

ارائه مدل چندهدفه مسیریابی در شبکه سیستم‌های حمل و نقل عمومی چندوجهی درون شهری

وحید برادران*، ارمان آذری خواه**

تاریخ دریافت: ۹۶/۶/۲۲

تاریخ پذیرش: ۹۷/۷/۲۵

چکیده:

توسعه انواع سیستم‌های حمل و نقل عمومی شهری که هر کدام مناطق مختلفی را پوشش می‌دهند، مسئله انتخاب نوع سیستم حمل و نقل و تعیین مسیر مناسب سفر بین دو ایستگاه مبدا و مقصد مشخص را برای مسافران و استفاده‌کنندگان سیستم‌های حمل و نقل عمومی دشوار کرده است. در شهرهای بزرگ مانند تهران شبکه‌ای از سیستم‌های حمل و نقل عمومی موسوم به سیستم‌های چندوجهی شامل ایستگاه‌ها به عنوان گره‌ها و وسایل حمل و نقل عمومی واسط بین دو ایستگاه متوالی به عنوان کمان‌های آن تشکیل می‌شود. مسافران پیوسته به دنبال روشی برای یافتن مسیر بهینه در شبکه‌های حمل و نقل چندوجهی پیچیده می‌باشند تا با کمترین هزینه و سردرگمی از مبدا مشخص به مقصد مورد نظر خود برسند. در این مقاله، جهت مسیریابی در شبکه‌های سیستم‌های حمل و نقل چندوجهی مدلی برنامه‌ریزی ریاضی چندهدفه با سه تابع هدف توسعه داده شده است. اهداف مدل ارائه شده، حداقل کردن هزینه، زمان سفر و تعداد تغییر نوع وسایل نقلیه می‌باشد. ضمن بررسی اعتبارسنجی مدل‌ها با مسائل آزمون، دو الگوریتم دقیق و فراابتکاری (الگوریتم مورچگان) برای حل مدل پیشنهادی توسعه داده شده است. نتایج ارزیابی عملکرد روش‌های حل نشان می‌دهد زمان حل مسائل با روش دقیق برای مسائل با بیش از ۱۵ گره غیر کارا است. در حالی که الگوریتم فراابتکاری، مسائل نمونه را با کیفیتی مشابه روش دقیق اما با زمان منطقی ارائه می‌کند.

کلمات کلیدی: کوتاه‌ترین مسیر، سیستم‌های حمل و نقل عمومی، سیستم‌های حمل و نقل چندوجهی، برنامه‌ریزی ریاضی چندهدفه، الگوریتم مورچگان چندهدفه.

مقدمه

* استادیار، گروه مهندسی صنایع، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران شمال، ایران (نویسنده مسئول)

V_Baradaran@iau-tnb.ac.ir

** کارشناسی ارشد، مهندسی صنایع، گرایش مدیریت سیستم و بهره‌وری، دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران شمال، ایران

توسعه روزافزون شهرنشینی و رشد شهرها، تقاضا برای حمل و نقل و جابجایی را افزایش داده است که این امر مشکلات بسیاری از قبیل تراکم ترافیک، آلودگی‌های صوتی و هوا، اتلاف انرژی و زمان، افزایش مصرف سوخت و استهلاک وسایل نقلیه و غیره را به وجود آورده است (حسنی‌نسب، ۱۳۹۰). یکی از راه‌های مقابله با مشکلات متأثر از افزایش تقاضای حمل و نقل در درون شهرها، توسعه سیستم‌های حمل و نقل عمومی است. برنامه‌ریزی برای استفاده حداکثری از توان و ظرفیت سیستم‌های حمل و نقل عمومی و افزایش رضایت مسافران و استفاده‌کنندگان این سیستم‌ها به بهبود کارایی و بهره‌وری سیستم‌های حمل و نقل عمومی کمک می‌کند.

در سفرهای درون شهری از نقطه‌ای به نقطه دیگر، بسیار مشاهده شده که مسافران از سیستم‌های حمل و نقل مختلفی مانند مترو، اتوبوس عادی، اتوبوس تندرو، تاکسی و ... به طور متوالی استفاده می‌کنند که به این نوع سیستم‌ها، سیستم‌های حمل و نقل چندوجهی^۱ می‌گویند. شبکه‌ای که گره‌های آن را ایستگاه‌های توقف وسایل حمل و نقل عمومی (اتوبوس، مترو، تاکسی و ...) تشکیل دهند و کمان‌ها در این شبکه انواع سیستم‌های حمل و نقل عمومی واسط بین دو ایستگاه حمل و نقل عمومی باشد را شبکه حمل و نقل عمومی چندوجهی می‌نامند. در این شبکه ممکن است بین دو گره چندین کمان (چندین نوع سیستم حمل و نقل برای ارتباط دو ایستگاه متوالی) برقرار باشد. یکی از مشکلات این سیستم‌ها، مسیریابی در چنین شبکه‌هایی است. به عنوان مثال، فرض کنید در یک شهر، چند سیستم حمل و نقل عمومی با مسیرهای تردد معلوم وجود داشته باشد. اگر شخصی بخواهد از یک نقطه به نقطه‌ای دیگر حرکت کند، عمدتاً به دلیل نبود اطلاعات سفر مانند زمان‌بندی وسایل حمل و نقل، طول مدت سفر و ... نمی‌تواند بهترین مسیر یا ترکیب سیستم‌های مختلف حمل و نقل عمومی را انتخاب کند. پیامد عدم تصمیم‌گیری صحیح و انتخاب ترکیب مناسب سیستم‌های حمل و نقل عمومی (مسیریابی در سیستم‌های حمل و نقل چندوجهی) ضمن برهم‌زدن توازن تقاضای سیستم‌های حمل و نقل عمومی، به دلایل سردرگمی و تحمیل هزینه‌ها به مسافران، موجب نارضایتی آن‌ها می‌شود. از

1. Multi-modal Transportation System

این رو پیشنهاد برنامه‌ای مناسب برای انتخاب بهترین مسیرها می‌تواند در جهت بهبود کیفیت خدمات حمل و نقل عمومی و رضایت هرچه بیشتر افراد موثر باشد (حسینی نسب، ۱۳۹۰).

مسئله مسیریابی یکی از قدیمی‌ترین مسائل حوزه برنامه‌ریزی حمل و نقل در حوزه‌های شهری و سیستم‌های حمل و نقل بخش خصوصی مانند درون کارخانه‌ای است که در بسیاری از تصمیم‌گیری‌های عملی و فعالیت‌های برنامه‌ریزی شده مورد نیاز می‌باشد. یافتن مسیر مناسب بین دو نقطه در یک شبکه (مجموعه کمان‌های متوالی واسط بین دو گره در شبکه‌های جهت‌دار)، یک مسئله اساسی در مسیریابی شبکه‌های حمل و نقل می‌باشد و عموماً با مدل‌های بهینه‌سازی مدل‌سازی و حل می‌شوند (عینی و صالحی‌پور، ۱۳۹۰). اهداف مسئله مسیریابی عموماً کمینه کردن زمان یا مسافت سفر است. اما در مسائل حمل و نقل عمومی عوامل مختلفی مانند راحتی، زمان و هزینه سفر، تناوب و سرویس‌دهی وسیله نقلیه و همچنین وضعیت ترافیکی مسیر که بر میزان مطلوبیت و انتخاب وسیله نقلیه سفر (در مسئله این مقاله، منظور مسیر است) تاثیرگذار هستند، مدنظر قرار می‌گیرند. تغییر وسیله نقلیه یکی از عوامل مهم دیگری است که بر عدم مطلوبیت مسافران از سیستم‌های حمل و نقل عمومی موثر است. به عنوان مثال بر اساس یک مطالعه در آمریکا، بیش از ۵۸ درصد پتانسیل تقاضا، تنها به علت یک تغییر وسیله نقلیه در طول سفر کاهش می‌یابد. بنابراین در کنار هزینه و زمان سفر، کاهش تعداد تغییر وسایل نقلیه نیز هدفی برای افزایش مطلوبیت سیستم حمل و نقل عمومی است (استرن^۱، ۱۹۹۶).

توسعه ابزاری که مسیر مناسب و بهینه از ترکیب مختلف سیستم‌های حمل و نقل عمومی را بین دو نقطه از شبکه حمل و نقل عمومی چندوجهی پیشنهاد دهد، نیاز مسافران و متقاضیان حمل و نقل عمومی است. این مسئله از سرگردانی، ازدحام و شلوغی سیستم‌های حمل و نقل با مدیریت سفرهای مسافران جلوگیری می‌کند. از طرفی دیگر به رعایت نظم و مدیریت تقاضای سیستم‌های حمل و نقل عمومی کمک می‌کند. در مسئله انتخاب ترکیب بهینه سیستم‌های حمل و نقل عمومی درون شهرها، مسافران با چندین هدف روبه‌رو هستند؛ مانند

1. Stern

انتخاب ترکیباتی از وسایل حمل و نقل، زمان سفر کمتر و هزینه کمتر. لذا این مسئله در غالب یک مسئله مسیریابی چندهدفه^۱ (MOSP) با محدودیت‌های گوناگون قابل بیان است. مسئله مسیریابی چندهدفه در شبکه حمل و نقل عمومی چندوجهی، حالت توسعه یافته مسئله کوتاهترین مسیر با اهداف چندگانه است. مسئله کوتاهترین مسیر در واقع مسئله یافتن مسیری بین دو راس یا گره است به گونه‌ای که مجموع وزن یال‌های تشکیل‌دهنده آن کمینه شود. برای مثال می‌توان مسئله یافتن کوتاهترین راه برای رفتن از یک مکان به مکان دیگر روی نقشه را در نظر گرفت. در این حالت رأس‌ها نشان‌دهنده مکان‌ها و یال‌ها نشان‌دهنده مسیرها هستند که هر کدام به‌طور جداگانه بر حسب مسافت لازم برای طی کردن مسیر برای هر وسیله وزن‌گذاری شده‌اند. در گذشته، مسئله مسیریابی تک‌هدفه مورد بحث بسیاری از مقالات بوده است (برادران و همکاران، ۱۳۹۲؛ دایجسترا^۲، ۱۹۵۹). اما در واقعیت انتخاب مسیر، یک مسئله چندهدفه (چند معیاره) است. برخلاف مسائل تک‌هدفه، عموماً مسائل چندهدفه دارای یک جواب منحصربه‌فرد که تمام اهداف را بهینه کند، نمی‌باشد. مجموعه‌ای از جواب‌های نامغلوب تحت عنوان راه‌حل‌های بهینه پارتو^۳ گزارش می‌شوند تا بر اساس ارجحیت‌های تصمیم‌گیرنده بهترین راه‌حل از میان راه‌حل‌های پارتو انتخاب شوند. مسائل کوتاهترین مسیر چندهدفه جزء مسائل NP-hard هستند (تاراپاتا^۴، ۲۰۰۷؛ شی و همکاران^۵، ۲۰۱۷) که با اضافه کردن اهداف بیشتر درجه پیچیدگی آن‌ها بیشتر هم می‌شود (بریگم^۶ و همکاران، ۲۰۱۷). لذا نیاز به توسعه الگوریتم‌های فراابتکاری برای حل این مسائل احساس می‌شود. بنابراین هدف در این مقاله، توسعه یک مدل ریاضی چندهدفه است تا در یک شبکه حمل و نقل عمومی چندوجهی بین دو گره مبدا و مقصد مشخص، مسیری با کمترین هزینه، زمان سفر و تعداد تغییر وسیله و نوع سیستم حمل و نقل بر اساس ارجحیت‌های مسافر تعیین

-
1. Multi-Objective Shortest Paths
 2. Dijkstra
 3. Optimum Pareto Solution
 4. Tarapata
 5. Shi et al.
 6. Breugem

شود. توسعه الگوریتم فراابتکاری (الگوریتم مورچگان چندهدفه) و مقایسه نتایج و عملکرد الگوریتم توسعه یافته با روش‌های دقیق در مسائل مثال (ابعاد کوچک و بزرگ) از دیگر اهداف این پژوهش می‌باشد. تشریح و مدلسازی ریاضی مسئله مسیریابی در شبکه سیستم‌های حمل و نقل عمومی چندوجهی به منظور جلب رضایت مسافران و ارتقاء بهره‌وری این سیستم‌ها و توسعه مسئله کوتاهترین مسیر با اهداف چندگانه و دارای محدودیت به صورت کاربردی در کنار رویکرد حل این مسائل از مهمترین جنبه‌های نوآوری مقاله می‌باشد.

با استفاده از مدل پیشنهادی در دنیای واقعی و اضافه کردن داده‌های واقعی سیستم‌های حمل و نقل عمومی شهرها به مدل، می‌توان بسته‌های نرم‌افزاری را تهیه کرد که تمامی افراد جامعه بتوانند از طریق تلفن‌های هوشمند و یا کامپیوترهای شخصی مسیر بهینه از ترکیب سیستم‌های حمل و نقل عمومی بین هر دو گره را تعیین کنند. مهمترین پیامدهای توسعه این ابزارها، افزایش رضایت مسافران حمل و نقل عمومی و ارتقاء کارایی این نوع سیستم‌ها است.

مبانی نظری و مروری بر مطالعات گذشته

مسئله کوتاه‌ترین مسیر یکی از معروف‌ترین مسائل حوزه تحقیق در عملیات است که اولین بار توسط فورد در سال ۱۹۵۶ مطرح شد (خاتمی فیروزآبادی و همکاران، ۱۳۹۰) و در موضوعات حمل و نقل و لجستیک کاربرد فراوانی دارد (ورما و همکاران^۱، ۲۰۱۲؛ ونگ و همکاران^۲، ۲۰۱۳؛ چاندر و همکاران^۳، ۲۰۱۶). تحقیقات گسترده‌ای در گذشته پیرامون این مسئله در حالت‌های بدون محدودیت، با محدودیت (ریورا و همکاران^۴، ۲۰۱۶؛ ونگ و همکاران^۵، ۲۰۱۶)، تک هدفه و چندهدفه (ارگان و همکاران^۶، ۲۰۰۲؛ قُصیری و نادری^۷، ۲۰۱۰) انجام شده است. بخش زیادی از تحقیقات این حوزه مربوط به روش‌های حل مسئله

1. Verma et al.
2. Wang et al.
3. Chandra et al.
4. Rivera et al.
5. Wang et al.
6. Ergun
7. Ghoseiri and Nadjari

کوتاه‌ترین مسیر در حالت‌های مختلف است (شینگ و همکاران^۱، ۲۰۱۶). الگوریتم دیجسترا از معروفترین روش‌های حل مسئله کوتاه‌ترین مسیر در حالت تک هدفه و بدون محدودیت است (خاتمی فیروزآبادی و همکاران، ۱۳۹۰؛ رگلور و لاگونا^۲، ۱۹۹۷؛ گلدبرگ^۳، ۲۰۰۵). با توجه به ناکارایی الگوریتم‌های دقیق مانند دایجسترا برای حل مسئله کوتاه‌ترین مسیر با ابعاد بزرگ، استفاده از الگوریتم‌های فراابتکاری مانند الگوریتم ژنتیک (گونیچیو^۴، ۲۰۱۰) توصیه شده است. مسائل کوتاه‌ترین مسیر تک‌هدفه با در نظر گرفتن محدودیت نیز مورد توجه تعدادی از محققین در گذشته بوده و روش‌هایی مانند برنامه‌ریزی پویا (جاچ^۵، ۱۹۶۶)، الگوریتم برچسب‌گذاری (آنجا و همکاران^۶، ۱۹۸۳) و آزادسازی لاگرانژ (هندلر و ژانگ^۷، ۱۹۸۰) برای حل آن‌ها توسعه داده شده است.

روش‌های حل مسائل کوتاه‌ترین مسیر چندهدفه به سه دسته روش‌های دقیق، روش‌های تقریبی و روش‌های حل فراابتکاری تقسیم‌بندی می‌شوند (صدیقی و همکاران^۸، ۲۰۱۴). هر چند روش‌های دقیق جواب‌های دقیقی برای مسئله ارائه می‌کنند اما زمان حل مسائل به کمک آن‌ها با کامپیوترهای معمولی قابل قبول نیست و برای حل مسائل با ابعاد بزرگ مناسب نیستند. ماندو و پرز^۹ (۲۰۰۵) روش تقریبی بر اساس توسعه روشی موسوم به الگوریتم جستجوی A*^{*} به نام MOA*^{*} برای حل مسئله کوتاه‌ترین مسیر چندهدفه ارائه کردند که خروجی آن مجموعه راه‌حل‌های بهینه پارتو می‌باشد. تساگوریس و زارولگیس^{۱۰} (۲۰۰۹) و بریگم و همکاران^{۱۱} (۲۰۱۷) الگوریتم‌هایی به نام طرح تقریبی زمان چندجمله‌ای‌های کامل

1. Sheng et al.
2. Glover and Laguna
3. Goldberg
4. Gunichev
5. Joksch
6. Aneja
7. Handler and Zang
8. Siddiqi et al.
9. Mandow and Perez
10. Tsaggouris and Zaroliagis
11. Breugem et al.
12. Fully Polynomial Time Approximation Scheme

برای حل مسائل کوتاه‌ترین مسیر چندهدفه عنوان کردند. الگوریتم‌های FPTAS تقریباً بهترین زمان حل مسئله را در میان الگوریتم‌های تقریبی ارائه می‌کنند (صدیقی و همکاران، ۲۰۱۴). قصیری و نادری (۲۰۱۰) الگوریتم کلونی مورچگان را برای حل مسئله دو هدفه کوتاه‌ترین مسیر توسعه دادند. آنها برای نمایش عملکرد الگوریتم ارائه شده تعدادی مثال با ابعاد کوچک و بزرگ با داده‌های تصادفی ارائه کردند و نشان دادند که الگوریتم فراابتکاری پیشنهادی جواب‌های قابل قبول در زمان منطقی ارائه می‌کند. بزرا و همکاران^۱ (۲۰۱۱ و ۲۰۱۳) نیز الگوریتم دو مرحله‌ای به نام GRACE که توسعه الگوریتم کلونی مورچگان چندهدفه است را برای حل مسئله کوتاه‌ترین مسیر چندهدفه ارائه کردند و نشان دادند الگوریتم مورچگان عملکرد بهتری نسبت به الگوریتم فراابتکاری NSGA II ارائه می‌کند. کلیماکو و همکاران^۲ (۲۰۰۳) و شی و همکاران (۲۰۱۷) مسئله کوتاه‌ترین مسیر را در حالت چندهدفه و با در نظر گرفتن محدودیت بررسی کردند و الگوریتم دقیقی برای پیدا کردن مجموعه راه‌حل‌های بهینه پارتو برای آن توسعه دادند.

تحقیقاتی در گذشته با موضوع طراحی شبکه‌های حمل‌ونقل چندوجهی انجام شده که از جمله آنها می‌توان به طراحی شبکه حمل‌ونقل چندوجهی جنوب مکزیکوسیتی (پاتینو و لوزانوآ^۳، ۲۰۱۴) و یا مدل برنامه‌ریزی ریاضی خطی ارائه شده توسط جارپا و همکاران^۴ (۲۰۱۷) برای مسئله طراحی شبکه حمل‌ونقل سریع با حالت رقابت استاتیک اشاره نمود. همچنین عملکرد شبکه حمل‌ونقل منطقه بالتیمور واشنگتن (دوکیو و همکاران^۵، ۲۰۱۴؛ اودنتا و همکاران^۶، ۲۰۱۳) و شبکه حمل‌ونقل تهران (نیک‌سیرت و همکاران^۷، ۲۰۱۲) نیز بررسی شده است. هوگت و همکاران^۸ (۲۰۱۳) برای مینیمم‌سازی هزینه سفر، مسئله یافتن کوتاه‌ترین

-
1. Bezerra et al.
 2. Climaco et al
 3. Patiño and Lozano
 4. Gutiérrez-Jarpa et al.
 5. Duque et al.
 6. Udent et al.
 7. Niksirat et al.
 8. Hugué et al.

مسیر چندوجهی برای مسیر رفت و مسیر برگشت را عنوان کردند. در این مقاله اشاره شده که همواره کوتاه‌ترین مسیر رفت از مبدا به مقصد همان کوتاه‌ترین مسیر برای برگشت از مقصد به مبدا نمی‌باشد. در این پژوهش از الگوریتم دایجسترا کمک گرفته شده است. برای کسب اطلاعات بیشتر در مورد گراف‌های مربوط به شبکه‌های چندوجهی و وابستگی زمانی به مقاله پیرگا و همکاران^۱ (۲۰۰۸) مراجعه شود. دیب و همکاران^۲ (۲۰۱۵) رویکرد جدیدی برای محاسبه کوتاه‌ترین مسیر چندوجهی ارائه کردند. در این مقاله تنها خطوط آهن، اتوبوس و حالت پیاده در نظر گرفته شده و دو روش فراابتکاری الگوریتم ژنتیک و جستجوی همسایگی‌های متغیر با هم تلفیق و با الگوریتم دایجسترا مقایسه شده‌اند. هاداس و ناها^۳ (۲۰۱۶) در مقاله‌ای شبکه اتوبوسرانی شهری را براساس اولویت‌بندی خطوط بررسی کردند و یک روش ترکیبی چند منظوره، چند معیاره و تصمیم‌گیری گروهی ارائه دادند. بورانی و همکاران^۴ (۲۰۱۷) به بررسی سیستم‌های حمل‌ونقل چندوجهی (MMTS) با محدودیت ظرفیت وسایل نقلیه پرداخته‌اند و یک مدل برنامه‌ریزی خطی برای مسئله توسعه داده‌اند. این مدل حداکثر جریان وسایل نقلیه و کالاها در حالات مختلف را می‌تواند تعیین کند و طی یک دوره زمانی مشخص، در حالت‌های مختلف حمل‌ونقل چگونگی انتقال کالاها بین جفت‌های نقاط مختلف را تعیین می‌کند. سوکاروئنتوم و همکاران^۵ (۲۰۱۶) مسیر پیاده‌روی چندوجهی چند معیاره^۶ را به عنوان مساله‌ای جهت پیشنهاد مسیر پیاده‌روی ارائه نمودند. به طوری که مسیر پیشنهادی براساس ویژگی‌ها و معیارهای مسافرین بهینه شده است. شی و همکاران (۲۰۱۷) مسئله کوتاه‌ترین مسیر را با اهداف چندگانه را مشروط به رعایت محدودیت منابع و زمان بررسی کردند و روش دقیقی برای پیدا کردن مجموعه جواب‌های پارتو توسعه دادند.

1. Pyrga et al.

2. Dib et al.

3. Hadas and Nahum

4. Bevrani

5. Socharoentum

6. Multi-modal transportation with multi-criteria walking

به عنوان یک نتیجه‌گیری از مطالعه پیشینه تحقیق و بیان جنبه‌های نوآوری مقاله اینکه مسئله مسیریابی در شبکه‌های حمل و نقل چندوجهی با لحاظ کردن اهداف چندگانه به خصوص کمینه کردن تعداد تغییر نوع وسیله نقلیه در شبکه‌های حمل و نقل عمومی یک خلاء تحقیقاتی در این حوزه می‌باشد. از آنجا که این مسئله حالت خاص مسئله کوتاه‌ترین مسیر با اهداف چندگانه و با محدودیت است، این نوع مسائل نیز یکی از مسائل به روز در این حوزه هستند و الگوریتم‌های فراابتکاری به خصوص الگوریتم کلونی مورچگان کارایی مناسبی برای حل این نوع مسائل دارند.

مدلسازی مسئله

گراف جهت‌دار $G=(E, N)$ را به گونه‌ای در نظر بگیرید که در آن N مجموعه محدود گره‌ها و E مجموعه کمان‌ها یا یال‌های جهت‌دار بین گره‌ها هستند. این شبکه نمایشی از شبکه حمل و نقل چندوجهی است که گره‌ها مجموعه میادین و ایستگاه‌های توقف سیستم‌های حمل و نقل عمومی در درون شهر است. هر کمان بین دو گره بیانگر یک نوع سیستم حمل و نقل عمومی واسط بین دو گره است. به دلیل اینکه ممکن است بین دو ایستگاه (گره) سیستم‌های حمل و نقل عمومی متفاوتی تردد کنند، این امکان در شبکه وجود دارد که بین دو گره چندین کمان وجود داشته باشد. اگر مسافری بخواهد از راس ۱ (گره مبدا سفر) به راس V (گره مقصد سفر) در شبکه حمل و نقل چندوجهی حرکت کند، مطلوب است مسیریابی در این شبکه با ترکیب بهینه سیستم‌های حمل و نقل عمومی به طوری که هزینه سفر، زمان سفر و تعداد تغییر نوع سیستم حمل و نقل (مد) کمینه شود. در واقع مسئله به نوع خاصی از مسائل مسیریابی چندهدفه تبدیل می‌شود. علی‌رغم اینکه مسئله مسیریابی وسایل نقلیه جزء مسایل سخت^۱ محسوب می‌شود، می‌تواند به صورت یک مدل ریاضی برنامه‌ریزی نمایش داده شود. در این بخش، مدل ریاضی مسئله مسیریابی وسیله نقلیه جهت حداقل کردن هزینه و زمان حمل و نقل و همچنین تعداد تغییر مدهای (نوع) حمل و نقل ارائه شده است.

1 .NP-hard

نمادهای مورد استفاده برای مدل سازی ریاضی به همراه پارامترهای مدل در جدول ۱ معرفی شده‌اند. متغیرهای تصمیم مسئله از نوع صفر و یک هستند. اگر مسافر از گره i به گره j با وسیله نقلیه نوع m سفر کند متغیر x_{ijm} مقدار یک را خواهد پذیرفت و در صورت عدم انتخاب مسیر و نوع وسیله نقلیه مشخص مقدار این متغیر صفر خواهد بود. متغیر صفر و یک $mode_{jm}$ برای شناسایی تغییر نوع سیستم حمل و نقل نوع m در گره میانی j تعریف می‌شود. این متغیر مقدار یک خواهد داشت اگر مسافر در گره میانی j ام که با نوع وسیله نقلیه m وارد شده با نوع وسیله نقلیه دیگری خارج شود. در غیر این صورت این متغیر مقدار صفر خواهد داشت.

جدول ۱: نمادها و پارامترهای مدل

نماد	تعریف نمادها
N	مجموعه گره‌های شبکه حمل و نقل چندوجهی ($v = 1, \dots, V$)
P	مجموعه سیستم‌های حمل و نقل عمومی فعال در شبکه چندوجهی ($m = 1, \dots, M$)
V	گره مقصد در شبکه حمل و نقل چندوجهی
نماد	تعریف پارامترها
T_{ijm}	زمان سفر از گره i به گره j توسط وسیله نقلیه (سیستم حمل و نقل) نوع m
C_{ijm}	هزینه سفر از گره i به گره j توسط وسیله نقلیه (سیستم حمل و نقل) نوع m
T	زمان تغییر وسیله نقلیه در یک ایستگاه (گره) مستقل از نوع سیستم حمل و نقل و مکان ایستگاه

در ادامه مدل ریاضی مسئله شامل توابع هدف و محدودیت‌های مسئله تعریف شده است.

$$\min Z_1 = \sum_{i=1}^V \sum_{j=1}^V \sum_{m=1}^M C_{ijm} \times x_{ijm} \quad (1)$$

$$\min Z_2 = \sum_{i=1}^V \sum_{j=1}^V \sum_{m=1}^M (T_{ijm} \times x_{ijm}) + T \times \left(\sum_{j=2}^{V-1} \sum_{m=1}^M \frac{mode_{jm}}{2} \right)$$

Error
!
Book
mark
not

defin

.ed

(۲)

$$\text{Min } Z_{\gamma} = \sum_{j=2}^{V-1} \sum_{m=1}^M \frac{\text{mode}_{jm}}{\gamma} \quad (۳)$$

St:

$$\sum_{j=2}^V \sum_{m=1}^M x_{1jm} = 1 \quad (۴)$$

$$\sum_{i=1}^{V-1} \sum_{m=1}^M x_{iVm} = 1 \quad (۵)$$

$$\sum_{i=1}^V \sum_{m=1}^M x_{ijm} = \sum_{k=1}^V \sum_{m=1}^M x_{jkm} \quad \forall j \in N - \{1, V\} \quad (۶)$$

$$\text{mode}_{jm} = \left| \sum_{i=1}^V x_{ijm} - \sum_{k=1}^V x_{jkm} \right| \quad \forall j \in N - \{1, V\}, m \in P \quad (۷)$$

$$x_{ijv} \in \{0, 1\}, i, j \in N, m \in P$$

$$\text{mode}_{jv} \in \{0, 1\}, j \in N, m \in P \quad (۸)$$

رابطه (۱) در مدل ارائه شده بیانگر تابع کل هزینه سفر از ایستگاه مبدا به ایستگاه مقصد است. رابطه (۲) زمان سفر در شبکه حمل و نقل چندوجهی را اندازه می‌گیرد و شامل دو بخش زمان طی کردن کمان‌های منتخب و جمع زمان‌های تغییر وسیله نقلیه در گره‌های میانی است. تابع هدف (۳) تعداد تغییر نوع سیستم‌های حمل و نقل (مُد حمل و نقل) در سفر از گره مبدا به گره مقصد را نشان می‌دهد. اگر در یکی از گره‌های کوتاهترین مسیر (مانند گره j) مسافر با وسیله نقلیه اتوبوس ($m=1$) وارد شود و به منظور افزایش سرعت عمل و کاهش هزینه قرار باشد وسیله نقلیه در این گره تغییر یابد (مثلاً با تاکسی به گره بعدی برود یا $m=2$)، متغیر

$mode_{jm=1}$ برای اندازه گیری این تغییر مقدار یک را خواهد گرفت. اگر در این گره مسافر با وسیله نقلیه اتوبوس وارد و با همان وسیله خارج شود، این متغیر صفر خواهد گرفت و هزینه تغییر وسیله نقلیه ای به مدل تحمیل نخواهد کرد. لذا در تابع هدف (۳)، کمینه کردن جمع متغیر تغییر نوع وسیله نقلیه به ازای تمامی گره های میانی و انواع سیستم های حمل و نقل برای آسایش و رضایت مسافران وارد شده است. در محدودیت (۷) تعداد تغییر مدهای حمل و نقل به ازای هر گره میانی و هر نوع سیستم حمل و نقل اندازه گیری می شود. در گره میانی z مسافر ممکن است با سیستم حمل و نقل نوع m از هر گره ای وارد شود در این صورت عبارت $\sum_{i=1}^V x_{ijm}$ مقدار یک خواهد داشت و اگر نوع سیستم حمل و نقل خود را پس از آن تغییر دهد، مقدار $\sum_{k=1}^V x_{jkm}$ برابر صفر خواهد بود. اختلاف این دو مقدار در رابطه (۷) یک خواهد شد که بیانگر یک تغییر مد به ازای نوع سیستم حمل و نقل نوع m در گره میانی مورد نظر است. به عنوان مثال فرض کنید مسافری با وسیله نقلیه تاکسی ($m=2$) وارد گره z شود اما با اتوبوس ($m=1$) از این گره خارج شود. در این صورت مقادیر $\sum_{i=1}^V x_{ijm=1}$ و $\sum_{k=1}^V x_{jkm=1}$ به ترتیب صفر و یک خواهند بود و در نتیجه $mode_{jm=1}$ مقدار یک خواهد داشت که بیانگر آن است که مسافر در گره z وسیله نقلیه خود را تغییر داده است. از طرفی این تغییر مد به ازای وسیله نقلیه تاکسی نیز ثبت خواهد شد. یعنی در این شرایط متغیرهای $\sum_{i=1}^V x_{ijm=2}$ و $\sum_{k=1}^V x_{jkm=2}$ به ترتیب مقادیر یک و صفر خواهند داشت و اختلاف آنها در (۷) نیز یک خواهد شد ($mode_{jm=2} = 1$). همانطور که در این مثال نیز مشخص است به ازای یک تغییر مد در گره z ، دو متغیر در تابع هدف (۳) مقدار یک گرفته اند. برای اندازه گیری صحیح تعداد تغییر نوع سیستم ها در کل مسیر منتخب، تابع هدف (۳) بر دو تقسیم شده است.

از طرفی اگر در محدودیت (۷) از تابع قدرمطلق استفاده نمی شد، یکی از متغیرهای $mode_{jm}$ مقدار $+1$ و دیگری -1 می گرفت و جمع آنها در تابع هدف (۳) صفر می شد و این تغییر مد در این تابع محاسبه نمی شد. لذا استفاده از تابع قدرمطلق در محدودیت (۷) هر دو مقدار متناظر با یک تغییر مد را یک خواهد کرد که با تقسیم جمع آنها در تابع هدف بر دو، مقدار واقعی تغییر نوع سیستم حمل و نقل اندازه گیری می شود.

محدودیت‌های (۴) و (۵) به ترتیب تضمین‌کننده خروج از گره مبدا و ورود به گره مقصد می‌باشند. مسافر باید در گره ۱ (مبدا سفر) یک مقصد با یک نوع سیستم حمل و نقل را انتخاب کند که این شرط در محدودیت (۴) تضمین می‌شود. به طور مشابه در محدودیت (۵) تضمین می‌شود که مسافر باید با یک نوع سیستم حمل و نقل و از گره‌ای به جز مقصد (گره ۷) به آن وارد شود. محدودیت (۶) شرط برقراری تعادل در گره‌های واسطه (گره‌های غیر از مبدا و مقصد) را فراهم می‌کند. به این معنی که مسافر از هر مبدائی با هر نوع وسیله نقلیه‌ای وارد شود باید از آن به هر مقصدی با یک وسیله نقلیه (نه لزوماً وسیله‌ای که با آن سفر می‌کند) از آن خارج شود. نوع متغیرهای تصمیم در روابط (۸) تعریف شده است.

برای اطمینان از درستی مدل پیشنهادی، صحت مدل ریاضی ساخته شده با کمک مثال‌های عددی به صورت دستی بازبینی و بررسی شده است. جهت اطمینان بیشتر، مدل ریاضی ارائه شده در نرم‌افزار گمز (GAMS) به صورت تک‌هدفه (تنها یکی از اهداف مسئله در مدل در نظر گرفته شده) کدنویسی و تعدادی مسئله آزمون به کمک آن حل شده است. انطباق جواب‌های حاصله از نرم‌افزار با جواب‌های از پیش مشخص مسائل آزمون به صورت تک‌هدفه بیانگر صحت مدل ارائه شده است.

وجود قدرمطلق در رابطه (۷) در مدل ریاضی ارائه شده بیانگر غیرخطی بودن مدل پیشنهادی است. از طرفی وجود روابط غیرخطی در مدل‌های ریاضی امکان استفاده از الگوریتم‌های حل مسائل خطی را محدود می‌کند و باعث کاهش سرعت الگوریتم‌های حل دقیق می‌شود. استفاده از خاصیت ۱ برای خطی کردن محدودیت (۷) به ارتقاء سرعت حل مسئله کمک خواهد کرد.

خاصیت ۱: چنانچه متغیرهای X, Y و Z متغیرهای صفر و یک باشند، محدودیت غیرخطی $Z = |X - Y|$ را می‌توان به مدل خطی زیر تبدیل کرد که در آن t یک متغیر صفر و یک می‌باشد.

$$\begin{aligned} Z &= \nu t - (X - Y) \\ X &\leq Y + t \end{aligned} \quad (9)$$

$$X, Y, Z, t \in \{0, 1\}$$

اثبات: برای محاسبه متغیر Z سه حالت متفاوت رخ می‌دهد؛ اگر X برابر، کوچکتر و یا بزرگتر از Y باشد که در هر حالت مقدار Z از رابطه $Y-X$ انتظار می‌رود به ترتیب برابر صفر، یک و منفی یک باشد. در حالت تساوی X و Y ، با توجه به پیش فرض صفر بودن متغیر کمکی t ، در رابطه $X \leq Y + t$ مقدار t صفر خواهد شد و مطابق $Z = 2t - (X - Y)$ مقدار Z مطابق انتظار صفر خواهد شد. به طور مشابه زمانی که X کوچکتر از Y باشد (زمانی که X و Y به ترتیب صفر و یک باشند)، متغیر t در محدودیت مربوطه صفر خواهد بود و مقدار Z از رابطه $Z = 2t - (X - Y)$ همان مقدار انتظاری یک را می‌گیرد. اما زمانی که X بزرگتر از Y باشد، در محدودیت $X \leq Y + t$ متغیر t باید مقدار یک را بگیرد تا این رابطه درست باشد. در این صورت متغیر Z از رابطه $Z = 2t - (X - Y)$ مجدداً مقدار یک را می‌گیرد که همان مقدار تابع $|X - Y|$ است.

به این ترتیب با استفاده از خاصیت ۱ و جاگزینی روابط (۱۰) و (۱۱) به شرح زیر با رابطه (۷) در مدل پیشنهادی می‌توان مدل ریاضی ارائه شده را خطی کرد.

$$mode_{jm} = 2y_{jm} - \left(\sum_{i=1}^V x_{ijm} - \sum_{k=1}^V x_{jkm} \right) \quad \forall j \in N - \{1, V\}, m \in P \quad (10)$$

$$\sum_{i=1}^V x_{ijm} \leq \sum_{k=1}^V x_{jkm} + y_{jm} \quad \forall j \in N - \{1, V\}, m \in P \quad (11)$$

به طوری که متغیرهای کمکی y_{jm} از نوع صفر و یک هستند و به مدل قبلی اضافه می‌شوند.

روش‌شناسی

عموماً مسائل برنامه‌ریزی ریاضی تک‌هدفه دارای جواب‌های منحصر به فرد و یا چندگانه بهینه هستند. اما مدل‌های چندهدفه مانند مدل پیشنهادی این مقاله دارای جواب یکتا نیستند.

مدل‌های ریاضی چندهدفه^۱ (MOMP)، با بیش از یک تابع هدف عموماً راه‌حل بهینه‌ای که به‌طور هم‌زمان بهینه‌سازی تمام توابع عینی را انجام دهد، وجود ندارد. در این موارد، تصمیم‌گیرندگان به دنبال راه‌حل "بیشتر ترجیح‌داده" در مقایسه با راه‌حل بهینه هستند (برینگم و همکاران، ۲۰۱۷). در مسائل چندهدفه به‌جای مفهوم بهینگی از اصطلاح بهینگی پارتو و یا بهره‌وری استفاده می‌شود که تصمیم‌گیرنده بر اساس ارجحیت‌های خود مناسب‌ترین جواب را از راه‌حل‌های بهینه پارتو انتخاب می‌کند. گروهی از روش‌های تعیین راه‌حل‌های پارتو در مسائل چندهدفه به روش‌های دقیق مانند روش محدودیت اسیلون معروف‌اند. اما این روش‌ها برای حل مسائل با درجه پیچیدگی بالا و موسوم به NP-hard کارایی لازم را ندارند و پیشنهاد می‌شود از الگوریتم‌های فراابتکاری برای حل این مسائل استفاده شود. در این بخش برای حل مسئله از دو روش دقیق محدودیت اسیلون و الگوریتم فراابتکاری کلونی مورچگان استفاده شده‌است. در نهایت با استفاده از مثال‌های عددی عملکرد دو روش با یکدیگر مقایسه شده است.

روش محدودیت اسیلون

مسئله چندهدفه کوتاه‌ترین مسیر در پی یافتن کوتاه‌ترین مسیر بین یک جفت گره مبدا و مقصد در شبکه می‌باشد به طوری که همزمان دو یا چند تابع هدف مانند زمان و مسافت سفر را کمینه کند. این مسئله نوع خاصی از مسائل برنامه‌ریزی ریاضی چندهدفه به فرم کلی زیر هستند.

$$\text{Min } F(x) = \{f_1(x), \dots, f_n(x)\}$$

St:

$$g(x) \leq 0$$

$$h(x) = 0$$

$$x \in R$$

که در آن، $f_i(x)$ تابع هدف i ام مسئله بهینه‌سازی چندهدفه؛ $g(x)$ مجموعه قیود نامساوی مسئله بهینه‌سازی چندهدفه و $h(x)$ مجموعه قیود مساوی مسئله بهینه‌سازی چندهدفه می‌باشد.

1. Multi-objective mathematical programming

در روش محدودیت اِپسیلون، یکی از اهداف مسئله در مدل ریاضی باقی می‌ماند و سایر اهداف مسئله به صورت محدودیت با حد پذیرش در محدودیت‌ها قرار داده می‌شوند. به عنوان مثال اگر هدف $f_i(x)$ از همه مهم‌تر باشد، آن تابع هدف در تابع هدف مسئله باقی می‌ماند و سایر اهداف ($f_j(x) | j \neq i$) در محدودیت‌ها قرار می‌گیرند. یعنی $f_j(x) \geq \varepsilon_j$ (اگر توابع مینیمم باشند، برای هر هدف حد پایین، ε_j ، مشخص می‌شود). در این صورت مسئله چندهدفه به مسئله ریاضی تک‌هدفه تبدیل می‌شود که از روش‌های متعارف قابل حل است. با تغییر مقادیر حد پذیرش مجموعه‌ای از راه‌حل‌های بهینه پارتو حاصل می‌شود (ماورتاس^۱، ۲۰۰۹).

الگوریتم فراابتکاری مورچگان چندهدفه

بهینه‌سازی جمعیت مورچگان اولین بار توسط دوریگو و همکاران^۲ (۱۹۹۱) برای حل مسئله فروشنده دوره گرد پیشنهاد شد (دوریگو و همکاران، ۱۹۹۶؛ دو و هی^۳، ۲۰۱۲). این الگوریتم که نوعی از سیستم‌های چندعامله‌ای است از رفتار غذایی مورچه‌های واقعی الهام گرفته شده به طوری که هر عامل، یک مورچه مصنوعی می‌باشد. همچنین این الگوریتم نمونه موفق‌تری از سیستم‌های هوشمند گروهی است که در آن هر عامل، عمل ساده‌ای را انجام می‌دهد ولی انجام این عمل ساده در کل باعث حل شدن مسائل NP-hard می‌شود. در فرآیند بهینه‌سازی اغلب اوقات واجب است تا در هر تکرار تعدادی هدف شمارش شوند. بنابراین الگوریتم‌های کلونی مورچگان باید سازگاری لازم را جهت یافتن مجموعه‌ای از جواب‌های مناسب داشته باشند تا بهترین پوشش را برای نواحی مختلف پارتو بدست دهند (قزایل و همکاران^۴، ۲۰۰۹). الگوریتم کلونی مورچگان اساساً جهت حل مسائل مربوط به مسیریابی طراحی شده

-
1. Mavrotas
 2. Dorigo
 3. Du and He
 4. Ghezail et al.

است و در مقایسه با سایر الگوریتم‌های فراابتکاری مانند الگوریتم ژنتیک بهترین کارایی را دارد (صالحی صدقیانی، ۱۳۸۹؛ کامروز خدایار و همکاران، ۱۳۹۰).

در دهه گذشته الگوریتم بهینه‌سازی چندهدفه کلونی مورچگان (MOACO) برای مسائل بهینه‌سازی ترکیبی چندهدفه مورد توجه قرار گرفته‌است و محققینی مانند دوریگو و استوتزل^۱ (۲۰۰۴)؛ چیکا و همکاران^۲ (۲۰۱۱)؛ دورنر و همکاران^۳ (۲۰۰۶)؛ کی و همکاران^۴ (۲۰۱۰)؛ مورا و همکاران^۵ (۲۰۰۹) برای توسعه آن تلاش کرده‌اند.

در شکل ۱ مراحل الگوریتم مورچگان چندهدفه برای حل مسئله نشان داده شده‌است. فرض کنید شبکه‌ای با N گره و K مورچه موجود است. اگر مورچه k ام در گره i باشد؛ احتمال اینکه گره j را از بین گره‌های انتخاب نشده N انتخاب کند به صورت رابطه (۱۲) است:

$$P_{ij}^k = \begin{cases} \frac{\tau_{ij}(t)^\alpha \cdot \eta_{ij}^\beta}{\sum_{l \in N} \tau_{il}(t)^\alpha \cdot \eta_{il}^\beta}, & \text{اگر } j \in N \\ 0, & \text{در سایر موارد} \end{cases} \quad (12)$$

فرمون‌ریزی موضعی بر اساس رابطه (۱۳) انجام می‌شود:

$$\Delta_{ij}^k = \begin{cases} \frac{1}{L_k}, & \text{اگر مورچه } k \text{ام از گره } i \text{ به گره } j \text{ زود} \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (13)$$

فرمون‌ریزی سراسری طبق رابطه (۱۴) روی یال‌های آن انجام می‌شود:

$$\tau_{ij}(t+1) = (1 - \rho)[\tau_{ij}(t) + \sum_{k=1}^m \Delta_{ij}^k(t)] \quad (14)$$

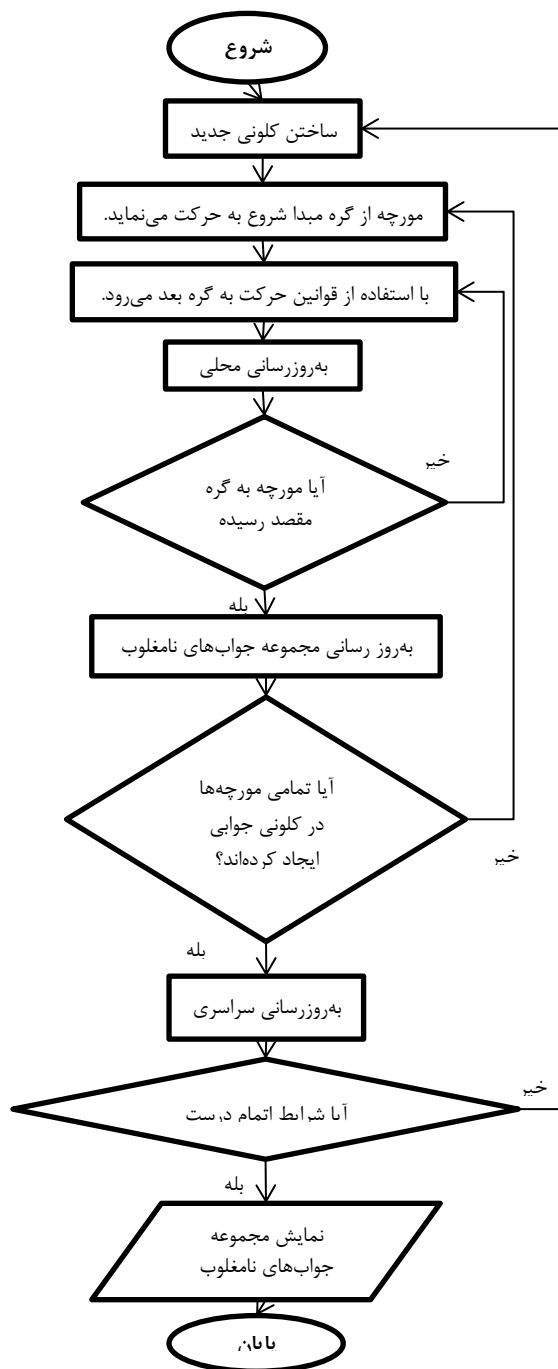
$\eta_{ij} = \frac{1}{d_{ij}}$ اطلاعات اولیه مساله است که فضای مساله را توصیف می‌کند، به عبارتی میزان دید روی هر یال است. $\tau_{ij}(t)$ نشان‌دهنده میزان فرمون روی هر یال است که بیانگر مطلوبیت مسیر

-
1. Dorigo and Stützele
 2. Chica et al.
 3. Doerner et al.
 4. Ke et al.
 5. Mora et al.

است. پارامترهای α و β نشان‌دهنده اهمیت نسبی میزان فرمون و میزان دید و ρ میزان کاهش فرمون (درصد تبخیر) است.

مراحل اجرای این فرایند در قالب شبه برنامه زیر ارائه می‌شود:

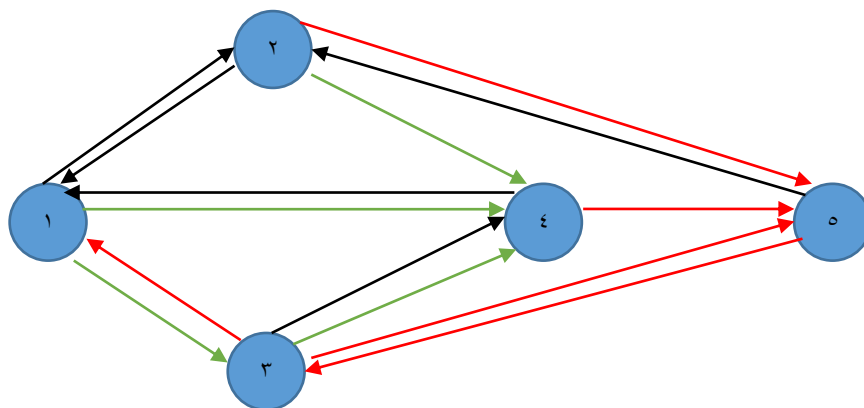
۱. شروع
۲. S را یک دنباله فرمون اولیه فرض کنید.
۳. P را یک مجموعه پارتو اولیه برای یک مجموعه تهی در نظر بگیرید.
۴. K و N را به ترتیب برابر تعداد گره‌های شبکه و تعداد مورچه‌ها در نظر بگیرید.
۵. در شروع کار، یکی از مورچه‌ها به قصد رسیدن به مقصد، از مبدا شروع به حرکت می‌نماید. در اینجا ایستگاه‌های بعدی براساس کمترین زمان، هزینه و تغییر نوع وسیله نقلیه انتخاب می‌گردند و هر بار دنباله فرمون به‌روز رسانی محلی می‌شود تا انتخاب تمامی گره‌ها جهت رسیدن به مقصد.
۶. اگر مورچه به مقصد رسید مجموعه جواب‌های نامغلوب به‌روز رسانی می‌شود و سائز آرشيو پارتو کاهش می‌یابد.
۷. بهترین جواب‌های اولیه مطابق توابع هدف مختلف مورد نظر تعیین می‌گردد.
۸. فرمون مطابق بهترین جواب‌های محاسبه‌شده به‌روز رسانی عمومی می‌شود.
۹. اگر تمامی مورچه‌ها جواب تولید کرده باشند، به‌روز رسانی سراسری انجام می‌شود.
۱۰. مجموعه جواب‌های نامغلوب نمایش داده می‌شود.



شکل ۱: الگوریتم کلونی مورچگان چندهدفه

یافته‌ها

در این بخش به منظور مقایسه عملکرد روش‌های توسعه داده شده، تعدادی شبکه چندوجهی با داده‌های تصادفی تولید و هر یک با دو روش دقیق و فراابتکاری حل و نتایج هر دو رویکرد با یکدیگر مقایسه شده است. شکل ۲ یک نمونه از شبکه چندوجهی با پنج گره را نشان می‌دهد. گره‌ها معرف ایستگاه‌های توقف سیستم‌های حمل‌ونقل عمومی در شهر و هر یک از یال‌های موجود در شبکه با رنگ مشخص، بیانگر نوع خاصی از سیستم حمل‌ونقل واسط بین دو ایستگاه می‌باشد. به عنوان مثال خط قرمز نشان‌دهنده مترو، خط سبز برای اتوبوس و خطوط مشکی، تاکسی را نشان می‌دهند. مقادیر هزینه و زمان سفر توسط هر نوع سیستم حمل‌ونقل بین دو گره به صورت تصادفی تولید شده‌است. در واقعیت این امکان وجود دارد که این مقادیر بر اساس مقادیر پیش‌بینی برآورد شوند. گره ۱ و ۵ به ترتیب ایستگاه‌های مبدا و مقصد سفر مسافر در شبکه حمل‌ونقل چندوجهی است.



شکل ۲: شبکه حمل‌ونقل چندوجهی

به طور مشابه مسائلی با ۱۰ و ۱۵ گره نیز ساخته شده است. هر یک از مسائل با دو رویکرد محدودیت اپسیلون و الگوریتم مورچگان چندهدفه حل شده‌است. برای حل مسائل نمونه با روش محدودیت اپسیلون، تابع هدف هزینه سفر به عنوان مهمترین تابع در تابع مسئله تک

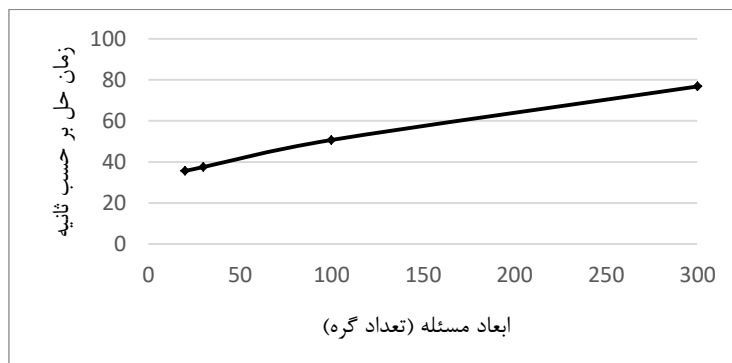
هدفه قرار داده شده و حد آستانه سایر توابع هدف بر اساس مقدار بهینه آن‌ها (مقدار بهینه مسئله با تک هدف) تعیین شده است. در جدول ۱، مجموعه مقدار توابع هدف سه گانه برای راه‌حل‌های بهینه پارتو حاصل از روش محدودیت اِپسیلون در کنار زمان حل مسئله نشان داده شده است. همچنین حداقل و حداکثر مقدار هر یک از توابع هدف به ازای هر مسئله در این جدول نمایش داده شده است.

همان مسائل نمونه توسط الگوریتم فراابتکاری الگوریتم مورچگان چندهدفه که در نرم افزار متلب کدنویسی شده نیز حل شده است. به منظور تنظیم پارامترهای الگوریتم (جمعیت اولیه، α ، β و ρ)، برای هر یک دو مقدار حد پایین و بالا در نظر گرفته شده و مسئله‌ای با ۲۰ گره با ترکیبات مختلف مقدار پارامترها حل شده است. الگوریتم مورچگان با جمعیت ۴۰، α و β برابر یک و همچنین ρ برابر ۰/۰۵ از میان الگوریتم‌ها با مقادیر مختلف پارامترها بهترین زمان حل و کیفیت جواب را دارد. لذا الگوریتم مورچگان با پارامترهای تنظیم شده فوق برای حل مسائل نمونه استفاده شده است. در جدول ۱، مقدار توابع هدف راه‌حل‌های بهینه پارتو حاصل از الگوریتم فراابتکاری مورچگان نیز در کنار زمان حل مسئله نشان داده شده است. مقایسه زمان‌های حل مسائل با دو روش منتخب نشان می‌دهد که الگوریتم فراابتکاری در مسائلی با ابعاد بزرگ (بیشتر از ۱۰ گره) نسبت به روش دقیق کارایی بیشتری از نظر زمان حل مسئله دارد (صدیقی و همکاران، ۲۰۱۴). از طرفی دیگر مقایسه جواب‌های بهینه پارتو حاصل از روش ریاضی و الگوریتم کلونی مورچگان بیانگر آن است که جواب‌های بهینه پارتوی هر دو روش نزدیکی زیادی به هم دارند.

جدول ۱: نتایج حل مدل برای شبکه‌های مثال

تعداد	زمان اجرای برنامه		راه‌حل‌های بهینه پارتو		مقدار ممکن		مقدار ممکن	
	روش دقیق	روش فراابتکاری	روش دقیق	روش فراابتکاری	روش دقیق	روش فراابتکاری	روش دقیق	روش فراابتکاری
۵	۹	۲۷/۳۱۸۸	(۲۸۰،۲۵،۱) (۱۹۰،۳۶،۲) (۱۳۰،۳۸،۲)	(۲۸۰،۲۵،۱) (۱۴۰،۲۸،۱) (۱۳۰،۳۸،۲)	(۱۳۰،۲۵،۱)	(۱۳۰،۲۵،۱)	(۲۸۰،۳۸،۲)	(۲۸۰،۳۸،۲)
۱۰	۲۸	۲۹/۶۸۳۲	(۳۷۰،۴۰،۱)	(۳۷۰،۴۰،۱)	(۳۷۰،۴۰،۱)	(۳۷۰،۴۰،۱)	(۵۷۰،۶۷،۳)	(۵۷۰،۶۷،۳)
۱۵	۷۸۸۰	۳۲/۴۵۵	(۳۷۰،۲۷،۱) (۳۳۰،۴۳،۲)	(۳۷۰،۲۷،۱) (۳۳۰،۴۳،۲) (۵۰۰،۴۰،۰)	(۳۷۰،۲۷،۰)	(۲۷،۰،۳۷۰)	(۱۵۱۰،۸۸،۶)	(۱۵۱۰،۸۸،۶)

با توجه به جدول بالا، مشاهده می‌شود که مسیر بهینه از نظر هزینه الزاماً از نظر زمان و یا تعداد تغییر مُد نیز بهینه نمی‌باشد. در این حالت مدل پیشنهادی مجموعه‌ای از مسیرهای بهینه را ارائه می‌دهد تا هر کاربر با توجه به پارامترهای مورد نظر خود مسیر دلخواهش را برگزیند. همانطور که اشاره شد، زمان حل مسائل با ابعاد بزرگ در الگوریتم دقیق زیاد می‌باشد. برای ارزیابی زمان حل مسئله با الگوریتم فراابتکاری تعدادی مثال عددی با اندازه‌های ۲۰، ۳۰، ۱۰۰ و ۳۰۰ گره نیز طراحی شده‌است. شکل ۳، زمان حل مسائل با ابعاد مختلف را با الگوریتم فراابتکاری مورچگان نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که الگوریتم طراحی شده در مورد شبکه‌های بزرگ نیز در زمان منطقی قادر به پاسخگویی می‌باشد.



شکل ۳: زمان اجرای الگوریتم بر حسب تعداد گره‌ها در شبکه‌های بزرگ

علاوه بر ارزیابی دو روش ذکر شده بر مبنای زمان حل مسئله، کیفیت جواب‌های بهینه پارتوی هر دو روش نیز بر مبنای محاسبه و مقایسه سنجه‌های ارزیابی بایکدیگر مقایسه شده است. برای مقایسه کیفیت جواب‌ها لازم است جواب‌های بهینه پارتو واقعی (مجموعه راه‌حل‌های مرجع) به عنوان مبنای مقایسه کیفیت جواب‌ها محاسبه شود (خلیلی دامغانی^۱، ۲۰۱۳). برای اینکار برای هر مثال عددی الگوریتم فراابتکاری ۱۰ بار اجرا شده و مجموعه بهینه پارتو حاصل از اجرای آن‌ها در مجموعه‌ای ذخیره شده است. سپس نتایج حاصل از روش دقیق نیز به آن‌ها اضافه شده است. از میان مجموعه جواب‌های بهینه پارتو، مجموعه‌ای از راه‌حل‌ها که شامل کلیه جواب‌های نامغلوب می‌باشد به عنوان مجموعه مرجع شناسایی شده اند.

برای ارزیابی دقت^۲ و پراکندگی^۳ جواب‌های بهینه پارتو حاصل از یک روش حل مسائل برنامه‌ریزی چندهدفه از سنجه‌های مختلفی استفاده می‌شود. سه سنجه NNS^۴، ER^۵ و SM^۶ به شرح تعریف و روابط زیر برای ارزیابی جواب‌های بهینه پارتو حاصل از اجرای هر روش استفاده شده است. سنجه NNS تعداد جواب‌های نامغلوبی که در هر بار اجرای الگوریتم تولید می‌شود را نشان می‌دهد. جواب‌های نامغلوب به دست آمده با مجموعه مرجع مقایسه می‌شوند

- 1 . Khalili-Damghani
- 2 .Accuracy
- 3 .Diversity
- 4 .Number of Non Dominated Solution
- 5 .Error Ratio
- 6 .Spacing Metric

و اگر منطبق بودند شمارش شده و اگر مغلوب شدند، شمارش نمی‌شوند. ER واگرایی روش حل را از پارتوی واقعی نشان می‌دهد. تعریف این سنجه مطابق رابطه زیر می‌باشد که در آن e_i یک است اگر جواب i ام از مجموعه راه‌حل‌های پارتو حاصل متعلق به مجموعه مرجع نباشد و در غیر این صورت صفر خواهد بود. n نیز تعداد جواب‌های راه‌حل‌های بهینه پارتو است. هرچه این سنجه به یک نزدیک‌تر باشد، همگرایی جواب‌های به‌دست آمده به سمت پارتو کمتر است.

$$ER = \frac{\sum_{i=1}^n e_i}{n} \quad (15)$$

سنجه SM یکنواختی انتشار و پراکندگی نقاط مجموعه جواب به‌دست آمده از اجرای الگوریتم را اندازه‌گیری می‌کند. برای محاسبه این سنجه در ابتدا باید مقدار \bar{d} (میانگین d_i ها) محاسبه شود. در آن PF مجموعه راه‌حل‌های مرجع، m تعداد توابع هدف، z_k^i مقدار تابع هدف k ام از راه‌حل i ام مجموعه راه‌حل‌های بهینه پارتو می‌باشند.

$$d_i = \min_{p \in PF} \left\{ \sqrt{\sum_{k=1}^m (z_k^i - z_k^p)^2} \right\} \quad (16)$$

سپس SM از رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$SM = \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{(\bar{d} - d_i)^2}{n-1}} \quad (17)$$

جدول ۲ مقدار سنجه‌های ارزیابی عملکرد دو روش حل پیشنهادی را برای شبکه‌های حمل‌ونقل چندوجهی با ابعاد مختلف نشان می‌دهد. البته امکان حل مسائل با ابعاد بیشتر از ۱۵ گره ممکن نبوده است. از بررسی نتایج ملاحظه می‌شود که جواب‌های حاصل به سمت پارتو همگرایی دارند، زیرا اعداد به‌دست آمده برای ER از یک فاصله قابل توجهی دارند. همچنین

مشاهده می‌شود که جواب‌های حاصل از الگوریتم فراابتکاری از یکنواختی مناسبی برخوردار می‌باشند.

جدول ۲: مقایسه مقدار سنج‌های عملکرد الگوریتم مورچگان و روش دقیق

تعداد گره	تعداد اعضای مجموعه پارتو		تعداد کل جواب‌های تولیدشده		NNS		ER		SM	
	روش دقیق	روش فراابتکاری	روش دقیق	روش فراابتکاری	روش دقیق	روش فراابتکاری	روش دقیق	روش فراابتکاری	روش دقیق	روش فراابتکاری
۵	۴	۴	۳	۳	۳	۰	۰	۰	۰	۰
۱۵	۳	۳	۳	۲	۳	۰	۰	۰	۰	۰
۲۰	۱۲	-	۹	-	۸	-	۰/۱۴۲۹	-	۷/۶۱۹۵	-
۳۰	۱۸	-	۸	-	۸	-	۰	-	۰	-
۱۰۰	۲۲	-	۵	-	۵	-	۰	-	۰	-
۳۰۰	۳۶	-	۹	-	۸	-	۰/۱۱۱۱	-	۸۳/۲۲۳۸	-

بحث و نتیجه‌گیری

شبکه‌ای از سیستم‌های حمل و نقل عمومی در شهرهای بزرگ که گره‌های آن را ایستگاه‌ها و کمان‌های آن را سیستم‌های حمل و نقل عمومی تشکیل دهند، شبکه‌های حمل و نقل چندوجهی می‌نامند. هدف این مقاله ارائه راه‌حل ریاضی برای مسیریابی در چنین شبکه‌هایی است تا به تصمیم‌گیری صحیح مسافران کمک کند. مدلی ریاضی چندهدفه‌ای شامل کمینه کردن هزینه، زمان و تعداد تغییر وسیله نقلیه برای مسئله مسیریابی در شبکه‌های حمل و نقل چندوجهی بر اساس ویژگی‌های سیستم‌های حمل و نقل عمومی درون‌شهری پیشنهاد شده است. مدل ریاضی ارائه شده غیرخطی است که با یک رویکرد ابتکاری به تابع خطی تبدیل شده تا درجه پیچیدگی حل آن کاهش یابد. همچنین با استفاده از مثال‌های عددی صحت مدل پیشنهادی بررسی شده است. با توجه به چندهدفه بودن مسئله ریاضی و اینکه جواب این

نوع مسائل، مجموعه راه‌حلی به نام جواب بهینه پارتو است، روش‌های حل این نوع مسائل نیز مجموعه‌ای جواب برای این منظور ارائه می‌کنند تا تصمیم‌گیرنده بر اساس ارجحیت‌های خود بهترین راه‌حل را انتخاب کند. به منظور حل مسئله دو رویکرد دقیق و فراابتکاری ارائه شده است. روش دقیق محدودیت اسپیلون از جمله روش‌های دقیق و الگوریتم فراابتکاری مورچگان برای حل مسئله توسعه داده شده است. اجرای این روش‌ها نشان می‌دهد برای مسائل کمتر از ۱۵ گره هر دو روش قابلیت دستیابی به جواب را دارند اما با افزایش تعداد گره‌های شبکه، کارایی روش دقیق (زمان حل مسئله) کاهش می‌یابد. الگوریتم فراابتکاری توسعه داده شده مسائلی تا ۳۰۰ گره را در زمان منطقی (کمتر از ۸۰ ثانیه) حل می‌کند. کیفیت جواب‌های بهینه پارتو دو روش با سنج‌های ارزیابی مقایسه شده‌اند و نتایج نشان می‌دهد برای تعداد گره کمتر از ۱۵ کیفیت هر دو روش مشابه و به ازای شبکه‌هایی با تعداد گره بیشتر از ۱۵ کیفیت جواب‌ها قابل قبول است. اضافه کردن زمان‌بندی سیستم‌های حمل‌ونقل در ایستگاه‌ها و تصادفی کردن زمان‌های سفر از پیشنهادات تحقیقات آتی این پژوهش است.

منابع

برادران، و.، شاه‌محمد، ح.، واقفی، پ. (۱۳۹۲). «ارائه مدل و نرم‌افزار مسیریابی در شهرها بر اساس معیارهای چندگانه»، سیزدهمین کنفرانس بین‌المللی مهندسی حمل‌ونقل و ترافیک، تهران، ایران.

حسینی‌نسب، س.ش.، صفارزاده، م.، ممدوحی، ا. (۱۳۹۰). «روشی برای مسیریابی بهینه در حمل‌ونقل همگانی یکپارچه شبکه اتوبوس و اتوبوس تندرو»، مهندسی حمل‌ونقل، سال دوم، شماره چهارم، ۳۱۶-۳۰۳.

کامروز خدایار، گ.، کفاش چرندایی، ن. و آل‌شیخ، ع.ا. (۱۳۹۰)، «ارزیابی و مقایسه عملکرد الگوریتم‌های بهینه‌سازی کلونی مورچه‌ها و ژنتیک در حل مسئله فروشنده دوره‌گرد»، مجموعه مقالات همایش ژئوماتیک، اردیبهشت ۹۰، ۲۷-۲۵، تهران، ایران.

عینی، ا.، صالحی‌پور، ا. (۱۳۹۰). «ارائه یک الگوریتم برای یافتن کوتاه‌ترین مسیر در شبکه‌های حمل و نقل»، فصلنامه علمی و پژوهشی مطالعات مدیریت صنعتی، سال هشتم، شماره ۲۱، ۱۸۰-۱۶۷.

خاتمی فیروزآبادی، ع.، محبی، ح.، زارعی محمودآبادی، م. (۱۳۹۰). «الگوریتمی جهت حل مسئله کوتاهترین مسیر مبتنی بر قوانین دارهای الکتریکی»، فصلنامه علمی و پژوهشی مطالعات مدیریت صنعتی، سال هشتم، شماره ۲۱، ۶۱-۳۹.

صالحی صدقیانی، ج. (۱۳۸۹). «حل مسئله فروشنده دوره‌گرد متقارن با در نظر گرفتن زمان عزیزت فازی بین شهرها توسط الگوریتم فراابتکاری مورچگان»، فصلنامه علمی و پژوهشی مطالعات مدیریت صنعتی، سال هشتم، شماره ۱۸، ۱۲۲-۱۰۵.

Aneja, Y.P., Aggarwal, V. and Nair, K.P.K. (1983), "Shortest chain subject to side constraints", *Networks*, Vol. 13, No. 2, pp. 295-302.

Bevrani, B., Burdett, R.L., Bhaskar, A., Yarlaga, P. K.D.V. (2017). "A Capacity Assessment Approach for Multi-Modal Transportation Systems",

European Journal of Operational Research ,Vol. 263, No. 3, pp. 864-878. doi: 10.1016/j.ejor.2017.05.007.

Bezerra, L. C. T., Goldberg, E. F. G., Goldberg, M. C., and Buriol, L. S. (2011), "(Grace: A generational randomized aco for the multi-objective shortest path problem". *International Conference on Evolutionary Multi-Criterion Optimization* ,Evolutionary Multi-Criterion Optimization, pp 535-549.

Bezerra, L.C.T., Goldberg ,E.F.G., Goldberg, M.C. and Buriol, L.S. (2013), "Analyzing the impact of MOACO components: An algorithmic study on the multi-objective shortest path problem ," *Expert Systems with Applications* ,Vol. 40, pp. 345-355.

Breugem, T., Dollevoet, T. and van den Heuvel, W. (2017). "Analysis of FPTASes for the Multi-Objective Shortest Path Problem ," *Computers and Operation Research* ,Vol. 78, pp. 44-56.

Chandra ,S., Braughton, M., Galicia, L. D., Sanchez, A., Medina, M., Aldrete, R. (2016" .(A multi-modal transportation score to evaluate infrastructure supply-demand for commuters", International Conference on Sustainable Design, Engineering and Construction ,*Procedia Engineering* ,Vol. 145, pp. 304 - 311.

Chica, M., Cordon, O ,.Damas, S. and Bautista, J. (2011" .(A new diversity induction mechanism for a multi-objective ant colony algorithm to solve a real-world time and space assembly line balancing problem ," *Memetic Computing* , Vol. 3 ,pp.15-24.

Climaco, J.C.N ,.Craveirinha, J.M.F., Pascoal, M.M.B" .)۳۰۰۳(.A bicriterion approach for routing problems in multimedia networks ," *Networks* , Vol. 41, No. 4, pp. 399-404.

Dib, O., Manier, M. and Caminada, A. (2015" .(Memetic Algorithm for Computing Shortest Paths in Multimodal Transportation Networks ," *Transportation ResearchProcedia* ,Vol. 10 ,pp .۷۰۰-۷۴۰ .

Dijkstra ,E.W. (1959). "A note on two problems in connection with graphs ," *Numerische Mathematik* ,Vol. 1, pp. 269-271.

Doerner, K., Hartl, R. F. and Reimann, M" .(۳۰۰۱) .Are competants more competent for problem solving? The case of a multiple objective transportation problem". GECCO'01. Berlin, Heidelberg :Morgan Kaufmann, p. 802 .

Dorigo, M. and Stützele, T. (2004" ,(*Ant Colony Optimization* ,"MIT Press, Cambridge, MA.

Dorigo, M., Maniezzo, V. and Coloni, A" (۱۹۹۶) .Ant system: Optimization by a colony of cooperating agents ,”*IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics Part B* ,Vol. 26, No. 1, pp. ۴۱-۲۹ .

Dorigo, M., Maniezzo, V. and Coloni, A“ (۱۹۹۱) .Ant System: An Autocatalytic Optimizing Process, Technical Report ,”Dipartimento di Elettronica e Informazione, Politecnico di Milano.

Du, L. and He, R. (2012). “Combining Nearest Neighbor Search with Tabu Search for Large-Scale Vehicle Routing Problem ,”*Physics Procedia* ,Vol. 25, pp. 1536-1546.

Duque, D., Lozano, L. and Medaglia, A.L“ (۲۰۱۵) .An exact method for the biobjective shortest path problem for large-scale road networks ,”*European Journal of Operational Research* ,Vol. 242. No. 3, pp. 788-797 .

Ergun, F., Sinha, R. and Zhang, L. (2002“ .(An improved FPTAS for restricted shortest path ,”*Information Processing Letters* ,Vol. 83, pp. 287-291 .

Ghezail, F., Pierreval, H. and Hajri-Gabouj ,S. (2009), “Multi Objective Optimization Using Ant Colonies Complex Systems and Self-organization Modelling ,”*Part of the series Understanding Complex Systems* ,pp. 65-70.

Ghoseiri, K. and Nadjari ,B. (2010), “An ant colony optimization algorithm for the bi-objective shortest path problem ,”*Applied Soft Computing* ,Vol. 10, pp. 1237-1246.

Glover ,F. and Laguna, M. (1997“ ,(Tabu Search ,”Kluwer Academic Publishers.

Goldberg ,H.C. (2005). “Computing the shortest path :A* meets graph theory ,”*Proceedings of the 16th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA 2005)* ,(SIAM .

Gunichev, A., Bedathur, S., Seufert, S. and Weikum, G. (2010). “Fast and accurate estimation of shortest paths in large graphs”, in :*Proc 19 .th ACM International Conference on Information and Knowledge Management, Toronto, Canada* ,pp. 499-508.

Gutiérrez-Jarpa ,G., Laporte, G., Marianov, V., Mocchiad, L“ (۲۰۱۷) .Multi-objective rapid transit network design with modal competition : The case of Concepción ,Chile ,”*Computers & Operations Research* , Vol ,۷۸ .pp. 27-43 .

Hadas, Y., Nahum, O.E. (2016), “Urban bus network of priority lanes :A combined multi-objective ,multi-criteria and group decision-making approach ,” *Transport Policy* ,Vol. 52, pp. ۱۹۶-۱۸۶ .

Handler, G. and Zang, I^(۱۹۸۰). A dual algorithm for the constrained shortest path problem, "Networks", Vol. 10, No. 4, pp. 293-310.

Huguet, M. and Kirchler, D. (2013), Pierre Parent, Roberto Wolfler Calv, "Efficient algorithms for the 2-Way Multi Modal Shortest Path Problem", "Electronic Notes in Discrete Mathematics", Vol. 41, pp. 431-437.

Joksch, H.C. (1966), "The shortest route problem with constraints", "J. Math. Anal. Appl.", Vol. 14, No. 2, pp. 191-197.

Ke, L., Feng, Z., Xu, Z., Shang, K., and Wang, Y. (2010). "A multiobjective ACO algorithm for rough feature selection." In PACCS'10, pp. 207-210.

Khalili-Damghani, K. and Amiri, M. (2012). (Solving binary-state multi-objective reliability redundancy allocation series-parallel problem using efficient epsilon-constraint, multi-start partial bound enumerational gorithm, and DEA, "Reliability Engineering and System Safety", Vol. 103, pp. 30-44.

Madow, L., Perez de la Cruz, J.L. (2005). "A new approach to multi objective A* search", in: Proc. of IJCAI'05, pp. 18-22.

Mavrotas, G. (2009). "Effective implementation of the e-constraint method in multi-objective mathematical programming problems", "Applied Mathematics and Computation", Vol. 213, pp. 55-65.

Mora, A. M., Merelo, J. J., Laredo, J. L. J., Millan, C. and Torrecillas, J. (2009). "Chac, a moaco algorithm for computation of bi-criteria military unit path in the battlefield: Presentation and first results", "International Journal of Intelligence Systems", Vol. 24, pp. 818-843.

Niksirat, M., Ghatee, M. M. and Hashemi, S.M^(۲۰۱۲). Multimodal K-shortest viable path problem in Tehran public transportation network and its solution applying ant colony and simulated annealing algorithms, "Applied Mathematical Modelling", Vol. 36, pp. 907-922.

Patiño, M.S. and Lozano, A. (2014). (Shortest hyperpaths in a multimodal network for the public transportation system: Central Southern Mexico City, "Social and Behavioral Science", Vol. 160, pp. 529-538.

Pyrga, E., Schulz, F., Wagner, D. and Zaroliagis, C. (2008), "Efficient models for timetable information in public transportation systems", "ACM Journal of Experimental Algorithmics", Vol. 12, No. 2.4, pp. 1-39.

Rivera, J.C., Afsar, H.M. and Prins, C^(۲۰۱۶). Mathematical formulations and exact algorithm for the multitrip cumulative capacitated single-vehicle routing problem, "Eur. J. Oper. Res.", Vol. 249, No. 1, pp. 93-104.

Sheng, Y. and Gao, Y. (2016). "Shortest path problem of uncertain random network," *Computers & Industrial Engineering*, Vol. 99, pp. 97–105.

Shi, N, Zhou, S., Wang, F .and Liu, L. (2017). "The multi-criteria constrained shortest path problem," *Transportation Research Part E*, Vol. 101, pp. 13-29 .

Siddiqi, U. F., Shiraishi, Y., Dahba, M. and Sait, S. M" (۲۰۱۴). "A memory efficient stochastic evolution based algorithm for the multi-objective shortest path problem," *Applied Soft Computing*, Vol. 14, pp. 653–662.

Socharoentum ,M. and Karimi ,H. A. (2016).(" Multi-modal transportation with multi-criteria walking (MMT-MCW): Personalized route recommender ," *Computers ,Environment and Urban Systems* ,Volume 55 ,pp. 44-54.

Stern R. (1996). "Passenger transfer system review", Synthesis of Transit Practice ,^{۱۹} Transportation Research Board, National Academy Press.

Tarapata, Z. (2007). "Selected multi criteria shortest path problems: an analysis of complexity, models and adoption of standard algorithms ," *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci* ,Vol. 17, No. 2 ,pp. 269–287 .

Tsaggouris, G. and Zaroliagis, C. (2009), "Multiobjective optimization: improved FPTAS for shortest paths and non-linear objectives with applications ," *J. Theory Comput. Syst* ,Vol. 45, No. 1, pp. 162–186.

Udenta, F.C., Jha, M.K .,Mishra, S. and Maji, A. (2013), "Strategies to Improve the Efficiency of a Multimodal Interdependent Transportation System in Disasters ," *Social and Behavioral Sciences* ,Vol. 104, pp. 805 – 814.

Verma, M., Verter, V. and Zufferey, N. (2012). "A bi-objective model for planning and managing rail-truck intermodal transportation of hazardous materials ," *Transp. Res. Part E* ,Vol. 48, No. 1, pp. 132–149.

Wang, L., Yang, L. and Gao .Z., (2016). "The constrained shortest path problem with stochastic correlated link travel times ," *Eur. J. Oper. Res* ,.Vol. 255, No. 1, pp. 43–57.

Wang, S., Meng, Q. and Sun ,Z. (2013). "Container routing in liner shipping ," *Transp. Res. Part E* ,Vol. 49, No. 1, pp. 1–7.