجود جمله تابع بقا در این توابع چگالی احتمال است که برحسب یک پیچش n بعدی تعریف می‌شود و به جز در مواردی خاص مثلاً وقتی توزیع خسارت‌ها، توزیع نمایی است، در موارد دیگر قابل محاسبه نیست.

اما توزیع فاز نوع این مشکل را حل می‌کند و روش عددی مناسبی برحسب جبر ماتریس‌ها برای محاسبه این احتمال‌ها و توابع چگالی احتمال برای ما حاصل می‌کند.

توزیع فاز نوع با تابع چگالی احتمال $f(x) = \alpha \exp(xT)\, t \quad x \geq 0$ و با پارامترهای E, T, α معرفی می‌شود، که در آن α بردار احتمال نقطه شروع فرآیند، T زیرماتریس شدت انتقال[1] استخراج شده از ماتریس انتقال[2] در فرآیند و $t = -Te$ و e بردار ستونی با درایه‌های یک و E فضای حالت است.

به‌علت خاصیت چگال‌بودن توزیع فاز نوع، تقریباً اکثر توزیع‌های آماری که دامنه مقادیر آنها روی خط اعداد حقیقی مثبت است را می‌توان به‌طوردقیق یا به‌صورت تقریبی با توزیع فاز نوع با پارامترهای مربوط نوشت.

مثلاً توزیع نمایی با پارامتر λ یک توزیع فاز نوع با پارامتر $\alpha=[1]$ $T=(-\lambda)$ است. یا توزیع ارلنگ n یک توزیع فاز نوع با پارامتر

$$\alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_n = 0 , \quad T = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\lambda \end{bmatrix}$$

است.

1. Sub Intensity Matrix
2. Transition Matrix

باتوجه به این مقدمه فرض کنید توزیع خسارت‌ها یک توزیع فاز نوع با پارامتر T,α است، باتوجه به قضایای زیر به بیان بقیه مفاهیم می‌پردازیم.

قضیه ۱: فرض کنید F دارای توزیع فاز نوع با پارامترهای T_1,α_1 و فضای حالت E_1، تابع G دارای توزیع فاز نوع با پارامترهای T_2,α_2 و فضای حالت E_2 باشد. پیچش این دو تابع $F*G$ دارای توزیع فاز نوع با پارامترهای T,α و فضای حالت $E = E_1 \cup E_2$ به‌این‌صورت است:

$$\alpha_i = \begin{cases} (\alpha_1)_i & i \in E_1 \\ (\alpha_1)_0 (\alpha_2)_i & i \in E_2 \end{cases} \quad , T = \begin{pmatrix} T_1 & t_1 \alpha_2 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix} \qquad (۲۱)$$

که $(\alpha_k)_i$، iامین مؤلفه α_k است و $t_k = -T_k e$ و $k = 1,2$

قضیه ۲: فرض کنید تابع‌های توزیع G,F روی اعداد حقیقی مثبت تعریف شده باشد و G دارای توزیع فاز نوع با پارامتر T,α با $\alpha_0 = 0$ و F یک توزیع هندسی ترکیبی با پارامترهای (p, G) باشد که $0 < p < 1$ آنگاه توزیع F دارای توزیع فاز نوع با پارامترهای $\alpha' = p\alpha,\ T' = T + pt\alpha$ است.

به سادگی و با جایگذاری توزیع فاز نوع برای تابع توزیع خسارت‌ها در تابع توزیع متغیر L_c، $H_2(x) = \frac{\lambda}{c}\int_0^x (1 - F_X(y))\,dy$ می‌توان مشاهده کرد شکل تابع توزیع $H_2(x)$ به‌صورت یک توزیع فاز نوع با پارامترهای $\alpha' = -\frac{\lambda}{c}\alpha T^{-1}$, $T' = T$ است.

باتوجه به اینکه توزیع متغیر L_d یک توزیع نمایی است می‌توان نتیجه گرفت L_d دارای توزیع فاز نوع با پارامتر $T = [-B],\ \alpha = [1]$ است، بنابراین با استفاده از قضیه ۱ به‌راحتی می‌توان بررسی کرد توزیع $H_3 = H_1 * H_2$ پیچش H_1 و H_2 به‌این‌صورت به‌دست‌می‌آید:

$$H_3 = 1 - \alpha_1 e^{T_1 x} e \quad , \alpha_1 = (\alpha', 0) \quad , T_1 = \begin{bmatrix} T & t \\ 0 & -\beta \end{bmatrix} \quad , t_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \end{bmatrix} \qquad (۲۲)$$

با استفاده از رابطه (۲۲) و قضیه ۱و ۲ می‌توان اثبات کرد، تابع بقا دارای توزیع فاز نوع با این پارامترهاست:

$$\alpha_2 = [1, 0] \qquad , T_2 = \begin{bmatrix} -\beta & \beta\alpha_1(1-q) \\ 0 & T_1 + (1-q)t_1\alpha_1 \end{bmatrix} \qquad , t_2 = -T_2 e \qquad (۲۳)$$

بنابراین تابع بقا به‌این‌صورت حاصل می‌شود:

$$\varphi(u) = 1 - \alpha_2 \exp(T_2 u) \qquad (۲۴)$$

برای پیداکردن رابطه‌ای برحسب پارامترهای توزیع فاز نوع برای تابع چگالی احتمال توأم $f(x, y, u)$ بااستفاده از رابطه (۱۵) و (۲۴) داریم:

$$f(x,y,u) = \begin{cases} \frac{\lambda}{cq}(1-\alpha_2 e^{(T_2 u)} e)(\alpha e^{T(x+y)} t) & x > u > 0 \\ \frac{\lambda}{cq}(\alpha_2 e^{(T_2(u-x))} e - \alpha_2 e^{(T_2 u)} e)(\alpha e^{(T(x+y))} t) & 0 < x \le u \end{cases} \qquad (۲۵)$$

که در این رابطه توزیع خسارت‌ها نیز بر مبنای فرض اولیه توزیع فاز نوع درنظرگرفته‌شده‌است. تابع چگالی احتمال حاشیه‌ای $f(x, u)$ نیز به‌همین‌ترتیب و با استفاده از روابط (۱۶) و (۲۵) به این صورت حاصل خواهد شد.

$$f(x,u) = \begin{cases} \frac{1}{q}(1-\alpha_2 e^{T_2 u} e)(\alpha_+ e^{Tx} t) & x > u > 0 \\ \frac{1}{q}(\alpha_2 e^{T_2(u-x)} e - \alpha_2 e^{T_2 u} e)(\alpha_+ e^{Tx} t) & 0 < x \le u \end{cases} \qquad (۲۶)$$

اما برای تابع چگالی احتمال کسری در زمان ورشکستگی در جمله انتگرالی معادله (۱۹) داریم:

$$\int_0^u h_3(u+y-z)\, dH_4(z) = \int_0^u \alpha_1 e^{T_1 y} e^{T_1(u-z)} t_1 \, dH_4(z) \qquad (۲۷)$$

که این انتگرال نشان‌دهنده پیچش دو تابع فاز نوع است و با استفاده مجدد از قضیه ۱ کل این عبارت به‌صورت تابع چگالی توزیع فاز نوع جدیدی با پارامترهای $T' = T_1 + t_1\alpha_1 \quad , \alpha' = \alpha_1 \exp(T_1 y)$ حاصل می‌شود.

و با تأثیر جمله دوم در معادله (۱۹) تابع چگالی احتمال کسری در زمان ورشکستگی به‌این‌صورت به‌دست‌می‌آید:

$$g(y,u) = \alpha_1 e^{T_1 y} e^{(T_1 + t_1\alpha_1)u} t_1 - \frac{1}{qB}\alpha_1 e^{T_1 y} t_1 \alpha_2 e^{T_2 u} t_2 \qquad (۲۸)$$

اما برای تابع چگالی احتمال اندازه خسارت که باعث ورشکستگی می‌شوند می‌توان به سادگی، با استفاده از رابطه (۲۰) و مفاهیم بیان‌شده، این شکل را برای این تابع به‌دست‌آورد:

$$f_Z(z) = \begin{cases} \left((1-\alpha_2 e^{T_2 u} e)z - \left[u - \alpha_2 T_2^{-1}(e^{T_2 u} - I)e\right]\right)\dfrac{\lambda}{cq}\alpha e^{Tz} t & \text{if} \quad z > u > 0 \\ \left((1-\alpha_2 e^{T_2 u} e)z - \left[z - \alpha_2 T_2^{-1}(e^{T_2 u} - e^{T_2(u-z)})e\right]\right)\dfrac{\lambda}{cq}\alpha e^{Tz} t & \text{if} \quad 0 < z \le u \end{cases} \qquad (۲۹)$$

تمام موارد فوق برای زمانی بیان شد که مدل درنظرگرفته‌شده، یک عامل اغتشاش مثبت دارد. برای مدل کلاسیک تنها تفاوت از اینجا ناشی می‌شود که حالت خاص $\sigma = 0$ را در مدل با عامل اغتشاش درنظربگیریم؛ بنابراین برای مدل کلاسیک کافی است تمام فرمول‌های به‌دست‌آمده، برای محاسبه توابع چگالی احتمال با استفاده از توزیع فاز نوع و برحسب جبر ماتریس‌ها مقدار σ را معادل صفر قرار دهیم.

با طی‌کردن مراحلی مشابه برای مدل ریسک با عامل اغتشاش برای تمام فرمول‌های بیان‌شده، این مقادیر جایگزین می‌شود:

$$H_1(x) = 1 - e^{-\beta x} = 1 \quad , \ \beta = \frac{2c}{\sigma^2} = \frac{2c}{0} = \infty$$

$$f(x,u) = \begin{cases} \dfrac{1}{q}\varphi(u)\left((1-q)\alpha_+ e^{Tx} t\right) & x > u > 0 \\ \dfrac{1}{q}\left[\varphi(u) - \varphi(u-x)\right]\left((1-q)\alpha_+ e^{Tx} t\right) & 0 < x \le u \end{cases} \qquad (۳۰)$$

$$g(y,u) = (۱-q)\alpha_{+}\, e^{Ty} e^{(T+t(۱-q)a_{+})u} t \qquad (۳۱)$$

$$f_Z(z) = \begin{cases} \left(\begin{array}{l} \varphi(u)z - \\ \left[u-(۱-q)\,\alpha_{+}(T+(۱-q)\,t\alpha_{+})^{-۱}\left(e^{(T+(۱-q)\,t\alpha_{+})\,u}-I\right)e \right] \end{array} \right) \dfrac{\lambda}{cq}\alpha e^{Tz} t & \text{if } z>u>۰ \\ \left(\begin{array}{l} \varphi(u)z - \\ \left[z-(۱-q)\,\alpha_{+}(T+(۱-q)\,t\alpha_{+})^{-۱}(e^{(T+(۱-q)\,t\alpha_{+})u}-e^{(T+(۱-q)\,t\,\alpha_{+})(u-z)})e \right] \end{array} \right) \dfrac{\lambda}{cq}\alpha e^{Tz} t & \text{if } ۰<z\le u \end{cases} \qquad (۳۲)$$

مثال: شرکت بیمه‌ای را در نظر بگیرید که با سرمایه اولیه ۳ واحد در رشته‌ای خاص شروع به‌کارمی‌کند و شدت وقوع خسارت‌ها دارای توزیع پواسون با پارامتر $\lambda = ۱$ است. میزان دریافتی حق‌بیمه‌های این شرکت در واحد زمان $c = ۱/۸۴۷$ واحد است، بنابراین مقدار $q = \dfrac{c-\lambda\mu}{c} = ۰/۲۵$ است. فرض کنید مقدار عامل اغتشاش را برای مثال $\sigma^{۲} = ۰/۳$ درنظرمی‌گیریم و توزیع خسارت‌ها به‌صورت توزیع فاز نوع با این پارامترها معرفی شده‌اند: $\alpha = [۰/۹۷۳۱, ۰/۰۱۵۲, ۰/۰۱۰۶, ۰/۰۰۱]$

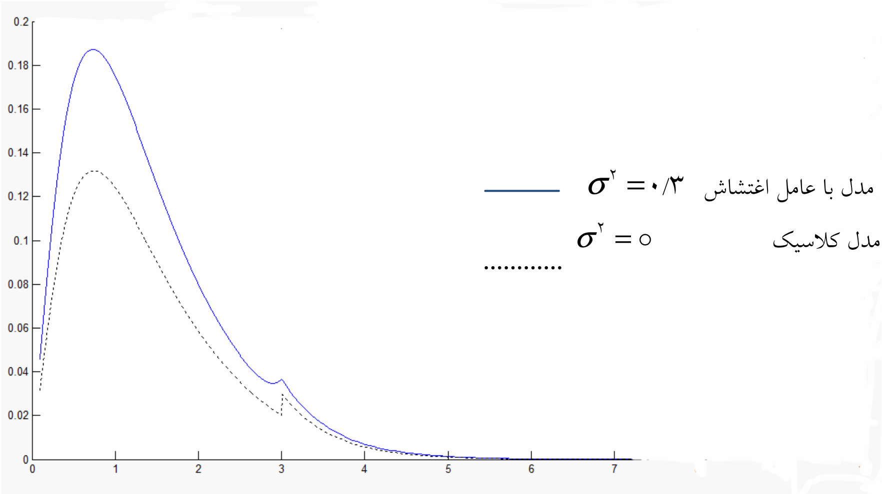
$$T = \begin{bmatrix} -۲۸/۶۴۸ & ۲۸/۵۳۲ & ۰/۰۸۹ & ۰/۰۲۷ \\ ۰/۱۰۲ & -۸/۲۵۵ & ۸/۰۶۳ & ۰/۰۸۶ \\ ۰/۱۳۳ & ۰/۱۰۷ & -۵/۸۰۷ & ۵/۲۹۶ \\ ۰/۱ & ۰/۱۰۲ & ۰/۱۱۱ & -۲/۱۷۶ \end{bmatrix}$$

مقدار تابع احتمال بقا و نمودار تابع چگالی‌های معرفی‌شده به‌این‌صورت است:

– احتمال بقا یا عدم‌ورشکستگی در مدل ریسک کلاسیک: $\varphi(u) = ۰/۷۵۴۹$

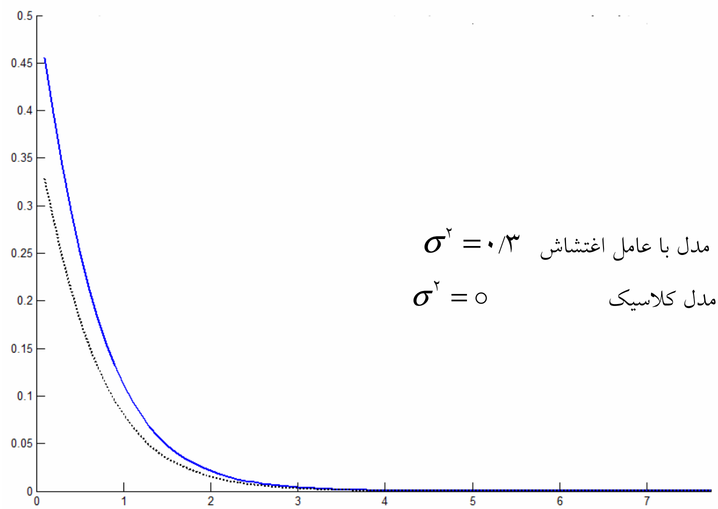
– احتمال بقا یا عدم‌ورشکستگی در مدل ریسک با عامل اغتشاش: $\varphi(u) = ۰/۶۹۲۹$

نمودار ۳. مازاد سرمایه قبل از ورشکستگی در حالت مدل ریسک کلاسیک و مدل ریسک با عامل اغتشاش



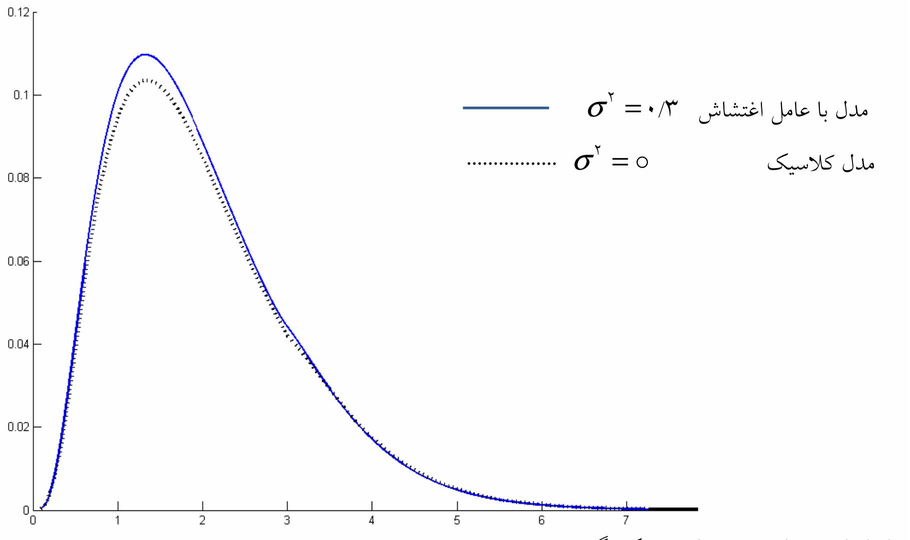
مقدار مازاد سرمایه قبل از ورشکستگی

نمودار۴. کسری در زمان ورشکستگی در حالت مدل ریسک کلاسیک و مدل ریسک با عامل اغتشاش



مقدار کسری سرمایه در زمان ورشکستگی

نمودار۵. اندازه خسارت در زمان ورشکستگی در حالت مدل ریسک کلاسیک و مدل ریسک با عامل اغتشاش



مقدار اندازه خسارت در زمان ورشکستگی

مقدار احتمال بقا در مدل کلاسیک بیش از مدل با عامل اغتشاش است؛ این مسئله به‌علت اضافه‌کردن یک عدم‌اطمینان اضافی به مدل بوده است. همچنین باتوجه به نمودارهای رسم‌شده به جز در مورد اندازه خسارت در نمودار ۵ که تقریباً مساوی‌اند، انباشتگی احتمال در نقطه‌ای معین در مدل با عامل اغتشاش بیش از مدل کلاسیک است و در صورت نیاز، این احتمالات (مساحت زیر نمودار) به سادگی قابل محاسبه است.

۷. نتیجه‌گیری

مدل ریسک با عامل اغتشاش، ابزاری مناسب در اختیار مدیران ریسک شرکت‌های بیمه قرار می‌دهد تا برای مقادیر مختلف و دلخواهی از سرمایه اولیه و حق‌بیمه‌ها، احتمال ورشکستگی را شبیه‌سازی نمایند و مناسب‌ترین مقدار حق‌بیمه را استخراج کنند. مدل ریسک معرفی‌شده دارای عامل اغتشاشی است که باتوجه به عوامل مختلفی در بازار بیمه تعریف می‌شود و مدل جدید، مقدار واقعی‌تری از مازاد سرمایه شرکت بیمه را در زمان نشان می‌دهد. در این مقاله مقدار حق‌بیمه را در واحد زمان

ثابت درنظرگرفته‌ایم ولی باتوجه به عواملی از قبیل تخفیف‌ها، مالیات‌ها و ... در دریافت حق‌بیمه‌ها می‌توان آن را نیز متغیر تصادفی درنظرگرفت که البته بر پیچیدگی مدل می‌افزاید و مدل واقعی‌تری را از رفتار مازاد سرمایه شرکت بیمه منعکس می‌کند.

منابع

1. Asmussen, S 2000, *Ruin probabilities*, World Scientific, Singapore.

2. Bowers, NL, Gerber, HU, Hickman, JC, Jones, DA & Nesbitt, CJ 1987, *Actuarial mathematics*, Society of Actuaries.

3. Dickson, DCM 1992, 'On the distribution of the surplus prior to ruin', *Insurance Mathematics and Economics*, vol. 11, pp. 191-207.

4. Dickson, DCM & Dos Reis, AE 1994, 'Ruin problems and dual events', *Insurance Mathematics and Economics*, vol. 14, pp. 51-60.

5. Dufresne, F & Gerber, HU 1988, 'The surplus immediately before and at ruin, and the amount of the claim causing ruin', *Insurance Mathematics And Economics*, vol. 7, pp. 193-9.

6. Dufresne, F & Gerber, HU 1991, 'Risk theory for the compound poisson process that is perturbed by diffusion', *Insurance Mathematics and Economics*, vol. 10, pp. 51-9.

7. Feller, W 1971, *An introduction to probability theory and its applications*, vol. II, Wiley, New York.

8. Gerber, HU & Landry, B 1998, 'On the discounted penalty at ruin in a jump-diffusion and the perpetual put option', *Insurance Mathematics and Economics*, vol. 22, pp. 263-76.

9. Gerber, HU & Shiu, ESW 1997, 'The joint distribution of the time of ruin, the surplus immediately before ruin, and the deficit at ruin', *Insurance Mathematics and Economics*, vol. 21, pp. 129-37.

10. Kabusi, J 2010, *On the surplus prior to ruin in the perturbed classical risk process*, M.A thesis in Actuarial Science, ECO College of Insurance, Allameh Tabatabai University.

11. Klugman, S, Panjer, H & Willmot, G 2004, *Loss models from data to decisions*, Wiley, New York, Ny.

12. Lin, SX & Willmot, GE 2000, 'The moments of time of ruin, the surplus before ruin, and the deficit at ruin', *Insurance Mathematics and Economics*, vol. 27, pp. 19-44.

13. Ren, J 2005, 'The expected value of the time of ruin and the moments of the discounted deficit at ruin in the perturbed classical risk process', *Insurance Mathematics and Economics,* vol. 37, pp. 505-21.

14. Ren, J 2007, 'On the surplus prior to ruin in the perturbed classical risk process', *Insurance Mathematics and Economics*, vol. 8, no. 2, pp. 186-95.

15. Rolski, T, Schmidli, H, Schmidt, V & Teugels, J 1999, *Stochastic processes for insurance and finance*, Wiley, New York, Ny.

16. Schmidli, H 1999, 'On the distribution of the surplus prior and at ruin', *Astin Bulletin*, vol. 29, no. 2, pp. 227-44.

17. Tsai, CCL 2001, 'On the discounted distribution functions of the surplus process perturbed by diffusion', *Insurance Mathematics and Economics*, vol. 28, pp. 401-19.

18. Tsai, CCL & Willmot, GE 2002, 'A generalized defective renewal equation for the surplus process perturbed by diffusion', *Insurance Mathematics and Economics*, vol. 30, pp. 51-66.