

Calculation of the Relative Premium based on Two-Point Inflated Poisson Model for Rate-Making System

Amir Teimour Payandeh NajafAbadi* Fatemeh Atatalab Ramezan Rezazadeh

1-Professor, Shahid Beheshti University.

2-Ph.D Student in Actuarial Science, Shahid Beheshti University.

3-Master of Actuarial Science, Shahid Beheshti University.

(DOI):10.22056/jir.2019.139100.2326

ABSTRACT

Objective: One of the most important issues facing insurance companies is the determination of fair premium. Since no claims history leads to a reduction in the premium, in this study we assume that insureds have some sort of censored behavior at two points i and j . The frequency of two points i and j is significantly high in the observations. In this paper, we use an inflated Poisson distribution of two points i and j to estimate relative premium in Bonus-Malus system.

Methodology: In this paper we use i - j inflated Poisson model for modeling hunger for bonus. The method used is an approximation based on Bayesian methods for estimators of credibility under quadratic and LINEX loss functions.

Findings: The numerical results show that if we model the phenomenon of customer hunger for bonus using two-point inflated Poisson models, the relative premium is significantly reduced which attracts customers. In addition, it is also shown that using the LINEX loss function is a suitable method to reduce the relative premium of customers.

Conclusion: In a rating system, an insurer's insurance records are used to calculate fair premiums. The problem addressed in this paper is modeling hunger for bonus based on non-reporting of small losses.

The results of the present paper show that: (1) Relative premium is significantly reduced when modeling hunger for bonus by using inflated Poisson models; (2) relative premium estimator under LINEX loss function is less than this premium under quadratic loss function.

Since Bonus-Malus system is based on number of claims, it cannot be a fair system, so it is recommended to use a system that incorporates both the number and severity of claims into the calculations.

Received:

2018 July 18

Accepted:

2019 August 26

Keywords:

Relative premium, Inflated Poisson distribution, Linear credibility, Loss function.

JEL

Classification:

G22, C11, C13

* **Corresponding Author:** Amir Teimour Payandeh NajafAbadi

Email: Amirpayande@sbu.ac.ir

محاسبه حق بیمه نسبی یک سیستم نرخ گذاری شده براساس مدل پواسون آماسیده در دو نقطه

امیر تیمور پاینده نجف آبادی* فاطمه عطا طلب رمضان رضازاده

- ۱- استاد گروه بیم سنجی، دانشگاه شهید بهشتی
۲- دانشجوی دکتری بیم سنجی، دانشگاه شهید بهشتی و پژوهشگر پژوهشکده بیمه
۳- کارشناسی ارشد بیم سنجی، دانشگاه شهید بهشتی

چکیده

هدف: یکی از مهم ترین مسائلی است که شرکت های بیمه با آن مواجه هستند تعیین حق بیمه عادلانه است. با توجه به این که سابقه عدم خسارت منجر به تخفیف در حق بیمه می شود لذا فرض می کنیم بیمه گذاران نوعی رفتار خاص در دو نقطه I و J ارائه می کنند. به گونه ای که به صورت معنی داری فراوانی دو نقطه I و J در مشاهدات زیاد است. هدف این مقاله برآورد حق بیمه نسبی در سیستم نرخ گذاری شده تحت مدل های پواسون آماسیده در این دو نقطه است.

روش شناسی: در این تحقیق برای مدل بندی اشتیاق برای پاداش از یک توزیع پواسون آماسیده در دو نقطه I و J استفاده شده است روش مورد استفاده یک روش تقریبی مبتنی بر روش های بیزی برای برآوردگرهای باورمندی تحت دو تابع زبان مربع خطا و لاینکس است. **یافته ها:** نتایج عددی به دست آمده حاکی از آن است که اگر از مدل های پواسون آماسیده در دو نقطه استفاده کنیم، حق بیمه نسبی به طور معنی داری کاهش می یابد، که این امر در جذب مشتریان بیشتر تأثیر به سزایی دارد. همچنین نشان داده شد که استفاده از تابع زبان لاینکس ایده مناسبی برای کاهش حق بیمه نسبی مشتریان است. **نتیجه گیری:** در یک سیستم نرخ گذاری شده از سوابق بیمه ای یک بیمه گذار برای محاسبه حق بیمه عادلانه استفاده می شود. مسأله ای که در این مقاله مورد تحقیق قرار گرفت مدل سازی اشتیاق بیمه گذاران برای دریافت تخفیف بر مبنای عدم گزارش خسارت های کوچک است.

نتایج مقاله حاضر نشان داد: (۱) اگر پدیده تمایل به پاداش مشتریان را با استفاده از مدل های پواسون آماسیده مدل بندی کنیم، نرخ حق بیمه نسبی کاهش چشم گیری پیدا می کند؛ (۲) برآوردگر حق بیمه نسبی تحت تابع زبان لاینکس کمتر از حق بیمه نسبی تحت تابع زبان مربع خطاست.

با توجه به این که سیستم پاداش- جریمه مبتنی بر تعداد خسارت هاست نمی تواند یک سیستم عادلانه باشد بنابراین توصیه می شود از سیستمی استفاده شود که هر دو عامل تعداد و شدت خسارت ها را در محاسبات دخیل کند.

تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۰۴/۲۷

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۰۶/۰۴

کلیدواژه ها:

حق بیمه نسبی، توزیع پواسون آماسیده، باورمندی خطی، تابع زبان طبقه بندی موضوعی: G22, C11, C13

نویسنده مسئول: * امیر تیمور پاینده نجف آبادی

پست الکترونیکی: Amirtpayande@sbu.ac.ir

مقدمه

قیمت‌گذاری محصولات بیمه‌ای یا به‌اصطلاح تعیین حق‌بیمه یکی از مهم‌ترین مسائلی است که شرکت‌های بیمه با آن مواجه‌اند. هدف از یک سیستم نرخ‌گذاری شده استفاده از سوابق بیمه‌های بیمه‌گذار برای محاسبه حق‌بیمه‌ای عادلانه است. مقدار حق‌بیمه پرداختی توسط بیمه‌گذار در یک سیستم نرخ‌گذاری شده به عوامل نرخ‌گذاری دوره جاری و علاوه بر آن، به سابقه خسارتی بیمه‌گذار بستگی دارد. سیستم نرخ‌گذاری شده بیمه‌گذارانی را که طی یک سال، یک یا تعداد بیشتری ادعای خسارت داشته باشند جریمه می‌کند و به بیمه‌گذارانی که هیچ ادعای خسارتی ندارند تخفیف می‌دهد. هدف از سیستم نرخ‌گذاری تعیین نرخ حق‌بیمه آتی بیمه‌گذارهای طبقه‌بندی‌شده بر مبنای متوسط تعداد ادعای خسارت در t سال گذشته است.

همانند سیستم‌های پاداش-جریمه، حق‌بیمه در یک سیستم نرخ‌گذاری شده از ضرب حق‌بیمه نسبی در حق‌بیمه پایه به دست می‌آید. حق‌بیمه نسبی بر اساس فراوانی خسارت‌های ادعا شده و حق‌بیمه پایه بر اساس شدت خسارت‌های وارده محاسبه می‌شود.

پرتغوی یک شرکت بیمه با n بیمه‌گذار متفاوت را در نظر بگیرید. اگر Y_{ij} نشان‌دهنده تعداد خسارت‌های ادعا شده در بازه زمانی $(j-1, j]$ توسط بیمه‌گذار i ام باشد، مجموع خسارت‌های هر بیمه‌گذار تا زمان t برای $i = 1, 2, \dots, n$ برابر است با:

$$Y_i = \sum_{j=1}^t Y_{ij} \quad (1)$$

و حق‌بیمه سال $t+1$ ام تحت یک سیستم نرخ‌گذاری شده برابر است با:

$$P_i(t+1) = BP(t+1) \times \text{Rate}(Y_i(t); t) \quad (2)$$

که در آن $BP(t+1)$ حق‌بیمه پایه سال $(t+1)$ ام برای همه n بیمه‌گذار و $\text{Rate}(Y_i(t); t)$ حق‌بیمه نسبی برای فرد i ام است. حق‌بیمه نسبی $\text{Rate}(Y_i(t); t)$ معمولاً با استفاده از برآوردگرهای بیز تحت توابع زیان متفاوت در یک سیستم نرخ‌گذاری شده محاسبه می‌شود (دینویت و دان، ۲۰۰۱).

فرض کنید مجموع تعداد خسارت‌های ادعا شده از سوی بیمه‌گذار i ام تا زمان t ، Y_i ، به شرط پارامتر ریسک $\theta = \theta$ ، دارای توزیع پواسون آماسیده در i و Z پارامتر ریسک دارای توزیع پیشین گاما است. هدف از نگارش این مقاله به‌کارگیری روش تقریبی پاینده (۲۰۱۰)، برای برآورد $\text{Rate}(Y_i(t); t)$ تحت توابع زیان مربع خطا و لاینکس است؛ به‌عبارت‌دیگر، برآورد $\text{Rate}(Y_i(t); t)$ به کمک این رابطه امکان‌پذیر می‌شود:

$$\text{Rate}(Y_{i.}(t); t) = \alpha_{opt}^{(i)} \bar{Y}_{i.}(t) + (1 - \alpha_{opt}^{(i)})\mu \quad (3)$$

که در آن $\bar{Y}_{i.}(t) := Y_{i.}(t)/t$ و μ میانگین توزیع پیشین است.

در این مقاله، ابتدا به بیان پیشینه پژوهش خواهیم پرداخت و سپس برخی از مفاهیم و تعاریف موردنیاز برای سایر بخش‌ها ارائه خواهد شد. در بخش بعد، تئوری اصلی را بیان خواهیم کرد و با تلفیق ایده ارائه شده توسط پاینده (۲۰۱۰)، یک روش تقریبی مبتنی بر روش‌های بی‌زی برای برآوردگرهای باورمندی تحت دو تابع زیان مربع خطا و لاینکس ارائه خواهیم داد. در ادامه، با استفاده از نتایج به دست آمده در بخش قبل، حق بیمه نسبی برای سیستم پاداش - جریمه ایران را محاسبه خواهیم کرد و در نهایت، در بخش پایانی به نتیجه‌گیری و ارائه پیشنهاد خواهیم پرداخت.

۱. مروری بر پیشینه تحقیق

لانگ^۱ (۱۹۶۹) از ابزارهای آماری و ریاضی برای محاسبه حق بیمه در یک سیستم نرخ‌گذاری شده استفاده کرد.

دینویت و دان (۲۰۰۱) از تابع زیان نمایی برای محاسبه حق بیمه نسبی استفاده کردند. برمودز و همکاران^۲ (۲۰۰۱) نشان دادند که برآوردگر باورمندی تحت تابع زیان نمایی کمتر از برآوردگر باورمندی تحت تابع زیان مربع خطا است.

موریلو و برمودز^۳ (۲۰۰۳) از مدل پواسون گوسین^۴ معکوس برای تعداد ادعاهای گزارش شده استفاده کردند و نتیجه گرفتند که برآوردگر بیز تحت تابع زیان نمایی در مقایسه با تابع زیان مربع خطا بهتر است.

بوشر و دینویت^۵ (۲۰۰۸) برای محاسبه حق بیمه باورمندی در مدل‌های آماسیده در صفر برای داده‌های پانل استفاده کردند و نشان دادند مدل‌های آماسیده در صفر برای به دست آوردن حق بیمه باورمندی انعطاف پذیرتر هستند.

پاینده و محمدپور (۲۰۱۷) از یک مدل رگرسیونی/توزیع آمیخته دوجمله‌ای منفی آماسیده در k به عنوان یک جایگزین قابل انعطاف به جای مدل رگرسیونی/توزیع پواسون آماسیده در صفر استفاده کردند.

1. Lange
2. Bermúdez et al.
3. Morillo & Bermúdez
4. Gaussian
5. Boucher & Denuit

۲. تعاریف و مفاهیم مقدماتی

در این بخش چند تعریف مقدماتی مورد نیاز را بیان می‌کنیم. شرکت‌های بیمه ریسک‌های زیادی را بیمه می‌کنند، شرکت‌ها با هدف نرخ‌گذاری، این ریسک‌ها را در رده‌های مشابه دسته‌بندی می‌کنند. به‌منظور دسته‌بندی ریسک بیمه‌گذاران و محاسبه حق بیمه نسبی در سیستم نرخ‌گذاری شده لازم است فاکتورهای نامعلومی در محاسبات منظور شوند که باعث پیچیدگی محاسبات می‌شوند. برآوردگر بیز برآوردگر معقول و قابل‌قبولی برای رفع این مشکل و انجام محاسبات است. متأسفانه، در بسیاری از موارد، برآوردگر بیز به‌دست‌آمده را نمی‌توان به فرم برآوردگر باورمندی دقیق بازنویسی کرد. برای حل این مشکل، پاینده (۲۰۱۰) با استفاده از حداقل کردن میانگین مربع خطا روشی را ارائه داد که در آن می‌توان برآوردگر بیز را به‌صورت تقریبی به فرم برآوردگر باورمندی بازنویسی کرد. لم ۱ از پاینده (۲۰۱۰) نشان می‌دهد چگونه می‌توان برآوردگر بیز را در فرمول باورمندی بیان کرد.

لم ۱. فرض کنید X_1, X_2, \dots, X_n به شرط پارامتر ریسک $\theta = \theta$ متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع با میانگین $E(X|\theta) := \mu(\theta)$ باشند. همچنین فرض کنید پارامتر ریسک θ دارای توزیع پیشین π با میانگین μ باشد، یا به عبارت دیگر $\mu = E_\pi(\theta)$ و δ_π برآوردگر بیز تحت تابع زیان ρ و تابع پیشین π باشد. آن‌گاه، در میان تمام کلاس برآوردگرهای باورمندی،

$$D := \{\delta(x) = \beta\bar{x} + (1 - \beta)\mu; \beta \in [0, 1]\}$$

برآوردگر δ_{opt}

$$\delta_{opt} = \alpha_{opt}\bar{x} + (1 - \alpha_{opt})\mu$$

با

$$\alpha_{opt} = \frac{E((\bar{x} - \mu)(\delta_\pi(x) - \mu))}{E((\bar{x} - \mu)^2)}$$

کمترین فاصله میانگین مربع خطا بین δ_π و δ_β را دارد. به عبارت دیگر:

$$\delta_{opt} = \operatorname{argmin}(\delta_\pi(x) - \delta_\beta(x))^2$$

که در آن $x = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$ و argmin شناسه مینیمم‌کننده تابع است.

حق بیمه نسبی در سیستم نرخ‌گذاری شده بر مبنای تعداد ادعاهای گزارش شده در یک دوره زمانی محاسبه می‌شود. از این رو، برخی از بیمه‌گذاران ترجیح می‌دهند ادعایی را گزارش ندهند. این پدیده، پدیده اشتیاق برای پاداش نامیده می‌شود که منجر به پدید آمدن تعداد زیادی صفر در مدل می‌شود. این پدیده، در سیستم نرخ‌گذاری شده عادی است و توسط مدل‌های آماسیده در صفر مدل می‌شود (پاینده و همکاران، ۲۰۱۷).

پدیده اشتیاق برای پاداش فقط مختص افراد با صفر ادعا در سال جاری نیست بلکه برای همه افراد در همه رده‌ها صادق است. مسلماً کسانی که در سال جاری حداقل یک خسارت را گزارش داده‌اند، اگر خسارت کوچک دیگری در همین سال به آن‌ها وارد شود، برای جلوگیری از انتقال به رده‌های بالاتر با حق بیمه بیشتر، تمایل ندارند این خسارت کوچک را گزارش دهند یا رفتاری را مرتکب شوند که یک

امتیاز منفی محسوب شود. به طور مثال، فرض کنید در یک سیستم پاداش جریمه، قانون انتقال به این صورت باشد که اگر فردی در سال جاری فقط یک بار ادعای خسارت داشته باشد به رده دوم و اگر دو بار ادعای خسارت داشته باشد به رده چهارم منتقل شود؛ بنابراین مشتریانی که قبلاً یک ادعای خسارت داشته‌اند تمایل ندارند به خاطر خسارتی ناچیز به رده‌های بالاتر با حق بیمه بیشتر منتقل شوند.

در این مقاله، فرض می‌کنیم در دو نقطه i و j از اشتیاق برای پاداش داشته باشیم. به بررسی پدیده اشتیاق برای پاداش روی توزیع تعداد ادعاها با استفاده از توزیع پواسون آماسیده در این دو نقطه می‌پردازیم و حق بیمه نسبی در سیستم نرخ‌گذاری شده تحت مدل‌های پواسون آماسیده در این دو نقطه را برآورد می‌کنیم. برای این منظور، ابتدا به تعریف تابع توزیع پواسون آماسیده در i و j می‌پردازیم.

تعریف ۱. متغیر تصادفی Y تحت سه پارامتر θ ، ω_1 و ω_2 دارای توزیع پواسون آماسیده در i و j است. $IP(\theta, \omega_1, \omega_2) - \{i, j\}$ هرگاه تابع جرم احتمال آن به شکل زیر باشد:

$$p_Y(y|\theta, \omega_1, \omega_2) = \left(\omega_1 + (1 - \omega_1 - \omega_2) \frac{e^{-\theta} \theta^i}{i!} \right) I_{\{i\}}(y) \\ + \left(\omega_2 + (1 - \omega_1 - \omega_2) \frac{e^{-\theta} \theta^j}{j!} \right) I_{\{j\}}(y) \\ + (1 - \omega_1 - \omega_2) \frac{e^{-\theta} \theta^y}{y!} I_{\{1,2,\dots\}}(y)$$

که در آن $\theta > 0$ و $\omega_1, \omega_2 \in [0, 1]$ ، توزیع $IP - \{i, j\}$ یک ترکیب وزنی از نقاط i و j تابع جرم احتمال پواسون برای کلیه نقاط است (رضیئی و همکاران، ۲۰۱۶).

در ادامه، توزیع حاشیه‌ای متغیر تصادفی Y را در قالب قضیه ۱ به دست می‌آوریم.

قضیه ۱. فرض کنید متغیر تصادفی Y به شرط $\theta = \theta$ و ω_1, ω_2 دارای توزیع $IP - \{i, j\}(\theta, \omega_1, \omega_2)$ و همچنین θ دارای توزیع گاما با پارامترهای (β, τ) باشد. آن‌گاه:
الف) توزیع حاشیه‌ای Y برابر است با:

$$p_Y(y) = \begin{cases} \omega_1 + (1 - \omega_1 - \omega_2) \frac{t^i \tau^\beta \Gamma(i + \beta)}{\Gamma(i + 1) \Gamma(\beta) (t + \tau)^{i + \beta}} & , y = i \\ \omega_2 + (1 - \omega_1 - \omega_2) \frac{t^j \tau^\beta \Gamma(j + \beta)}{\Gamma(j + 1) \Gamma(\beta) (t + \tau)^{j + \beta}} & , y = j \\ (1 - \omega_1 - \omega_2) \frac{\Gamma(y + \beta)}{\Gamma(y + 1) \Gamma(\beta)} \left(\frac{t}{t + \tau} \right)^y \left(\frac{\tau}{t + \tau} \right)^\beta & , y = 0, 1, \dots \\ & , y \neq i, j \end{cases}$$

ب) تابع چگالی پسین Y برابر است با:

$$p_{\theta|Y}(\theta|y) = \begin{cases} \left(\frac{\omega_1 + (1 - \omega_1 - \omega_2) \frac{e^{-\theta t} (\theta t)^i}{\Gamma(i+1)}}{\omega_1 + \frac{(1 - \omega_1 - \omega_2) t^i \tau^\beta \Gamma(i+\beta)}{\Gamma(i+\beta) \Gamma(\beta) (t+\tau)^{i+\beta}}} \right) \frac{\tau^\beta \theta^{\beta-1} e^{-\tau \theta}}{\Gamma(\beta)} & , y = i \\ \left(\frac{\omega_2 + (1 - \omega_1 - \omega_2) \frac{e^{-\theta t} (\theta t)^j}{\Gamma(j+1)}}{\omega_2 + \frac{(1 - \omega_1 - \omega_2) t^j \tau^\beta \Gamma(j+\beta)}{\Gamma(j+\beta) \Gamma(\beta) (t+\tau)^{j+\beta}}} \right) \frac{\tau^\beta \theta^{\beta-1} e^{-\tau \theta}}{\Gamma(\beta)} & , y = j \\ \frac{\theta^{y+\beta-1} e^{-\theta(t+\tau)} (t+\tau)^{y+\beta}}{\Gamma(y+\beta)} & y = 0, 1, \dots \\ & , y \neq i, j \end{cases}$$

برهان الف) می‌دانیم فرم کلی به دست آوردن توزیع حاشیه‌ای به این صورت است:

$$p_Y(y) = \int_0^\infty p_{\theta|Y}(\theta|y) f_\theta(\theta) d\theta$$

بنابراین با توجه به فرم چگالی پیشین، توزیع حاشیه‌ای $\{i, j\}$ -IP را در سه حالت زیر محاسبه می‌کنیم:
۱. برای $y=i$:

$$\begin{aligned} p_Y(y) &= \int_0^\infty \left(\omega_1 + (1 - \omega_1 - \omega_2) \frac{e^{-\theta t} (\theta t)^i}{i!} \right) f_\theta(\theta) d\theta \\ &= \int_0^\infty \omega_1 f_\theta(\theta) d\theta + (1 - \omega_1 - \omega_2) \int_0^\infty \frac{e^{-\theta(t+\tau)} \tau^\beta \theta^{1+\beta-1} t^i}{\Gamma(\beta) \Gamma(i+1)} d\theta \end{aligned}$$

قسمت دوم رابطه بالا را در $\frac{(i+\beta)}{(\tau+t)^{i+\beta}} t^i$ ضرب و تقسیم می‌کنیم. در نتیجه خواهیم داشت:

$$p_Y(y) = \omega_1 + (1 - \omega_1 - \omega_2) \frac{t^i \tau^\beta \Gamma(i+\beta)}{\Gamma(i+1) \Gamma(\beta) (t+\tau)^{i+\beta}} \quad (۴)$$

۲. برای $y=j$ ، برهان مشابه حالت $y=i$ است. فقط کافی است در رابطه (۴) به جای i ، j را قرار دهیم.

$$p_Y(y) = \omega_2 + (1 - \omega_1 - \omega_2) \frac{t^j \tau^\beta \Gamma(j+\beta)}{\Gamma(j+1) \Gamma(\beta) (t+\tau)^{j+\beta}}$$

۳. برای $y=0, 1, 2, \dots, y \neq i, j$ ، توزیع حاشیه‌ای به این صورت است:

$$\begin{aligned} p_Y(y) &= \int_0^\infty (1 - \omega_1 - \omega_2) \frac{e^{-\theta t} (\theta t)^y e^{-\theta \tau} \tau^\beta \theta^{\beta-1}}{y!} d\theta \\ &= (1 - \omega_1 - \omega_2) \int_0^\infty \frac{e^{-\theta(t+\tau)} \tau^\beta t^y \theta^{y+\beta-1}}{\Gamma(\beta) \Gamma(y+1)} d\theta \end{aligned}$$

رابطه بالا را در عبارت $\frac{(y+\beta)}{(\tau+t)^{y+\beta}} t^y$ ضرب و تقسیم می‌کنیم، لذا داریم:

$$p_Y(y) = (1 - \omega_1 - \omega_2) \frac{\Gamma(y+\beta)}{\Gamma(y+1) \Gamma(\beta)} \left(\frac{t}{t+\tau} \right)^y \left(\frac{\tau}{t+\tau} \right)^\beta$$

به این ترتیب، برهان قسمت الف کامل می‌شود.

برهان ب) می‌دانیم توزیع پسین به این شکل محاسبه می‌شود:

$$p_{\theta|Y}(\theta|y) = \frac{\pi(\theta)p_{Y|\theta}(y|\theta)}{p_Y(y)} \quad (5)$$

در حالتی که $y=i, j$ کافی است $\pi(\theta)$, $p_{Y|\theta}(y=i, j|\theta)$, $p_Y(y=i, j)$ به دست آمده را در رابطه (5) جای گذاری کنیم. بدین ترتیب برهان قسمت ب کامل می شود. برای $y \neq i, j$ با استفاده از رابطه (5)، داریم:

$$\begin{aligned} p_{\theta|Y}(\theta|y) &= \frac{(1 - \omega_1 - \omega_2) \frac{e^{-\theta t} (\theta t)^y \tau^\beta \theta^{\beta-1} e^{-\tau \theta}}{y! \Gamma(\beta)}}{(1 - \omega_1 - \omega_2) \frac{\Gamma(y + \beta)}{\Gamma(y + 1) \Gamma(\beta)} \left(\frac{t}{t + \tau}\right)^y \left(\frac{\tau}{t + \tau}\right)^\beta} \\ &= \frac{\theta^{y+\beta-1} e^{-\theta(t+\tau)}}{\Gamma(y + \beta) \left(\frac{1}{t + \tau}\right)^y \left(\frac{1}{t + \tau}\right)^\beta} \\ &= \frac{\theta^{y+\beta-1} e^{-\theta(t+\tau)} (t + \tau)^{y+\beta}}{\Gamma(y + \beta)} \end{aligned}$$

۳. محاسبه عامل باورمندی بر مبنای توزیع پواسون آماسیده در i و j

اگر تعداد ادعاها به شرط پارامتر ریسک $\theta = \theta$ دارای توزیع $\{i, j\}$ -IP و پارامتر ریسک دارای توزیع پیشین گاما باشد، به سادگی می توان نشان داد برآوردگر بیز به دست آمده تحت تابع زیان مربع خطا و لاینکس را نمی توان به فرم برآوردگر باورمندی دقیق بازنویسی کرد. بنابراین برای اینکه بتوانیم به طور تقریبی برآوردگر بیز را به فرم برآوردگر باورمندی بازنویسی کنیم، از لم ۱ برای تقریب زدن برآوردگر باورمندی در این بخش استفاده می کنیم.

فرض کنید پرتفوی یک شرکت بیمه شامل n بیمه گذار است. همچنین فرض کنید تحت سیستم نرخ گذاری شده، حق بیمه نسبی سال $(t+1)$ ام بر اساس معادله (۲) محاسبه می شود. در این بخش به بررسی تأثیر پدیده اشتیاق برای پاداش روی توزیع تعداد ادعاها با استفاده از توزیع پواسون آماسیده $\{i, j\}$ -IP پرداخته و حق بیمه نسبی را تحت دو تابع زیان مربع خطا و لاینکس محاسبه می کنیم.

قضیه ۲. فرض کنید متغیر تصادفی Y (توزیع تعداد خسارتها تا زمان t) برای پارامتر داده شده $\theta = \theta$ دارای توزیع پواسون آماسیده در i و j با پارامتر ریسک θ باشد. همچنین اگر θ دارای توزیع پیشین $\text{gamma}(\beta, \tau)$ باشد، آن گاه حق بیمه نسبی $\text{Rate}_{Quad}(Y; t)$ تحت تابع زیان مربع خطا برای بیمه گذار λ م به این صورت است:

$$\text{Rate}_{Quad}(\bar{Y}; t) = \alpha_{opt}^{(i)} \bar{Y} + (1 - \alpha_{opt}^{(i)}) \frac{\beta}{\tau}$$

که در آن

$$\alpha_{opt}^{(i)} = \frac{E(\bar{Y}\delta_{\pi}(Y)) + E(Y)E(\delta_{\pi}(Y))}{\frac{1}{t}var(Y)}$$

برهان. با استفاده از قضیه ۱ می‌توان نشان داد برآوردگر بیز تحت تابع زیان مربع خطا به صورت زیر است:

$$\delta_{\pi}(Y) = \left[\frac{\beta\omega_1}{\tau\left(\omega_1 + \frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^i\tau^{\beta}\Gamma(i+\beta)}{\Gamma(i+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{i+\beta}}\right)} + \frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^i\tau^{\beta}\Gamma(i+\beta+1)}{\Gamma(i+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{i+\beta+1}} \right] I_{\{i\}}(y) + \left[\frac{\beta\omega_2}{\tau\left(\omega_2 + \frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^j\tau^{\beta}\Gamma(j+\beta)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{j+\beta}}\right)} + \frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^j\tau^{\beta}\Gamma(j+\beta+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{j+\beta+1}} \right] I_{\{j\}}(y) + \left[\frac{y+\beta}{t+\tau} \right] I_{\{0,1,\dots\}}(y).$$

برای محاسبه $\alpha_{opt}^{(i)}$ ابتدا باید $E[\bar{Y}(t)\delta_{\pi}(Y(t))]$ و $E[\delta_{\pi}(Y(t))]$ را محاسبه کنیم:

$$\begin{aligned} E[\bar{Y}(t)\delta_{\pi}(Y)] &= \left[\frac{i}{t}\delta_{\pi}(i) \right] P_Y(i) + \left[\frac{j}{t}\delta_{\pi}(j) \right] P_Y(j) + \sum_{\substack{y=0,1,\dots \\ y \neq i,j}} \frac{Y}{t} \delta_{\pi}(Y) P(Y) \\ &= \frac{i}{t} \left(\frac{\beta\omega_1}{\tau\left(\omega_1 + \frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^i\tau^{\beta}\Gamma(i+\beta)}{\Gamma(i+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{i+\beta}}\right)} + \frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^i\tau^{\beta}\Gamma(i+\beta+1)}{\omega_1 + \frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^i\tau^{\beta}\Gamma(i+\beta)}{\Gamma(i+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{i+\beta}}} \right) \times \left(\omega_1 + \frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^i\tau^{\beta}\Gamma(i+\beta)}{\Gamma(i+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{i+\beta}} \right) + \\ &\frac{j}{t} \left(\frac{\beta\omega_2}{\tau\left(\omega_2 + \frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^j\tau^{\beta}\Gamma(j+\beta)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{j+\beta}}\right)} + \frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^j\tau^{\beta}\Gamma(j+\beta+1)}{\omega_2 + \frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^j\tau^{\beta}\Gamma(j+\beta)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{j+\beta}}} \right) \times \left(\omega_2 + \frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^j\tau^{\beta}\Gamma(j+\beta)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{j+\beta}} \right) + \\ &\sum_{\substack{y=0,1,\dots \\ y \neq i,j}}^{\infty} \frac{y}{t} \frac{y+\beta}{t+\tau} \frac{(1-\omega_1-\omega_2)\Gamma(y+\beta)}{\Gamma(y+1)\Gamma(\beta)} \left(\frac{t}{t+\tau}\right)^y \left(\frac{\tau}{t+\tau}\right)^{\beta} \\ &= \\ &\frac{i}{t} \left(\frac{\beta\omega_1}{\tau} + \frac{(1-\omega_1-\omega_2)\Gamma(i+\beta+1)t^i\tau^{\beta}}{\Gamma(i+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{i+\beta+1}} \right) + \frac{j}{t} \left(\frac{\beta\omega_2}{\tau} + \frac{(1-\omega_1-\omega_2)\Gamma(j+\beta+1)t^j\tau^{\beta}}{\Gamma(j+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{j+\beta+1}} \right) + \\ &\sum_{\substack{y=0,1,\dots \\ y \neq i,j}}^{\infty} \frac{(1-\omega_1-\omega_2)\Gamma(y+\beta+1)}{t(t+\tau)\Gamma(y)\Gamma(\beta)} \left(\frac{t}{t+\tau}\right)^y \left(\frac{\tau}{t+\tau}\right)^{\beta} \end{aligned}$$

از این رو:

$$E[\bar{Y}\delta_{\pi}(Y)] = \frac{i}{t\tau}\beta\omega_1 + \frac{j}{t\tau}\beta\omega_2 + \frac{(1-\omega_1-\omega_2)\beta(\beta+1)}{\tau^2}$$

$$E[\delta_{\pi}(Y)] = [\delta_{\pi}(Y = i)]P_Y(y = i) + [\delta_{\pi}(Y = j)]P_Y(y = j) + \sum_{\substack{Y=0,1,\dots \\ Y \neq i,j}}^{\infty} \delta_{\pi}(Y)P_Y(y)$$

$$E[\delta_{\pi}(Y)] = \left(\frac{\beta\omega_1}{\tau} + \frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^i\tau^{\beta}\Gamma(i+\beta+1)}{\Gamma(i+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{i+\beta+1}} \right) + \left(\frac{\beta\omega_2}{\tau} + \frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^j\tau^{\beta}\Gamma(j+\beta+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{j+\beta+1}} \right) + \sum_{\substack{Y=0,1,\dots \\ Y \neq i,j}}^{\infty} \frac{(1-\omega_1-\omega_2)\Gamma(y+\beta+1)}{(t+\tau)\Gamma(y+1)\Gamma(\beta)} \left(\frac{t}{t+\tau}\right)^y \left(\frac{\tau}{t+\tau}\right)^{\beta}$$

بنابراین:

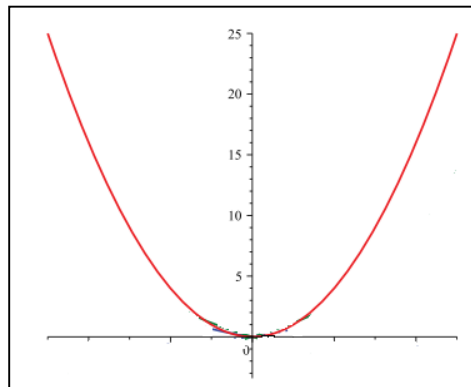
$$E[\delta_{\pi}(Y)] = \frac{\beta\omega_1}{\tau} + \frac{\beta\omega_2}{\tau} + \frac{(1-\omega_1-\omega_2)\beta}{\tau}$$

با جای گذاری روابط بالا در لم ۱ برهان کامل می شود.

بسیاری از آموزه های آمار کلاسیک، بر پایه تابع زیان مربع خطا استوار است که به صورت زیر تعریف می شود:

$$L(\theta, \hat{\theta}) = (\theta - \hat{\theta})^2$$

این تابع زیان از دیدگاه تئوری باعث سادگی محاسبات ریاضی در حصول برآوردگرها می شود. نمودار ۱ رفتار تابع زیان مربع خطا را نشان می دهد.



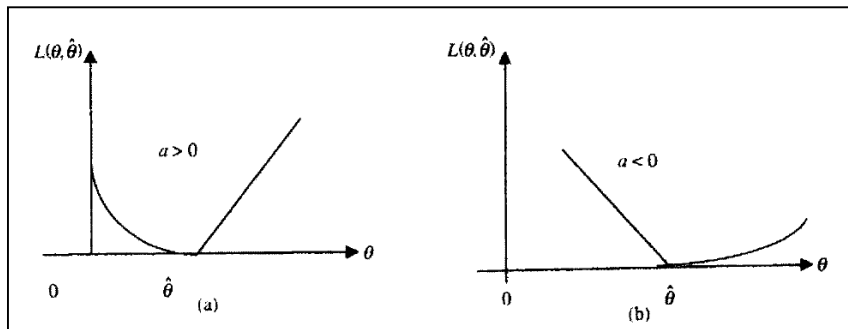
نمودار ۱. تابع زیان مربع خطا

تابع زیان مربع خطا جریمه های یکسانی را به خطاهای مثبت و منفی در هنگام برآورد می دهد. این امر باعث می شود که جریمه خطای بیش برآورد و کم برآورد یکسان باشد. از دیدگاه کاربردی، با توجه به اینکه معمولاً زیان های حاصل از خطای بیش برآورد و خطای کم برآورد اهمیت یکسانی ندارند، استفاده از این تابع زیان توجیه پذیر نیست. برآورد کم حق بیمه برای شرکت بیمه بسیار خطرناک تر از برآورد زیاد آن است. در مباحث نرخ گذاری بیمه می توان گفت برآوردگر بیس تحت تابع زیان مربع

خطا، هیچ تمایز معنی‌داری بین بیش‌برآورد و یا کم‌برآورد حق‌بیمه قائل نمی‌شود. بنابراین بهتر است از یک تابع زیان نامتقارن برای برآورد استفاده شود. شاید بتوان گفت تابع زیان نامتقارن لاینکس جایگزین مناسبی برای تابع زیان مربع خطا است. این تابع زیان جریمه متفاوتی بین بیش‌برآورد و یا کم‌برآورد حق‌بیمه قائل می‌شود. فرم ریاضی تابع زیان لاینکس به این صورت است:

$$L_{Linex} = \exp\{a(\hat{\theta} - \theta)\} - a(\hat{\theta} - \theta) - 1$$

که در آن $a \neq 0$ و $b > 0$ است. نمودار ۲ رفتار تابع زیان لاینکس را نسبت به حالت‌های مختلف a به تصویر می‌کشد.



نمودار ۲. (a) تابع زیان لاینکس برای $a > 0$ و (b) تابع زیان لاینکس برای $a < 0$

قضیه ۳ حق‌بیمه نسبی $Rate_{LINEX}(Y; t)$ را تحت تابع زیان لاینکس ارائه می‌کند.

قضیه ۳. فرض کنید متغیر تصادفی Y (توزیع تعداد خسارت‌ها تا زمان t) برای پارامتر داده‌شده $\theta = \theta$ ، دارای توزیع پواسون آماسیده در i و z پارامتر شدت θ باشد. همچنین اگر θ دارای توزیع پیشین $gamma(\beta, \tau)$ باشد، آن‌گاه حق‌بیمه نسبی $Rate_{LINEX}(Y; t)$ ، تحت تابع زیان لاینکس برای فرد t ام به صورت زیر است:

$$Rate_{LINEX}(\bar{Y}; t) = \alpha_{opt}^{(i)} \bar{Y} + (1 - \alpha_{opt}^{(i)}) \frac{\beta}{\tau}$$

که در آن:

$$\alpha_{opt}^{(i)} = \frac{E(\bar{Y} \delta_{\pi}(Y)) + E(Y)E(\delta_{\pi}(Y))}{\frac{1}{t} var(Y)}$$

برهان. برآوردگر بیز تحت تابع زیان لاینکس از این رابطه به دست می‌آید:

$$\delta_{\pi}(Y) = -\frac{1}{a} (E_{\pi}(e^{-a\theta} | y))$$

$$E(e^{-a\theta}|y) = E(e^{-a\theta}|y = i) + E(e^{-a\theta}|y = j) + E(e^{-a\theta}|y = 0, 1, \dots \neq i, j)$$

بنابراین با توجه به قضیه ۱، برآوردگر بیز به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \delta_{\pi}(y) = & -\frac{1}{a} \ln \left[\frac{\frac{\omega_1 \tau^{\beta}}{(\tau + a)^{\beta}}}{\left(\omega_1 + \frac{(1 - \omega_1 - \omega_2) t^i \tau^{\beta} \Gamma(i + \beta)}{\Gamma(i + 1) \Gamma(\beta) (t + \tau)^{i + \beta}} \right)} \right. \\ & \left. + \frac{\frac{(1 - \omega_1 - \omega_2) t^i \tau^{\beta} \Gamma(i + \beta + 1)}{\Gamma(i + 1) \Gamma(\beta) (t + \tau)^{i + \beta + 1}}}{\omega_1 + \frac{(1 - \omega_1 - \omega_2) t^i \tau^{\beta} \Gamma(i + \beta)}{\Gamma(i + 1) \Gamma(\beta) (t + \tau)^{i + \beta}}} \right] I_{\{i\}}(y) \\ & + -\frac{1}{a} \ln \left[\frac{\frac{\omega_2 \tau^{\beta}}{(\tau + a)^{\beta}}}{\left(\omega_2 + \frac{(1 - \omega_1 - \omega_2) t^j \tau^{\beta} \Gamma(j + \beta)}{\Gamma(j + 1) \Gamma(\beta) (t + \tau)^{j + \beta}} \right)} \right. \\ & \left. + \frac{\frac{(1 - \omega_1 - \omega_2) t^j \tau^{\beta} \Gamma(j + \beta + 1)}{\Gamma(j + 1) \Gamma(\beta) (t + \tau)^{j + \beta + 1}}}{\omega_2 + \frac{(1 - \omega_1 - \omega_2) t^j \tau^{\beta} \Gamma(j + \beta)}{\Gamma(j + 1) \Gamma(\beta) (t + \tau)^{j + \beta}}} \right] I_{\{j\}}(y) \\ & - \frac{1}{a} \ln \left[\left(\frac{t + \tau}{t + \tau + a} \right)^{y + \beta} \right] I_{\{0, 1, \dots\}}(y) \end{aligned}$$

اکنون باید $E[\bar{Y}\delta_{\pi}(Y)]$ و $E[\delta_{\pi}(Y)]$ را محاسبه کنیم:

$$E[\bar{Y}\delta_{\pi}(Y)] = \left[\frac{i}{t} \delta_{\pi}(i) \right] P_Y(i) + \left[\frac{j}{t} \delta_{\pi}(j) \right] P_Y(j) + \sum_{\substack{y=0, 1, \dots \\ y \neq i, j}} \delta_{\pi}(y) P_Y(y)$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{i}{ta} \ln \left[\frac{\frac{\omega_1 \tau^\beta}{(\tau+a)^\beta} + \frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^i \tau^\beta \Gamma(i+\beta+1)}{\Gamma(i+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{i+\beta+1}}}{\left(\omega_1 + \frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^i \tau^\beta \Gamma(i+\beta)}{\Gamma(i+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{i+\beta}}\right)} + \frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^i \tau^\beta \Gamma(i+\beta)}{\Gamma(i+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{i+\beta}} \right] \\
 &\times \left(\omega_1 + \frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^i \tau^\beta \Gamma(i+\beta)}{\Gamma(i+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{i+\beta}} \right) \\
 &- \frac{j}{ta} \ln \left[\frac{\frac{\omega_2 \tau^\beta}{(\tau+a)^\beta} + \frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^j \tau^\beta \Gamma(j+\beta+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{j+\beta+1}}}{\left(\omega_2 + \frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^j \tau^\beta \Gamma(j+\beta)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{j+\beta}}\right)} + \frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^j \tau^\beta \Gamma(j+\beta)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{j+\beta}} \right] \\
 &\times \left(\omega_2 + \frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^j \tau^\beta \Gamma(j+\beta)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{j+\beta}} \right) \\
 &+ \sum_{\substack{y=0,1,\dots \\ y \neq i,j}} \frac{y(y+\beta)}{ta} \ln \left(\frac{t+\tau+a}{t+\tau} \right) \frac{(1-\omega_1-\omega_2)\Gamma(y+\beta)}{\Gamma(y+1)\Gamma(\beta)} \left(\frac{t}{t+\tau} \right)^y \left(\frac{\tau}{t+\tau} \right)^\beta
 \end{aligned}$$

پس از ساده کردن عبارت بالا داریم:

$$\begin{aligned}
 E[\bar{Y}\delta_\pi(Y)] &= -\frac{i}{ta} \ln \left[\frac{\frac{\omega_1 \tau^\beta}{(\tau+a)^\beta}}{\left(\omega_1 + \frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^i \tau^\beta \Gamma(i+\beta)}{\Gamma(i+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{i+\beta}}\right)} + \frac{\frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^i \tau^\beta \Gamma(i+\beta+1)}{\Gamma(i+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{i+\beta+1}}}{\omega_1 + \frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^i \tau^\beta \Gamma(i+\beta)}{\Gamma(i+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{i+\beta}}} \right] \times P_Y(Y=i) \\
 &- \frac{j}{ta} \ln \left[\frac{\frac{\omega_2 \tau^\beta}{(\tau+a)^\beta}}{\left(\omega_2 + \frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^j \tau^\beta \Gamma(j+\beta)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{j+\beta}}\right)} + \frac{\frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^j \tau^\beta \Gamma(j+\beta+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{j+\beta+1}}}{\omega_2 + \frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^j \tau^\beta \Gamma(j+\beta)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{j+\beta}}} \right] P_Y(Y=j) + (1 \\
 &- (i-1) \left(\frac{t}{t+\tau} \right)^{i-1} \left(\frac{\tau}{t+\tau} \right)^{\beta+2} - (j-1) \left(\frac{t}{t+\tau} \right)^{j-1} \left(\frac{\tau}{t+\tau} \right)^{\beta+2} \\
 &\times \left(\frac{(1-\omega_1-\omega_2)(t+\tau)}{\tau^2 a} \ln \left(\frac{t+\tau+a}{t+\tau} \right) \right)
 \end{aligned}$$

9

$$\begin{aligned}
 E[\delta_\pi(Y)] &= [\delta_\pi(Y=i)]P_Y(y=i) + [\delta_\pi(Y=j)]P_Y(y=j) \\
 &+ \sum_{\substack{y=0,1,\dots \\ y \neq i,j}}^\infty \delta_\pi(Y)P_Y(y)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{a} \ln \left[\frac{\frac{\omega_1 \tau^\beta}{(\tau+a)^\beta} + \frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^i \tau^\beta \Gamma(i+\beta+1)}{\Gamma(i+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{i+\beta+1}}}{\left(\omega_1 + \frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^i \tau^\beta \Gamma(i+\beta)}{\Gamma(i+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{i+\beta}}\right)} + \frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^j \tau^\beta \Gamma(j+\beta+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{j+\beta+1}}}{\omega_1 + \frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^j \tau^\beta \Gamma(j+\beta)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{j+\beta}}} \right] \\
&\times \left(\omega_1 + \frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^i \tau^\beta \Gamma(i+\beta)}{\Gamma(i+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{i+\beta}} \right) \\
&- \frac{1}{a} \ln \left[\frac{\frac{\omega_2 \tau^\beta}{(\tau+a)^\beta} + \frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^j \tau^\beta \Gamma(j+\beta+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{j+\beta+1}}}{\left(\omega_2 + \frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^j \tau^\beta \Gamma(j+\beta)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{j+\beta}}\right)} + \frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^i \tau^\beta \Gamma(i+\beta+1)}{\Gamma(i+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{i+\beta+1}}}{\omega_2 + \frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^i \tau^\beta \Gamma(i+\beta)}{\Gamma(i+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{i+\beta}}} \right] \\
&\times \left(\omega_2 + \frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^j \tau^\beta \Gamma(j+\beta)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{j+\beta}} \right) \\
&+ \sum_{\substack{y=0,1,\dots \\ y \neq i,j}}^{\infty} \frac{(y+\beta)}{a} \ln \left(\frac{t+\tau+a}{t+\tau} \right) \frac{(1-\omega_1-\omega_2)\Gamma(y+\beta)}{\Gamma(y+1)\Gamma(\beta)} \left(\frac{t}{t+\tau} \right)^y \left(\frac{\tau}{t+\tau} \right)^\beta \\
&= -\frac{1}{a} \ln \left[\frac{\frac{\omega_1 \tau^\beta}{(\tau+a)^\beta} + \frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^i \tau^\beta \Gamma(i+\beta+1)}{\Gamma(i+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{i+\beta+1}}}{P_Y(y=i)} + \frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^j \tau^\beta \Gamma(j+\beta+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{j+\beta+1}}}{P_Y(y=j)} \right] \times P_Y(y=i) \\
&- \frac{1}{a} \ln \left[\frac{\frac{\omega_2 \tau^\beta}{(\tau+a)^\beta} + \frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^j \tau^\beta \Gamma(j+\beta+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{j+\beta+1}}}{P_Y(y=j)} + \frac{(1-\omega_1-\omega_2)t^i \tau^\beta \Gamma(i+\beta+1)}{\Gamma(i+1)\Gamma(\beta)(t+\tau)^{i+\beta+1}}}{P_Y(y=i)} \right] \times P_Y(y=j) \\
&+ \left(1 - \binom{i+\beta}{i-1} \left(\frac{t}{t+\tau} \right)^{i-1} \left(\frac{\tau}{t+\tau} \right)^{\beta+1} - \binom{j+\beta}{j-1} \left(\frac{t}{t+\tau} \right)^{j-1} \left(\frac{\tau}{t+\tau} \right)^{\beta+1} \right) \\
&\times \left(\frac{\beta(1-\omega_1-\omega_2)(t+\tau)}{\tau a} \ln \left(\frac{t+\tau+a}{t+\tau} \right) \right)
\end{aligned}$$

با جای گذاری دو امید ریاضی بالا در لم ۱، برهان کامل می شود.

۴. ارائه یک مثال واقعی

با استفاده از نتایج بخش قبل، در این بخش به محاسبه حق بیمه نسبی تحت تابع زیان مربع خطا و لاینکس برای بعضی از وسایل نقلیه‌ای که در سیستم پاداش - جریمه بیشترین تعداد را دارند و دارای بیمه شخص ثالث هستند، می‌پردازیم. همچنین برای برآورد پارامترهای توزیع ادعا از روش برآوردگر بیز تجربی استفاده خواهیم کرد. توزیع فراوانی خسارت و برازش پارامترهای توزیع پواسون آماسیده به صورت جدول و نموداری بررسی شده است. داده‌های مورد بررسی مربوط به اطلاعات خسارت بیمه‌گذاران رشته بیمه شخص ثالث اتومبیل در سال ۱۳۸۹ برای صنعت بیمه ایران است. اطلاعات به دست آمده برای هر وسیله نقلیه براساس یک سال (۱۳۸۹) جمع‌آوری شده است، بنابراین متغیر زمان (t) برای تعیین حق بیمه وسایل نقلیه برابر یک است اما به منظور مطالعات مقایسه‌ای بیشتر فرض می‌کنیم این اطلاعات در مدت زمان بیشتری جمع‌آوری شده‌اند (مثلاً $t=2$). با استفاده از داده‌های بانک اطلاعاتی بیمه مرکزی برای پدیده تمایل به پاداش بیمه‌گذاران از اختلاف احتمال تصادف برای هر وسیله نقلیه و احتمال ادعای گزارش استفاده کرده‌ایم. در ادامه به محاسبه حق بیمه نسبی به تفکیک وسایل نقلیه می‌پردازیم.

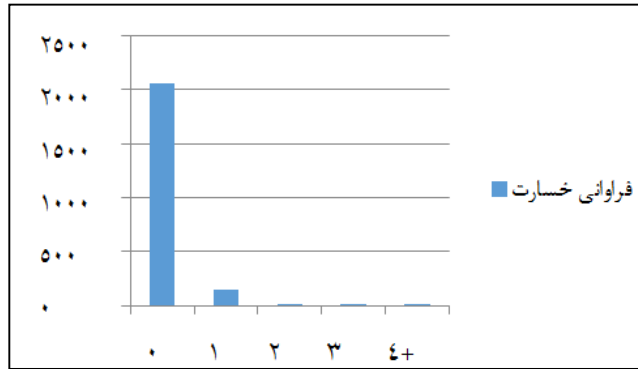
اتومبیل سواری نوع ۱ (کمتر از ۴ سیلندر):

این گروه کمترین درصد اعلام خسارت را نسبت به سایر سواری‌ها داشته‌اند. اطلاعات مربوط به این نوع بیمه‌نامه در جدول ۱ و نمودار ۳ ارائه شده است.

جدول ۱. توزیع تعداد اعلام خسارت‌ها برای اتومبیل سواری نوع یک

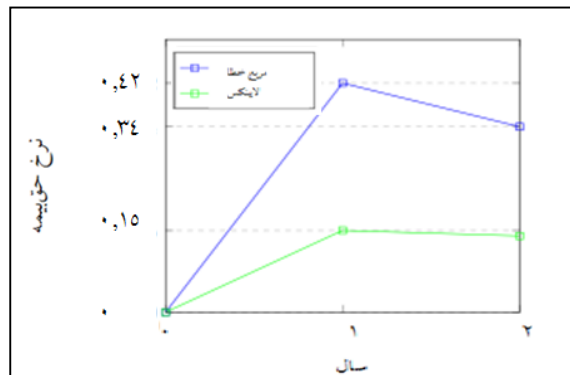
درصد فراوانی تجمعی	درصد فراوانی	فراوانی (تعداد بیمه‌نامه با k ادعای خسارت)	تعداد خسارت‌های اعلام شده (k)
۹۲/۸۵	۹۲/۸۵	۲۰۵۵	۰
۹۹/۵۰	۶/۶۵	۱۴۸	۱
۹۹/۷۵	۰/۲۵	۵	۲
۹۹/۹۰	۰/۱۵	۳	۳
۱۰۰	۰/۱۰	۲	۴ و بیشتر

منبع: یافته‌های محققان



نمودار ۳. فرآوانی خسارت اتومبیل سواری نوع ۱

با استفاده از داده‌ها، پارامترهای مدل برای این وسیله نقلیه بدین صورت برآورد می‌شود:
 $a = 0.5$, $\omega_1 = 0.05$, $\omega_2 = 0.01$, $\beta = 7$, $\tau = 0.009$
 در نمودار ۴ حق بیمه نسبی محاسبه شده تحت دو تابع زیان مربع خطا و لاینکس برای این وسیله نقلیه با استفاده از نتایج قضیه‌های ۲ و ۳ به دست آمده است. این نمودار نشان می‌دهد برآوردگر حق بیمه نسبی، با استفاده از توزیع پواسون آماسیده در صفر و یک، تحت تابع زیان لاینکس، کمتر از این حق بیمه نسبی تحت تابع زیان مربع خطاست. همچنین نشان می‌دهد پدیده اشتیاق به پاداش برای ادعاها، تأثیر چشم‌گیری در میزان حق بیمه نسبی خواهد داشت.



نمودار ۴. نرخ حق بیمه نسبی تحت مدل پواسون آماسیده در صفر و یک برای سواری نوع ۱

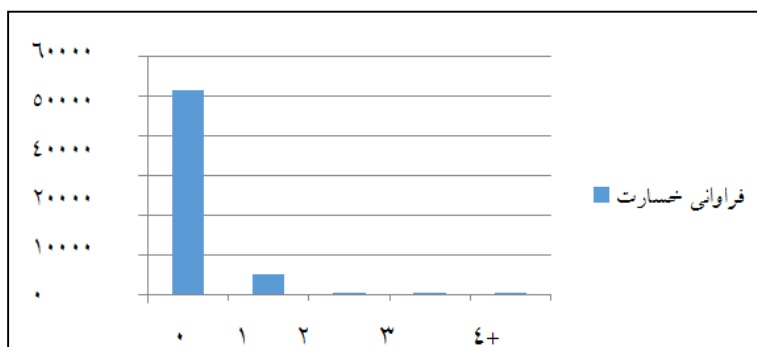
اتومبیل سواری نوع ۲ (۴ سیلندر):

اطلاعات مربوط به خسارت‌های این نوع وسیله نقلیه در جدول ۲ و نمودار ۵ ارائه شده است. این وسیله نقلیه از نظر میزان عدم ارائه خسارت در بین سواری‌ها در مقام دوم قرار دارد.

جدول ۲. توزیع تعداد اعلام خسارت‌ها برای اتومبیل سواری نوع ۲

درصد فراوانی تجمعی	درصد فراوانی	فراوانی (تعداد بیمه‌نامه با k ادعای خسارت)	تعداد خسارت‌های اعلام شده (k)
۹۰/۲۵	۹۰/۲۵	۵۱۴۷۹	۰
۹۹/۵۰	۹/۲۵	۵۲۷۵	۱
۹۹/۹۷	۰/۴۷	۲۷۰	۲
۹۹/۹۹	۰/۰۲	۱۰	۳
۱۰۰	۰/۰۱	۷	۴ و بیشتر

منبع: یافته‌های محققان

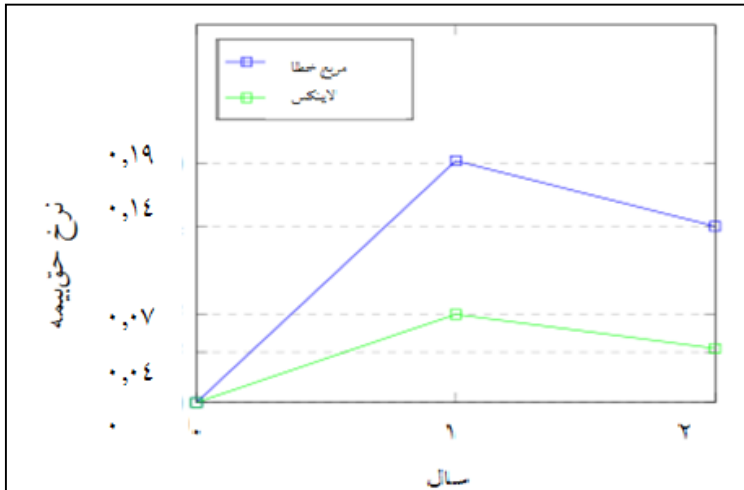


نمودار ۵. فراوانی خسارت اتومبیل سواری نوع ۲

با استفاده از داده‌ها، پارامترهای مدل برای این وسیله نقلیه به نمودار زیر برآورد می‌شود:

$$a = 0.5, \quad \omega_1 = 0.1, \quad \omega_2 = 0.01, \quad \beta = 8, \quad \tau = 0.0007$$

در نمودار ۶ نرخ حق بیمه نسبی محاسبه شده تحت دو تابع زیان مربع خطا و لاینکس برای این وسیله نقلیه نشان داده شده است. چنان‌که مشخص است، برآوردگر حق بیمه نسبی با استفاده از توزیع پواسون آماسیده در صفر و یک تحت تابع زیان لاینکس کمتر از حق بیمه نسبی محاسبه شده تحت تابع زیان مربع خطاست.



نمودار ۶. نرخ حق بیمه نسبی تحت مدل پواسون آماسیده در صفر و یک برای سواری نوع ۲

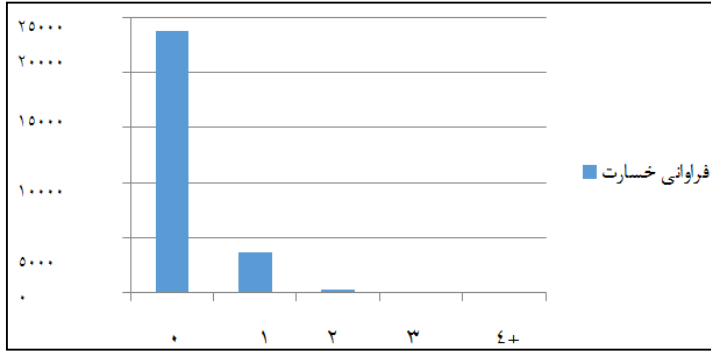
اتومبیل سواری نوع ۳ (۴ سیلندر به بالا):

با توجه به اطلاعات ارائه شده در جدول ۳ و نمودار ۷، بدترین گروه از لحاظ تعداد خسارت، در بین سواری‌ها را می‌توان اتومبیل‌های سواری نوع ۳ (۴ سیلندر به بالا) دانست. میزان تقریبی ۱۵ درصد اعلام حداقل یک خسارت، این گروه را به پرحادثه‌ترین گروه تبدیل کرده است.

جدول ۳. توزیع تعداد اعلام خسارت‌ها برای اتومبیل سواری نوع ۳

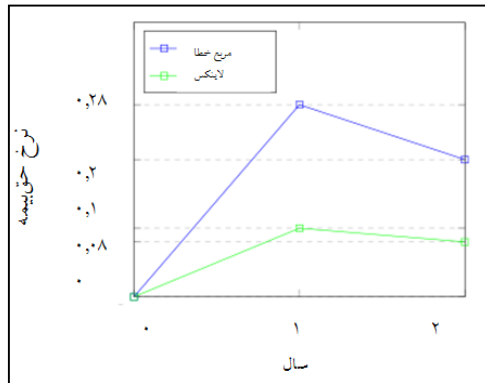
تعداد خسارت‌های اعلام شده (k)	فراوانی (تعداد بیمه‌نامه با k ادعای خسارت)	درصد فراوانی	درصد فراوانی تجمعی
۰	۲۳۷۳۰	۸۵/۷۰	۸۵/۷۰
۱	۳۶۵۵	۱۳/۲۰	۹۸/۹۰
۲	۲۸۰	۱/۰۱	۹۹/۹۱
۳	۱۹	۰/۰۷	۹۹/۹۸
۴ و بیشتر	۵	۰/۰۲	۱۰۰

منبع: یافته‌های محققان



نمودار ۷. فرآوانی خسارت اتومبیل سواری نوع ۳

با استفاده از داده‌ها، پارامترهای مدل برای این وسیله نقلیه به این صورت برآورد می‌شود:
 $a = 0.5$, $\omega_1 = 0.1$, $\omega_2 = 0.01$, $\beta = 5$, $\tau = 0.01$
 در نمودار ۸ حق بیمه نسبی محاسبه شده تحت دو تابع زیان مربع خطا و لاینکس برای این وسیله نقلیه نشان داده شده است. این نمودار نیز نشان می‌دهد برآوردگر حق بیمه نسبی با استفاده از توزیع پواسون آماسیده در صفر و یک تحت تابع زیان لاینکس کمتر از حق بیمه نسبی تحت تابع زیان مربع خطاست.



نمودار ۸. نرخ حق بیمه نسبی تحت مدل پواسون آماسیده در صفر و یک برای سواری نوع ۳

۵. جمع‌بندی و پیشنهادها

در یک سیستم نرخ‌گذاری شده از سوابق بیمه‌ای یک بیمه‌گذار برای محاسبه حق بیمه عادلانه استفاده می‌شود. مقدار حق بیمه پرداختی توسط بیمه‌گذار، به عوامل نرخ‌گذاری دوره جاری و علاوه بر آن، به سابقه خسارتی او بستگی دارد. هر چه بیمه‌گذاران در طی یک سال تعداد بیشتری ادعای خسارت داشته باشند باید حق بیمه بیشتری بپردازند و در مقابل به بیمه‌گذارانی که هیچ ادعای خسارتی ندارند

تخفیف تعلق می‌گیرد. بسیاری از بیمه‌گذاران جهت جلوگیری از افزایش حق بیمه، سعی می‌کنند خسارت‌های کوچک را به شرکت بیمه گزارش نکنند. مسئله‌ای که در این مقاله مورد تحقیق قرار گرفته مدل‌سازی اشتیاق بیمه‌گذاران برای دریافت تخفیف بر مبنای عدم گزارش خسارت‌های کوچک است.

در سیستم نرخ‌گذاری شده سابقه t سال قبل افراد حائز اهمیت است و حق بیمه نسبی آن‌ها بر اساس تعداد خسارت‌ها در t سال قبل به دست می‌آید. به عبارت دیگر، حق بیمه نسبی ضربی از حق بیمه است که بر اساس فراوانی خسارت‌های ادعا شده محاسبه می‌شود و حق بیمه پایه بر اساس شدت خسارت‌های وارده. در یک سیستم نرخ‌گذاری شده، حق بیمه از ضرب حق بیمه نسبی در حق بیمه پایه به دست می‌آید. در این سیستم، طبقه‌ای برای قرار گرفتن افراد بر حسب سابقه خسارت وجود ندارد، در حالی که در سیستم پاداش جریمه کلاسیک، ابتدا طبقاتی را می‌سازند و افراد را بر حسب سابقه خسارتشان در طبقات قرار می‌دهند و سپس با قانون انتقال و سابقه سال قبل افراد، آن‌ها را در طبقات جابه‌جا می‌کنند.

با توجه به اینکه برآوردگر باورمندی دقیق برای توزیع‌های پواسون - گامای آماسیده برقرار نیست، در این مقاله، برآوردگر باورمندی خطی با استفاده از ایده ارائه شده توسط پاینده (۲۰۱۰) و به وسیله برآوردگرهای بیز تقریب زده شد.

نتایج مقاله حاضر نشان داد:

۱. اگر پدیده تمایل به پاداش مشتریان را با استفاده از مدل‌های پواسون آماسیده مدل‌بندی کنیم، نرخ حق بیمه نسبی کاهش چشم‌گیری پیدا می‌کند.
۲. برآوردگر حق بیمه نسبی تحت تابع زیان لاینکس کمتر از حق بیمه نسبی تحت تابع زیان مربع خطاست.

همان‌گونه که می‌دانیم، در قانون انتقال سیستم پاداش جریمه، تعداد خسارت‌های ادعا شده در سال قبل نقش مهمی ایفا می‌کند؛ بنابراین در این سیستم از متغیر رفتار ادعاهای خسارت گذشته برای تصحیح حق بیمه آینده استفاده می‌شود. ایراد سیستم پاداش - جریمه این است که حق بیمه‌های پرداخت شده توسط بیمه‌گذاران بسیار متغیر است. با توجه به اینکه سیستم پاداش جریمه مبتنی بر تعداد خسارت‌هاست نمی‌تواند یک سیستم عادلانه باشد. بنابراین توصیه می‌شود از سیستمی استفاده شود که هر دو عامل تعداد و شدت خسارت‌ها را در محاسبات دخیل کند. همان‌گونه که می‌دانیم شدت خسارت‌های واقع شده متغیر است ولی اثر این شدت در محاسبات مربوط به سیستم پاداش - جریمه لحاظ نشده است. بنابراین بیمه‌گذاری که سه خسارت جزئی دارد باید حق بیمه بیشتری نسبت به بیمه‌گذاری که یک خسارت بزرگ مرتکب شده است بپردازد، در حالی که ممکن است مبلغ یک خسارت بزرگ ده برابر سه خسارت جزئی باشد و این امر منصفانه نیست.

منابع

- Bermudez, L., Denuit, M., & Dhaene, J. (2001). Exponential bonus-malus systems integrating a priori risk classification. *Journal of Actuarial Practice*, 9(53), 84-112.
- Boucher, J.P. & Denuit M. (2008). Credibility premiums for the zero-inflated Poisson model and new hunger for bonus interpretation. *Insurance: Mathematics and Economics*, 42(2), 727-735.
- Denuit, M., & Dhaene, J. (2001). Bonus-Malus scales using exponential loss functions. *Blätter der DGVM*, 25(1), 13-27.
- Lange, J. T. (1969). Application of a mathematical concept of risk to property-liability insurance ratemaking. *Journal of Risk and Insurance*, 36(4): 383-391.
- Morillo, I., & Bermúdez, L. (2003). Bonus–malus system using an exponential loss function with an Inverse Gaussian distribution. *Insurance: Mathematics and Economics*, 33(1), 49-57.
- Payandeh Najafabadi, A.T. (2010). A new approach to the credibility formula. *Insurance: Mathematics and Economics*, 46(2), 334-338.
- Payandeh Najafabadi, A.T., Atatalab, F., & Omidi Najafabadi, M. , (2017). Credibility premium for rate-making systems. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 46(1), 415-426.
- Payandeh Najafabadi, A.T. & MohammadPour, S. (2017). A k-Inflated Negative binomial mixture regression model: Application to rate-making systems. *Asia-Pacific Journal of Risk and Insurance*, 12(2), 1-31.
- Razie, F., Bahrami Samani, E., & Ganjali, M. (2016). A latent variable model for analyzing mixed longitudinal (k,l)-inflated count and ordinal responses. *Journal of Applied Statistics*, 43(12), 2203-2224.
- Calculation of the relative premium Based on two-point inflated Poisson model for rate-making system
- Payandeh NajafAbadi, Amir Teimour1 (corresponding Author), Fatemeh Atatalab2, Ramezan Rezazadeh3.

-
1. Full Professor at Department of Mathematical Sciences, Shahid Beheshti University, G.C. Evin, Tehran, Iran
 2. PhD student in actuarial science, Shahid Beheshti University
 3. Master of actuarial science, Shahid Beheshti University