Archive of SID

پژوهشنامهٔ بیمه/ سال سی‌و یکم/ شمارهٔ ۲/ تابستان ۱۳۹۵/ شماره مسلسل ۱۲۲/ صفحات ٤١ تا ٥٦

محاسبهٔ احتمال ورشکستگی شرکتهای بیمه با استفاده از تقریب تیمز

تاریخ دریافت: ۱۳۹۳/۱۱/۱٦

سعید باجلان[۱]

تاریخ پذیرش:۱۳۹۵/۰۲/۲۷

مصطفی نامدار[۲]

چکیده

احتمال ورشکستگی برای شرکتهای بیمه، عاملی کلیدی است که باید مورد توجه قرار گیرد. در این تحقیق با به کار بردن روش تقریب تیمز، احتمال ورشکستگی نهایی پرتفوی بیمه‌های شخص ثالث یک شرکت بیمهٔ ایرانی برآورد شد. به همین منظور، ابتدا با بهره‌گیری از داده‌های خسارتی تعدیل‌شده برحسب تورم سالهای ۱۳۸٦ تا ۱۳۹۲، تابع مازاد پرتفوی شرکت به‌عنوان یک فرایند تصادفی پواسون مرکب مدل‌سازی شده است. بر طبق مطالعات، بهترین توزیع برای مدل‌سازی توزیع شدت خسارت، از بین توزیعهای مختلف بررسی‌شده، توزیع گاماست. سپس ضریب تعدیل به‌عنوان یک پارامتر مهم ورودی تقریب تیمز با استفاده از الگوریتم دکر برآورد شده است. درنهایت، احتمال ورشکستگی با استفاده از تقریب تیمز تحت سناریوهای مختلف در خصوص مقدار مازاد اولیه برآورد شده است. نتایج تحقیق مؤید احتمال نسبتاً بالای ورشکستگی نهایی شرکت است که نشان‌دهندهٔ لزوم اتخاذ سیاستهای مدیریتی به منظور کاهش این احتمال است.

واژگان کلیدی: *تقریب تیمز، فرایند پواسون مرکب، فرمول ورشکستگی مجانبی کرامر، ورشکستگی.*

---

۱. استادیار دانشکدهٔ مدیریت، دانشگاه تهران، saeedbajalan@ut.ac.ir

۲. دانشجوی کارشناسی ارشد گروه مالی دانشکدهٔ مدیریت، دانشگاه نهران (نویسندهٔ مسئول)، mostafa.namdar68@gmail.com

www.SID.ir

Archive of SID

۱. مقدمه

در خصوص محاسبهٔ احتمال ورشکستگی[1] و نکول مخصوصاً در مورد شرکتهایی که اقدام به اخذ تسهیلات بانکی کرده‌اند، تاکنون تحقیقات متعددی در داخل و خارج کشور صورت گرفته است. با این حال در خصوص محاسبهٔ احتمال ورشکستگی شرکتهای بیمهٔ ایرانی به‌عنوان خریداران اصلی ریسک تاکنون تحقیق جدی انجام نشده است. همین مسئله باعث شده است که ادبیات موضوع چندانی در این خصوص در داخل کشور موجود نباشد و متأسفانه چه در سطح آکادمیک و چه در سطح صنعت آشنایی چندانی با مدلهای سنجش احتمال ورشکستگی شرکتهای بیمه وجود نداشته باشد. این در شرایطی است که محاسبهٔ احتمال ورشکستگی شرکتهای فعال در این صنعت به دلیل ماهیت تعهدات آنها بسیار مهم و حیاتی است. لازم به ذکر است که در کشورهای پیشرفتهٔ دنیا ملاک تعیین توانگری مالی همین احتمال ورشکستگی است و حداقل سرمایهٔ تخصیص داده‌شده به هر رشته نیز براساس این معیار محاسبه می‌شود. چنین ارزیابیهایی می‌تواند در سطح کل شرکت انجام گیرد و یا در سطح یک پرتفوی مشخص (نظیر یک رشتهٔ بیمه‌ای به‌خصوص) اجرا شود.

این نکته را باید در نظر داشت که هیچ‌گونه معنی مطلقی را نمی‌توان به این احتمال نسبت داد زیرا در واقع معرف احتمال اینکه بیمه‌گر در آیندهٔ نزدیک ورشکسته شود نیست. اول از همه باید دقت کرد که ممکن است قرنها طول بکشد تا ورشکستگی واقعاً رخ دهد. دخالت واضح بیمه‌گر در فرایندهایی نظیر حق‌بیمه و خسارت در تعریف این احتمال نادیده گرفته می‌شود. به‌علاوه فرض می‌شود که اثر تورم و بازدهی سرمایه یکدیگر را دقیقاً خنثی می‌کنند. احتمال ورشکستگی صرفاً ریسک بیمه‌ای را در نظر می‌گیرد و سوء مدیریتهای احتمالی را لحاظ نمی‌کند. سرانجام تعریفی که از ورشکستگی ارائه می‌شود صرفاً یک انتزاع ریاضی است و مسلماً در دنیای واقعی،

1. Probability of Ruin

www.SID.ir

Archive of SID

بیمه‌گر با سرمایهٔ ۱- ورشکسته نمی‌شود و با سرمایهٔ ۱+ هم به‌سختی می‌تواند توانگری مالی خود را حفظ کند. درنتیجه، مقدار دقیق این احتمال خیلی حیاتی نیست و تقریب خوبی از آن نیز کفایت می‌کند.

با این حال، این احتمال یک ابزار مدیریتی بسیار پرکاربرد است، زیرا نمایانگر میزان سلامت ترکیب فرایندهای حق‌بیمه و خسارت در رابطه با سرمایهٔ اولیه در دسترس[1] است. احتمال بالای ورشکستگی معرف عدم ثبات وضعیت شرکت است و نشان می‌دهد که به کارگیری ابزارهای مدیریتی نظیر بیمه‌های اتکایی و یا افزایش حق-بیمه‌ها باید مدنظر قرار گیرند و یا اینکه بیمه‌گر باید اقدام به جذب سرمایه در گردش بیشتر کند (Kaas et al., 2008). از همین رو، در این تحقیق سعی شده است ضمن معرفی روش تقریب احتمال ورشکستگی تیمز، به این سوال پاسخ داده شده که آیا اساساً چنین مدلی امکان به کارگیری در ایران را دارد و می‌توان از آن برای تعیین احتمال ورشکستگی یک شرکت بیمهٔ ایرانی یا پرتفویهای بیمه‌ای تحت مدیریت وی استفاده کرد؟

۲. ادبیات موضوع

۲-۱. مبانی نظری تحقیق

منظور از احتمال ورشکستگی این است که سرمایهٔ شرکت منفی شود، با فرض اینکه فرایند حق‌بیمهٔ سالانه و فرایند خسارت بدون تغییر باقی بمانند. از آنجا که در محاسبهٔ احتمال ورشکستگی متغیر تصادفی خسارت را در طی زمان بررسی می‌کنیم، باید از فرایندهای تصادفی برای مدل‌سازی آن استفاده کرد. دو دسته مدل معمولاً برای مدل-سازی فرایندهای تصادفی در بیمه و مالی مورد استفاده قرار می‌گیرد؛ فرایند پواسون مرکب و فرایند وینر. فرایند پواسون مرکب، فرایندی استاندارد برای مدل‌سازی نحوهٔ حرکت در طی زمان در حوزهٔ اکچوئری است، در حالی که فرایند وینر بیشتر در

1. Available Initial Capital

www.SID.ir

Archive of SID

مسائل مالی مورد استفاده قرار گرفته است. از همین رو مدلی که در این مقاله برای مدل‌سازی پرداخت خسارتها مورد استفاده قرار می‌گیرد، فرایند پواسون مرکب است که تعریف آن به صورت زیر است:

تعریف ۱. فرض کنید فرایند تعداد خسارتها $\{N_t\,;\,t\geq 0\}$ یک فرایند پواسون باشد. همچنین فرض کنید خسارتهای $\{X_1,X_2,\ldots\}$، متغیرهای تصادفی مثبت باشند که به صورت مستقل و یکسان با توزیع تجمعی $F(x)$ و میانگین $\mu<\infty$ توزیع شده‌اند و از N_t هم مستقل هستند. لذا X_j بیانگر مقدار خسارت jام است. از سوی دیگر، فرض کنید S_t معرف خسارت کل در بازهٔ $(0,t]$ باشد. اگر $N_t=0$، این متغیر به صورت $S_t=0$ و اگر $N_t>0$،

$$S_t=\sum_{j=1}^{N_t}X_j\,,$$

تعریف می‌شود. بنابراین به ازای یک t ثابت، S_t دارای توزیع پواسون مرکب است. از آنجا که $\{N_t\,;\,t\geq 0\}$ دارای نموهای مستقل و ماناست، بنابراین $\{S_t\,;\,t\geq 0\}$ هم دارای نموهای مستقل و ماناست، و همچنین

$$E(S_t)=E(N_t)E(X_j)=(\lambda t)\mu=\lambda\mu t \qquad (۱)$$

است، که در آن λ پارامتر توزیع پواسون و μ خسارت مورد انتظار است. معمولاً فرض می‌شود که حق‌بیمه‌ها به صورت پیوسته و با نرخ ثابت c برای هر واحد زمانی قابل پرداخت هستند. این بدین معنی است که حق‌بیمهٔ خالص در بازه $(0,t]$ برابر ct است. از بهرهٔ دریافتی نیز برای سادگی محاسبات معمولاً صرف‌نظر می‌شود. به‌علاوه فرض کنید که حق‌بیمه دارای سربار مثبت است یعنی، $ct>E(S_t)$، که به طور ضمنی بیانگر این موضوع است که $c>\lambda\mu$، بنابراین

$$c=(1+\theta)\lambda\mu \qquad (۲)$$

www.SID.ir

Archive of SID

است، که در آن $\theta > 0$ است و سربار ایمنی نسبی[1] یا عامل سربار حق‌بیمه[2] نام دارد (Klugman et al., 2004). بعد از مشخص‌شدن فرایندهای خسارت و حق‌بیمه، فرایند مازاد به صورت

$$U_t = u + ct - S_t, \quad t \geq 0 \qquad (۳)$$

خواهد بود، که در آن $u = U_0$ مازاد اولیه است. منظور از مازاد اولیه، همان سرمایه‌ای است که شرکت در هنگام شروع کسب‌وکار خود یا راه‌اندازی یک پرتفوی جدید به آن تخصیص می‌دهد. اگر U_t منفی شود، ورشکستگی رخ می‌دهد و در غیر این صورت بقاء برقرار خواهد بود. بنابراین احتمال بقای زمان نامتناهی به صورت

$$\phi(u) = \Pr\left(U_t \geq 0, \quad t \geq 0 \text{ به ازای تمام مقادیر} \mid U_0 = u\right) \qquad (٤)$$

است و ورشکستگی زمان نامتناهی به صورت

$$\psi(u) = 1 - \phi(u) \qquad (۵)$$

تعریف می‌شود.

هدف این مقاله برآورد $\phi(u)$ و یا $\psi(u)$ است که به آن احتمال ورشکستگی نهایی[3] نیز گفته می‌شود. لازم به ذکر است که نوع دیگر ورشکستگی، ورشکستگی زمان متناهی است که در آن احتمال ورشکستگی در یک بازهٔ زمانی مشخص برآورد می‌شود. با این حال در این تحقیق، هدف محاسبهٔ همان احتمال ورشکستگی نهایی (زمان نامتناهی) است که احتمال ورشکستگی را بدون درنظرگرفتن بازهٔ زمانی محدودی برای رخ دادن آن محاسبه می‌کند (Tse, 2009). در ادامه یک کمیت خاص تعریف می‌شود که می‌تواند برای تعیین کرانه‌ای[4] برای مقدار $\psi(u)$ به کار رود.

1. Relative Security Loading
2. Premium Loading Factor
3. Ultimate Ruin
4. Bound

www.SID.ir

Archive of SID

۲-۲. ضریب تعدیل[1]

مشخص‌کردن انگیزهٔ تعریف ضریب تعدیل از دیدگاه فیزیکی کار مشکلی است لذا از این کار صرف‌نظر شده و صرفاً به بیان آن پرداخته می‌شود. لازم به ذکر است که از نماد X برای نمایش متغیر تصادفی اندازه خسارت استفاده خواهد شد.

تعریف۲. فرض کنید $t=k$ کوچکترین جواب مثبت معادلهٔ

$$1+(1+\theta)\mu t = M_X(t) \qquad (٦)$$

باشد، که در آن $M_X(t)=E(e^{tX})$، تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی شدت خسارت X است. در صورتی‌که چنین مقداری برای t یافت شود به آن ضریب تعدیل گفته می‌شود (Gray and Pitts, 2012). به طور کلی نمی‌توان همواره k را به طور صریح به دست آورد. در این‌گونه مواقع به طور طبیعی باید به روشهای عددی متوسل شد که اکثر آنها نیازمند یک حدس اولیه در خصوص مقدار k هستند. برای یافتن ضریب تعدیل با استفاده از روشهای عددی، روش زیر پیشنهاد می‌شود.

$H(t)$ را به صورت

$$H(t)=1+(1+\theta)\mu t - M_X(t) \qquad (٧)$$

تعریف کنید، با توجه به تعریف، ضریب تعدیل $k>0$ باید در رابطهٔ $H(k)=0$ صدق کند. برای حل این معادله از الگوریتم نیوتن–رافسون

$$k_{j+1}=k_j-\frac{H}{H'(k_j)}$$

استفاده کنید، که در آن

$$H'(t)=(1+\theta)\mu - M'_X(t)$$

از آنجا که $H(0)=0$ است، باید به این مسئله که جواب معادله به سمت صفر میل نکند، توجه کرد.

---

1. Adjustment Coefficient

www.SID.ir

Archive of SID

۲-۳. فرمول ورشکستگی مجانبی کرامر و تقریب تیمز[1]

ضریب تعدیل (k) حاوی اطلاعات بسیار مفیدی در خصوص احتمال ورشکستگی است. قضیهٔ بعد که بدون اثبات بیان می‌شود به نتیجه‌ای منجر می‌شود که به فرمول ورشکستگی جانبی کرامر معروف است. لازم به ذکر است که نماد $a(x)\sim b(x)$, $x\to\infty$ به این معنی است که $\lim_{x\to\infty}\frac{a(x)}{b(x)}=1$.

قضیه۱. فرض کنید $k>0$، در رابطهٔ (٦) صدق کند، آنگاه احتمال ورشکستگی در رابطهٔ

$$\psi(u)\sim Ce^{-ku},\ u\to\infty \qquad (۸)$$

صدق خواهد کرد، که در آن

$$C=\frac{\mu\theta}{M'_X(k)-\mu(1+\theta)} \qquad (۹)$$

است (Klugman et al., 2004). احتمال ورشکستگی نظیر یک تابع نمایی به ازای مقادیر بزرگ u رفتار می‌کند. دقت کنید برای اینکه نامعادلهٔ لاندبرگ برقرار باشد لازم است که $C\le 1$ باشد. همچنین اگرچه رابطهٔ (۸) یک تقریب مجانبی است اما دقت آن حتی در صورتی‌که مقدار u خیلی هم بزرگ نباشد بسیار خوب است مخصوصاً اگر عامل سربار نسبی (θ) نسبتاً کوچک باشد.

در حالتهایی که X دارای توزیع نمایی نیست، به دست آوردن جواب دقیق برای $\psi(u)$ پیچیده است. برای حل این گونه مسائل یک تقریب تحلیلی ساده توسط تیمز ارائه شده است که از مزیت فرمول ورشکستگی جانبی کرامر به ازای مقادیر بزرگ u بهره می‌گیرد (Tijms, 1994). ایدهٔ اصلی این تقریب این است که یک جزء نمایی به رابطهٔ (۸) افزوده شود تا دقت آن‌را برای مقادیر کوچک u افزایش دهد. بر این اساس، تقریب تیمز به صورت

1. Cramer's Asymptotic Ruin Formula and Tijms Approximation

www.SID.ir

Archive of SID

$$\psi_T(u) = (\frac{1}{1+\theta} - C)e^{-u/\alpha} + Ce^{-ku}, \quad u \geq 0 \qquad (۱۰)$$

تعریف می‌شود (Dickson, 2006)، که در آن

$$\alpha = \frac{E(X^2)/(2\mu\theta) - C/k}{1/(1+\theta) - C}. \qquad (۱۱)$$

است. تقریب تیمز علاوه بر اینکه یک تقریب تحلیلی ساده است که دقت خوبی نیز دارد، در برخی موارد دقیقاً مقدار واقعی $\psi(u)$ را تولید می‌کند. به طور خاص می‌توان نشان داد که اگر تابع چگالی احتمال اندازه خسارت X از فرم

$$f(x) = p(\beta^{-1}e^{-x/\beta}) + (1-p)(\beta^{-2}x\ e^{-x/\beta})$$

پیروی کند، که $0 \leq p < 1,\ x \geq 0$ باشد، آنگاه $\psi_T(u) = \psi(u)$ است.

۲-٤. پیشینهٔ مطالعات انجام‌شده

در زمینهٔ توسعهٔ مدلهایی برای اندازه‌گیری احتمال ورشکستگی شرکتهای بیمه در خارج از کشور، تاکنون تحقیقات متعددی صورت گرفته است و تقریباً هیچ کتابی در حوزهٔ اکچوئری وجود ندارد که حداقل یک فصل را به طور مبسوط به این موضوع اختصاص ندهد. از جمله تحقیقاتی که در سالهای اخیر در خصوص این موضوع شده است می‌توان به موارد زیر اشاره کرد.

آلبرچر و بوکسما[1] (۲۰۰٤) در تحقیق خود سعی در تعمیم مدل ورشکستگی کلاسیک با استفاده از فرایندهای مارکوف کردند. آنها یک عبارت دقیق برای تبدیل لاپلاس احتمال ورشکستگی ارائه کردند.

بودرالت[2] و همکاران (۲۰۰٦) در تحقیق خود فرض کردند که توزیع شرطی مقادیر خسارت، آمیخته‌ای از دو تابع چگالی باشد. آنها بر این اساس توانستند تبدیل لاپلاسی برای زمان و احتمال ورشکستگی برای ردهٔ بزرگی از توابع توزیع به دست آورند.

1. Albercher and Boxma
2. Boudreault

www.SID.ir

Archive of SID

آلبرچر و تئوگلز[1] (۲۰۰۶)، مدلهای ریسک با ساختار وابستگی میان مقادیر خسارت را با استفاده از تابع مفصل توصیف کردند. آنها یک برآورد نمایی برای احتمال ورشکستگی زمان متناهی و زمان نامتناهی به دست آوردند.

کاسیته[2] و همکاران (۲۰۱۰)، مدل ریسکی که در آن ساختار وابستگی با استفاده از مفصل فارلی-گامبل-مورگن اشترن تعریف می‌شد را مطالعه کردند. حاصل کار این محققان عبارتی صریح برای تبدیل لاپلاس زمان ورشکستگی و مقدار کمبود[3] در زمان رخ‌دادن آن با فرض تبعیت اندازه خسارتها از توزیع نمایی بود.

آمباجاسپتیا[4] (۲۰۰۹)، فرض استقلال خسارتها را نادیده گرفت و از یک مدل ریسک که بر پایهٔ توزیع گامای دومتغیره بود، استفاده کرد. بر این اساس او توانست فرمولی برای احتمال ورشکستگی ارائه کند.

چادجی کانستانتیندیس و ورونتز[5] (۲۰۱٤) در مقاله خود فرض کردند که زمان میان خسارتها دارای توزیع ارلانگ باشد و از این طریق توانستند عبارتی صریح برای احتمال ورشکستگی و تبدیل لاپلاس زمان آن در مواقعی که توزیع اندازهٔ خسارتها نمایی است، ارائه کنند.

هیلپرن[6] (۲۰۱٤) در مقالهٔ خود فرض استقلال اندازهٔ خسارت و فاصلهٔ زمانی میان رخ‌دادن خسارتها را نادیده گرفت و ساختار وابستگی میان این متغیرهای تصادفی را با استفاده از مفصل اسپیرمن مدل‌سازی کرد. وی در تحقیق خود عبارتی صریح برای محاسبهٔ احتمال ورشکستگی زمانی که توزیع اندازهٔ خسارت نمایی است، به دست آورد.

1. Teugels
2. Cossette
3. Shortage
4. Ambagaspitiya
5. Chadjiconstantindis and Vrontos
6. Heilpern

www.SID.ir

Archive of SID

۳. روش‌شناسی پژوهش

۳-۱. جامعهٔ آماری و نمونهٔ تحقیق

جامعهٔ آماری تحقیق، همهٔ داده‌های خسارت مربوط به بیمه‌نامهٔ شخص ثالث صادره توسط یکی از شرکتهای بیمهٔ ایرانی است[۱]. به منظور گردآوری و پایش داده‌ها، در ابتدا داده‌های خسارت مربوط به بیمه‌نامه‌های شخص ثالث صادرهٔ این شرکت که اطلاعات آنها در سامانهٔ سنهاب موجود است، گردآوری شد. این اطلاعات بازهٔ زمانی سالهای ۱۳۸۶-۱۳۹۲ را پوشش می‌دهد. در گام بعد، از آنجا که در برخی موارد به ازای یک شمارهٔ بیمه‌نامهٔ مشخص بیش از یک خسارت رخ داده بود همهٔ این خسارتها تجمیع شدند تا مشخص شود به ازای هر بیمه‌نامهٔ صادره، خسارت جانی پرداختی و خسارت مالی پرداختی چه میزان بوده است. بعد از انجام این اصلاحات در مجموع ۲۰۱۱۷ زوج مشاهده از خسارتهای جانی و مالی به دست آمد.

با توجه به تغییرات نرخ دیه و همچنین تغییرات اجرت تعمیر اتومبیل و قیمت خودرو لازم بود که بر روی میزان خسارت جانی و مالی که مربوط به سالهای قبل از ۱۳۹۲ هستند، تعدیل صورت گیرد. به منظور انجام این تعدیلات ابتدا مبلغ دیه و شاخص هزینهٔ حمل‌ونقل برای دورهٔ زمانی تحقیق استخراج و سپس نرخ رشد آنها مشخص شد. از نرخ رشد محاسبه‌شده، به‌عنوان عامل تعدیل خسارت جانی و مالی در سالهای قبل از ۱۳۹۲ استفاده شد.

۳-۲. مراحل انجام تحقیق

با توجه به موارد بحث‌شده در قسمت ادبیات موضوع، به منظور تقریب احتمال ورشکستگی پرتفوی بیمه‌های شخص ثالث شرکت بیمهٔ نمونه، براساس روش تیمز، ابتدا لازم است که فرایند مازاد شرکت بیمه مدل‌سازی شود. همان‌گونه که قبلاً گفته شد در این تحقیق، مازاد به صورت یک فرایند پواسون مرکب مدل‌سازی خواهد شد.

---

۱. با توجه به اینکه در این تحقیق احتمال ورشکستگی محاسبه شده، از ذکر نام شرکت خودداری شده است.

www.SID.ir

Archive of SID

بنابراین ابتدا تواتر خسارتها به صورت یک متغیر تصادفی پواسون و سپس شدت خسارتها مدل‌سازی می‌شود. به این منظور مجموعه‌ای از توزیعهای آماری برای مدل-سازی شدت خسارتها انتخاب می‌شوند و از طریق مقایسه آنها به کمک شکل تابع چگالی و آزمونهای آماری مختلف شامل؛ آزمون نیکویی برازش خی‌دو، آزمون کولموگروف- اسمیرنوف، و مقدار لگاریتم تابع درستنمایی بهترین توزیع برای مدل-سازی شدت خسارت انتخاب می‌شود. سپس با استفاده از اطلاعات مالی شرکت در سالهای گذشته عامل سربار حق‌بیمه برآورد می‌شود. در ادامه به کمک الگوریتمهای عددی، مقدار ضریب تعدیل محاسبه و درنهایت، با استفاده از این ضریب تعدیل و معادلات مربوطه، احتمال ورشکستگی شرکت تحت سناریوهای مختلف در خصوص میزان مازاد اولیه برآورد می‌شود. لازم به ذکر است که کلیهٔ محاسبات از طریق برنامه-نویسی در نرم‌افزار متلب نسخهٔ ۲۰۱٤ انجام می‌شود.

٤. یافته‌های پژوهش

٤-۱. مدل‌سازی تواتر و شدت خسارتها

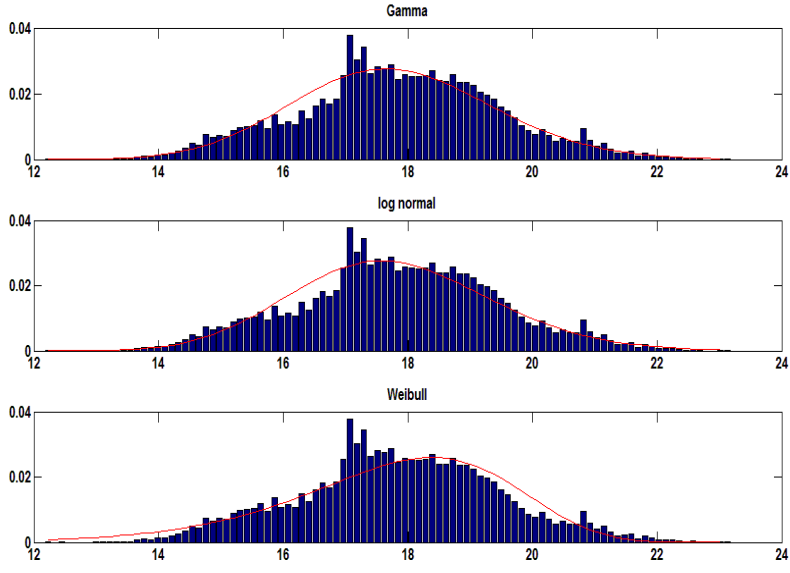
از آنجا که فرایند تصادفی استفاده‌شده در تحقیق از نوع پواسون مرکب است؛ برای مدل‌سازی تواتر خسارتها از توزیع پواسون استفاده شده است. پارامتر این توزیع (λ) با استفاده از روش ماکسیمم درستنمایی[1] برآورد شده است. نتایج برآورد به کمک نرم-افزار متلب نشان می‌دهد که برآوردگر ماکسیمم درستنمایی این پارامتر ۲۸۷۳/۹ است. برای مدل‌سازی شدت خسارت، در گام اول از طریق برازش توزیعهای مختلف بر روی مشاهدات در دسترس و رسم شکل تابع چگالی توزیع برازش‌داده‌شده و مقایسهٔ آن با بافت‌نگار خسارتها، سه توزیع گاما، لگ نرمال و وایبول به‌عنوان توزیعهای منتخب برای مدل‌سازی شدت خسارتها تعیین شدند. شکل ۱، تابع چگالی توزیعهای سه‌گانهٔ فوق در مقایسه با چگالی تجربی مشاهدات را نمایش می‌دهد.

1. Maximum Likelihood Estimation

www.SID.ir

Archive of SID

شکل۱. چگالی تابع توزیعهای برازش‌داده‌شده (منحنی رسم‌شده) در مقایسه با شکل تابع چگالی توزیع تجربی خسارتها (ستونهای رسم‌شده)



در گام بعد، از طریق آزمون نیکویی برازش خی‌دو پیرسون، آزمون کولموگروف-اسمیرنوف، و مقدار ماکسیمم تابع لگاریتم درستنمایی این سه توزیع مقایسه شدند که از بین آنها توزیع گاما براساس هر سه آزمون به‌عنوان توزیع برتر برای مدل‌سازی شدت خسارت انتخاب شد. مقادیر پارامترهای توزیع برازش‌داده‌شده به‌همراه نتایج آزمونهای فوق در جدول ۱ نمایش داده شده است.

جدول ۱. توزیعهای برازش‌داده‌شده و مقایسهٔ برازندگی آنها

نام توزیع	توزیع برازش داده شده	آمارهٔ خی‌دو	آمارهٔ کولموگروف-اسمیرنوف	مقدار منفی ماکسیمم لگاریتم تابع درستنمایی
گاما	$Gamma(124.493, 0.1434)$	۳۱۰/۰۳۷	۰/۰۳۲۳	۳۷۹٤
لگ نرمال	$Logn(2.8778, 0.090)$	۳۸۹/۵۳	۰/۰۳٦٤	۳۷۹۹
وایبول	$Wbl(18.577, 11.882)$	۱٦۷۱/٦	۰/۰٤۵۸	۳۸۷٦

www.SID.ir

Archive of SID

٤-۲. محاسبهٔ ضریب تعدیل و تعیین احتمال ورشکستگی بر مبنای تقریب تیمز

به منظور تعیین عامل سربار حق‌بیمه، درآمدهای شرکت و خسارتهای پرداختی آن برای سالهای ۱۳۹۰-۱۳۹۲ بر مبنای صورتهای مالی مشخص شد و عامل سربار خسارت برای هر سه سال محاسبه شد. با توجه به تغییرات رخ‌داده در عامل سربار، برای برآورد دقیق‌تر از اعداد به دست آمده برای سه سال میانگین‌گیری شد که درنهایت، عامل سربار حق‌بیمه ۳۰/۷٪ تعیین شد. بعد از تعیین عامل سربار حق‌بیمهٔ ضریب تعدیل با توجه به رابطهٔ (٦) محاسبه شد. برای حل این معادله از الگوریتم دکر[1] استفاده شده است که ترکیبی از الگوریتمهای تنصیف، سکانت و روش درون‌یابی معکوس درجهٔ دوم است. در واقع با استفاده از این الگوریتم معادلهٔ

$$(1+\theta)\mu t-(1-\beta t)^{-\alpha}+1=0$$

حل شده است، در معادلهٔ فوق μ میانگین توزیع گاما است که برابر $\mu=\alpha\beta$ است، α و β پارامترهای شکل و مقیاس توزیع گاما هستند که قبلاً برآورد شده‌اند. ریشهٔ غیرصفر این معادله براساس الگوریتم دکر که در نرم‌افزار متلب پیاده‌سازی شد، ۰/۰۲۸۵ برآورد شد که همان ضریب تعدیل (k) است.

به منظور محاسبهٔ احتمال ورشکستگی، ابتدا مقدار پارامتر C طبق رابطهٔ (۹) محاسبه شده است. مقدار این پارامتر طبق محاسبات انجام‌شده توسط نرم‌افزار، ۰/۸٤۱۷ تعیین شده است. در گام بعد، مقدار امید ریاضی مربع خسارتها ($E(X^2)$) با توجه به اینکه X دارای توزیع گاماست، براساس فرمول

$$\text{اگر } r \text{ عدد صحیح باشد} \quad E(X^r)=\beta^r(\alpha+r-1)\ldots\alpha$$

$$E(X^r)=\frac{\beta^r\Gamma(\alpha+r)}{\Gamma(\alpha)},\ r>-\alpha$$

تعیین و سپس طبق رابطهٔ (۱۱) مقدار پارامتر α توسط نرم‌افزار مشخص شد. براساس محاسبات نرم‌افزار مقدار پارامتر α برابر با ۲/۹۸۲ است.

---

1. T.Dekker

www.SID.ir

Archive of SID

در گام آخر، با استفاده از رابطهٔ (۱۰) احتمال ورشکستگی نهایی شرکت برآورد شد. با توجه به اینکه شرکت مورد بررسی استراتژی خاصی برای تخصیص سرمایه به پرتفویهای خود ندارد، مقدار مازاد اولیهٔ تخصیص‌داده‌شده به این پرتفوی از ۱۰ میلیارد تا ۲۰۰ میلیارد ریال با گام ۱۰ میلیارد در نظر گرفته شد و تحت هر یک از این سناریوها احتمال ورشکستگی نهایی شرکت محاسبه شد، که خلاصهٔ نتایج آن در جدول ۲ نمایش داده شده است.

جدول ۲. تقریب احتمال ورشکستگی به ازای مقادیر مختلف مازاد اولیه

مقدار مازاد	۱۰	۲۰	۳۰	٤٠	٥٠
احتمال ورشکستگی	٪٤٠/٨٩	٪٤٠/٠٩	٪٣٩/٦٣	٪٣٩/٣٠	٪٣٩/٠٦
مقدار مازاد	٦٠	٧٠	٨٠	٩٠	١٠٠
احتمال ورشکستگی	٪٣٨/٨٥	٪٣٨/٦٨	٪٣٨/٥٤	٪٣٨/٤١	٪٣٨/٢٩
مقدار مازاد	١١٠	١٢٠	١٣٠	١٤٠	١٥٠
احتمال ورشکستگی	٪٣٨/١٩	٪٣٨/٠٩	٪٣٨/٠١	٪٣٧/٩٣	٪٣٧/٨٥
مقدار مازاد	١٦٠	١٧٠	١٨٠	١٩٠	٢٠٠
احتمال ورشکستگی	٪٣٧/٧٨	٪٣٧/٧٢	٪٣٧/٦٦	٪٣٧/٦٠	٪٣٧/٥٤

از جدول ۲ مشاهده می‌شود که احتمال ورشکستگی نهایی شرکت در حالتی که مقدار مازاد اولیه تخصیص‌داده‌شده به پرتفوی ۱۰ میلیارد باشد، حدود ٤٠/٨٩ درصد است که به موازات افزایش در مقدار مازاد اولیه تخصیص‌داده‌شده، کاهش می‌یابد. با این حال همان‌گونه که اعداد به دست آمده نشان می‌دهند حتی با افزایش این عدد به ۲۰۰ میلیارد باز هم احتمال ورشکستگی نهایی بسیار قابل ملاحظه است که احتمالاً نشانه‌ای از انتخاب بد پرتفوی و یا متناسب‌نبودن حق‌بیمهٔ دریافتی با ریسک پذیرفته شده است.

۵. نتیجه‌گیری و ارائهٔ پیشنهادها

در این تحقیق احتمال ورشکستگی نهایی پرتفوی شخص ثالث یک شرکت بیمهٔ ایرانی با فرض سناریوهای مختلف در خصوص مقدار مازاد اولیهٔ تخصیص‌داده‌شده به این پرتفوی، با استفاده از روش تقریب تیمز محاسبه شد. به این منظور در ابتدا فرایند

www.SID.ir

Archive of SID

مازاد با استفاده از مدل تصادفی پواسون مرکب مدل‌سازی شد. همان‌گونه که مشاهده شد، نتایج تحقیق نشان داد که توزیع گاما بهترین مدل برای مدل‌سازی شدت خسارتهاست. سپس ضریب تعدیل با استفاده از الگوریتم دکر محاسبه و درنهایت، با استفاده از روش تیمز احتمال ورشکستگی تقریب زده شد.

اگرچه همان‌گونه که در مقدمهٔ مقاله گفته شد، هیچ‌گونه معنی مطلقی را نمی‌توان به این احتمال نسبت دارد، اما به هر حال احتمال نسبتاً زیاد به دست آمده مؤید عدم ثبات پرتفوی شخص ثالث این شرکت است و بیانگر این موضوع است که شرکت باید در خصوص سیاستهای فعلی خود تجدیدنظر و در خصوص حق‌بیمه‌های اعمالی بازنگری کند و در صورتی‌که چنین چیزی مقدور نیست (بنا به دلایل قانونی) حداقل از طریق به کارگیری رویه‌های دقیق‌تر سنجش ریسک مشتریان، از تواتر و شدت خسارتها بکاهد. به کارگیری پوششهای اتکایی بیشتر و یا استفاده از سرمایهٔ در گردش بالاتر نیز دو راهکار دیگر برای حل این مشکل است.

لازم به ذکر است اگرچه مدل پواسون مرکب متداول‌ترین مدل برای مدل‌سازی فرایند مازاد در مباحث بیمه‌ای است، با این حال مدلهای دیگری نیز وجود دارند که در برخی موارد دقت بیشتری نسبت به مدل پواسون مرکب دارند، لذا محققین علاقمند می‌توانند با استفاده از سایر مدلها، فرایند مازاد را مدل‌سازی و جواب را با مدل پواسون مرکب مقایسه کنند.

منابع

1. Albrecher, H. and Boxma, O.J., 2004. A ruin model with dependence between claim sizes and claim intervals. *Insurance: Mathematics and Economics*, 35(2), pp. 245–254.

2. Albrecher, H. and Teugels, J., 2006. Exponential behavior in the presence of dependence in risk theory. *Journal of Applied Probability*, 43(1), pp.265–285.

3. Ambagaspitiya, R.S., 2009. Ultimate ruin probability in the Sparre Andersen model with dependent claim sizes and claim occurrence times. *Insurance: Mathematics and Economics*, 44, pp.464–472.

www.SID.ir

Archive of SID

4. Boudreault, M., Cossette, H., Landriault, D. and Marceau, E., 2006. On a risk model with dependence between interclaim arrivals and claim sizes. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2006(5), pp.301–323.

5. Chadjiconstantinidis, S. and Vrontos, S., 2014. On a renewal risk process with dependence under Farlie–Gumbel–Morgenstern copula. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2014(2), p.p125–158.

6. Cossette, H., Marceau, E. and Marri, F., 2010. Analysis of ruin measures for the classical compound Poisson risk model with dependence. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2010(3), pp.221–245.

7. Dickson, D.C.M., 2006. *Insurance Risk and Ruin*. Cambridge: Cambridge University Press.

8. Gray, R. J. and Pitts, S. M., 2012. *Risk Modeling in general insurance: from principle to practice*. 1st ed, New York: Cambridge University Press.

9. Heilpern, S., 2014. Ruin measures for a compound Poisson risk model with dependence based on the Spearman copula and the exponential claim sizes. *Insurance: Mathematics and Economics*, 59, pp.251-257.

10. Kaas, R., Goovaerts, M., Dhaene, J. and Denuit, M., 2008. *Modern Actuarial Risk Theory Using R*. 2nd ed, Berlin: Springer.

11. Klugman, A.S., Panjer, H.H. and Willmot, G.E., 2004. *Loss Models: From Data to Decisions*. 2nd ed, New Jersey: John Wiley and Sons.

12. Tijms, H., 1994. *Stochastic Models.–An Algorithmic Approach*. Chichester: Wiley.

13. Tse, Y.K., 2009. *Non life Actuarial Models: Theory, Methods and Evaluation*. 1st ed, New York: Cambridge University Press.

www.SID.ir